论文

非稳态导热基于温度梯度的本征正交分解降维方法

冯俞楷, 杜小泽*, 杨立军

华北电力大学电站设备状态监测与控制教育部重点实验室, 北京 102206

* E-mail: duxz@ncepu.edu.cn

收稿日期: 2017-03-20; 接受日期: 2017-04-27; 网络出版日期: 2017-06-21

摘要 利用本征正交分解(POD)方法处理温度场是实现非线性热流过程降维的有效途径. 目前大部分POD算法研究, 是从温度场构成的瞬态图像中提取POD基函数, 结合Galerkin投影法建立低阶模型; 或者对数值计算方法采用的方程组进行POD分解或SVD分解, 以建立低自由度的方程组, 达到降维的目的. 与传统的POD方法不同, 本文以优化POD解的梯度为目标, 从温度场的梯度中提取出最优正交基. 结合Galerkin投影法, 建立了二维、常物性、非稳态导热微分方程的POD-Galerkin降维模型, 研究了各个边界条件下导热微分方程的降维算法的精度. 结果表明POD解保持0.1%以下的相对偏差, 而平均求解时间从原来的1.64 s降低到0.02 s.

关键词 温度梯度, 导热微分方程, 本征正交分解, Galerkin投影法

1 引言

在传热与流动的偏微分方程模拟中, 无论是使用有限差分法(FDM)^[1]、有限元法(FEM)^[1], 还是有限容积法(FVM)^[2], 数值求解方法往往含有很高的自由度, 对计算资源提出了很高的要求. 本征正交分解(POD)作为一种有效的降维计算方法, 用很少的基函数描述物理量场, 从而大大缩短模拟所需要的时间.

POD方法又被称作主成分分析^[3]或者经验正交函数法^[4], 在诸多领域均有应用. Luo等人^[5-7]一直致力于研究偏微分方程POD降维外推算法, 分别给出了非定常Navier-Stokes方程的POD有限差分降维外推算法、非定常Boussinesq方程的POD有限容积降维外推算法、非定常Navier-Stokes方程的POD有限元降维外

推算法. POD方法也被用在了跨尺度问题的研究上, Hu等人^[8,9]使用POD方法对空冷系统中的跨尺度问题进行了研究. Joshi等人^[10-12]致力于用POD方法解决数据中心散热中的多尺度问题.

在求解POD降维模型时, 通常将POD技术与Galerkin投影法相结合. 康伟等人^[13]对 $Re=200$ 的NACA0012翼型绕流问题进行了POD-Galerkin降维算法研究. Hazenberg等人^[14]针对二维平板导热问题建立了POD-Galerkin降维内插值算法模型. 在求解POD降维模型的方法上, 出现了一些新型的求解POD权系数的方法, Ramo和Joshi^[15]将POD方法与通量守恒法(FMP)相结合对数据中心的散热问题进行降维计算. Hu等人^[8]将POD方法与样条插值法相结合, 研究了空冷岛的降维模型.

引用格式: 冯俞楷, 杜小泽, 杨立军. 非稳态导热基于温度梯度的本征正交分解降维方法. 中国科学: 技术科学, 2018, 48: 39-47
Feng Y K, Du X Z, Yang L J. Extrapolating POD reduced-order model based on temperature gradient for unsteady heat conduction (in Chinese). Sci Sin Tech, 2018, 48: 39-47, doi: [10.1360/N092017-00079](https://doi.org/10.1360/N092017-00079)

目前,大部分的POD算法研究中,是从物理量场组成的瞬态图像中提取POD基函数,结合Galerkin投影法建立低阶模型^[16-18];或者对组装的方程组进行POD分解或奇异值分解(SVD),从而建立低自由度的方程组^[19].尽管可以在相当大的程度上降低对计算资源的需求,但传统POD降维方法在处理非稳态导热等强烈非线性问题时,在满足计算精度的前提下,仍需耗用较多计算资源,而且传统POD降维方法的外推能力有限.

以二维非稳态导热过程为例,本文基于温度场的梯度,提出以温度场POD解的梯度为优化目标,而不是以温度场的POD解为优化目标,从温度梯度中提取出POD基函数.在提取出POD基函数后,将POD基函数视作Galerkin投影法中的权函数(试函数),组装低自由度的线性方程组.通过求解低自由度的线性方程组,可以有效地实现POD-Galerkin降维算法的外推,从而快速地预测计算域内温度场的变化.

2 导热方程的有限元方法

考虑二维、常物性、非稳态导热微分方程^[20]:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + s, \quad (1)$$

式中, ρ 为密度(kg/m^3), c 为比热(J/(kg K)), λ 为导热系数(W/(m K)), s 为内热源(W/m^3).

导热微分方程的三类边界条件可总结为

$$a \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = bT + c, \quad (2)$$

式中, n 表示计算域的外法线, $\partial \Omega$ 表示计算域的边界.当边界处于第一类边界条件(Dirichlet条件)时, $a=0$, $b=-1$, $c=T_b$, T_b 为环境温度;当边界条件是第二类边界条件(Neumann条件)时, $a=-\lambda$, $b=0$, $c=q$, q 是边界上的热流;当边界条件是第三类边界条件(Robin条件)时, $a=-\lambda$, $b=h$, $c=-hT_b$, h 为对流换热系数, T_b 为环境温度.

导热微分方程(1)的初值条件为

$$T(x, y)|_{t=0} = T_0(x, y). \quad (3)$$

导热微分方程(1)是一类抛物型偏微分方程,有限元方法是求解这类偏微分方程的有效方法.方程(1)的弱解形式表达式为^[20]

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} N \, dx dy &= \int_{\partial \Omega} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} N \, ds \\ &- \int_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx dy \\ &+ \int_{\Omega} s N \, dx dy, \end{aligned} \quad (4)$$

式中, Ω 为计算域, N 为加权函数(也称试函数).对于Galerkin投影法,加权函数 N 需要满足正交的特性.有限元法在局部子域 Ω_e 上(即每一个网格单元内)构造加权函数,求取每个局部子域上的温度场的近似解,从而得到全局求解域上的温度场数值解^[21].因此,导热微分方程(1)的有限元模型方程的个数等于求解域内节点的个数.

将导热方程的初值条件(式(3))代入到方程(4)中,并对方程(4)的时间项采用一阶向后差分,可以得到二维、常物性、非稳态导热微分方程的有限元方法的线性方程组^[21]:

$$\left(\mathbf{K} + \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} \right) \mathbf{T}_n = \mathbf{P} + \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} \mathbf{T}_{n-1}, \quad (5)$$

式中, $\mathbf{K}$ 为温度刚度矩阵, $\mathbf{C}$ 为热容矩阵, $\mathbf{P}$ 为温度载荷列向量, Δt 为时间步长, $\mathbf{T}_{n-1}$ 为前一时刻的温度列向量, $\mathbf{T}_n$ 为当前时刻的温度列向量.

3 基于温度梯度的POD-Galerkin降维方法

传统POD方法本质是优化POD方法的温度解,使得温度场的POD解与传统的数值方法的解的误差最小^[16]:

$$\min \|T(x, y) - T'(x, y)\|^2. \quad (6)$$

而基于温度梯度的POD降维计算方法的优化目标是使温度场的POD解的梯度误差实现最小^[22]:

$$\min \|\nabla T(x, y) - \nabla T'(x, y)\|^2, \quad (7)$$

式中, $\|\cdot\|^2$ 表示 $\int_{\Omega} (\cdot)^2 \, d\Omega$, $T(x, y)$ 为有限元方法获得的温度场的数值解, $T'(x, y)$ 为POD方法获得的温度场的近似解.

3.1 POD降维方法

POD的温度场数值解 T' 是由 M 个POD基的线性组合而成,即:

$$T' = \sum_{i=1}^M d_i \varphi_i, \quad (8)$$

式中, φ_i 是第 i 个 POD 基, d_i 是第 i 个 POD 基的系数. 基于温度场梯度的 POD-Galerkin 降维计算, 本质上是寻找最优的 POD 基, 将 POD 基视作 Galerkin 权函数代入到导热微分方程的弱解形式当中, 组成方程数量较少的线性方程组, 通过求解线性方程组得到温度场的近似解.

为了寻找到满足式(7)的最优 POD 基, 首先需要通过传统计算方法或者实验方法获得某些时间段的温度场 T , 构成瞬像 (Snapshots), $\{T(t_1), T(t_2), \dots, T(t_L)\}$. 与基于温度场的 POD 降维方法不同, 基于温度场梯度的 POD 方法以温度场的梯度为基础生成相关矩阵. 生成相关矩阵 $\mathbf{R}$ 的公式如下:

$$\mathbf{R}_{ij} = \int_{\Omega} \nabla T(t_i) \cdot \nabla T(t_j) \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \quad (9)$$

求解相关矩阵 $\mathbf{R}_{L \times L}$ 的特征值和特征向量 $\mathbf{R}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, 那么 POD 基可以通过式(10)表示^[7]:

$$\varphi_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \sum_{i=1}^M v_j^i T'(t_i), \quad (10)$$

式中, v_j^i 表示的是第 j 个特征向量的第 i 个元素. 基于温度场梯度生成的 POD 基的标准正交特性并不是体现在 POD 基 φ_i 上, 而是体现在 POD 基的梯度 $\nabla \varphi$ 上, 即根据式(10)生成的 POD 基满足:

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \begin{cases} 1, & j=i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \quad (11)$$

相关矩阵的第 j 个特征值 λ_j 反映的是 POD 降维计算方法的近似解的误差, 事实上, 选取 $M(1 \leq M \leq L)$ 个 POD 基对已知的温度场进行降维计算之后, POD 解的梯度的误差是:

$$\sum_{i=1}^M \|\nabla(T(t_i) - T'(t_i))\|^2 = \sum_{i=M+1}^L \lambda_i. \quad (12)$$

从式(12)中可以看出, 选取某 $M(1 \leq M \leq L)$ 个 POD 基之后, POD 降维计算方法得到的温度场的梯度的截断误差是剩余的 POD 基所对应的特征值之和. 某个 POD 基所对应的特征值反映了该 POD 基对 POD 降维计算的精度的贡献, 因此, 为了尽可能地降低 POD 降维计算的截断误差, 需要尽可能地选取特征值较大的 POD 基, 这就需要对所有的特征值进行从大到小的排序,

使得 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_L$.

基于温度梯度 POD 基函数的生成步骤可以总结为如下:

(1) 取 L 个时间点由传统计算方法计算出的温度场, 将其依次记为 $T_1(x, y, z)$, $T_2(x, y, z)$, $\dots$, $T_L(x, y, z)$;

(2) 根据式(9)生成矩阵 $\mathbf{R}_{L \times L}$;

(3) 求矩阵 $\mathbf{R}_{L \times L}$ 的标准特征向量 $\mathbf{v}^j$ 和对应的特征值 λ_j , 其中 $\mathbf{v}^j = (v_1^j, v_2^j, \dots, v_L^j)^T$;

(4) 对矩阵 $\mathbf{A}_{L \times L}$ 的特征值按照从大到小的顺序进行排序 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L$;

(5) 按照精度要求选取前 M 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$ ($1 \leq M \leq L$), 以及对应的标准特征向量 $\mathbf{v}^j$, 根据特征值和特征向量, 生成 POD 基函数 φ_j : $\varphi_j = \pi_j^{-1/2} \sum_{k=1}^L b_k^j T_k$.

3.2 Galerkin 投影法

将获取的 POD 基视作 Galerkin 投影法的权函数, 代入到式(4)中, 同时将式(8)代入, 可以得到二维、常物性、非稳态导热微分方程的 POD-Galerkin 降维模型:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \varphi \mathrm{d}x \mathrm{d}y &= \int_{\partial \Omega} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \varphi \mathrm{d}s \\ &\quad - \int_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ &\quad + \int_{\Omega} s \varphi \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \end{aligned} \quad (13)$$

在使用 Galerkin 投影法组装代数方程之前, 需要对式(13)的时间项采用向后差分, 那么可得:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho c \frac{T^k - T^{k-1}}{\Delta t} \varphi \mathrm{d}x \mathrm{d}y &= \int_{\partial \Omega} \lambda \frac{\partial T^{k-1}}{\partial n} \varphi \mathrm{d}s \\ &\quad - \int_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial T^{k-1}}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial T^{k-1}}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ &\quad + \int_{\Omega} s \varphi \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

把式(8)代入上式可得到关于 POD 基系数 d 的代数方程组:

$$\mathbf{A} d^k = \mathbf{Y}, \quad (14)$$

式中, d^k 表示第 k 时间步的 POD 近似解的 M 个系数组成的列向量, $\mathbf{A}$ 表示 $M \times M$ 的矩阵, $\mathbf{Y}$ 是含有 M 个元素的列向量. $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{Y}$ 中个元素的计算公式可表示为 $A_{ij} = \int_{\Omega} \rho c \varphi_i \varphi_j \mathrm{d}\Omega$, 以及

$$Y_j = \int_{\Omega} \rho c T^{k-1} \varphi_j d\Omega + \Delta t \cdot \int_{\partial\Omega} \lambda \frac{\partial T^{k-1}}{\partial n} \varphi_j d\Omega - \Delta t \cdot \int_{\Omega} \lambda \nabla T^{k-1} \cdot \nabla \varphi_j d\Omega + \Delta t \cdot \int_{\Omega} s \varphi_j d\Omega,$$

其中, i 和 j 的取值范围为 $i, j=1, 2, \dots, M$.

使用传统的数值计算方法对式(1)进行数值计算之前, 需要对计算域进行网格离散, 计算域的节点个数记为 r . 则从式(4)中可看出, 线性方程组的个数为 r 个. 在使用POD-Galerkin降维方法之后, 方程组的自由度从 r 个降低到 M 个, 而 M 的数量级通常为 10^1 , 因此, 导热微分方程求解的代价大大降低. 通过式(14)求解POD系数 d^k , 然后通过式(8)可以获得瞬像之内或者瞬像之外的温度场的近似解.

4 导热微分方程在三类边界条件下的POD-Galerkin降维模型

在本文的研究算例中, 导热材料选作青铜, 密度 8800 kg/m^3 , 比热容 343 J/(kg K) , 导热系数 24.8 W/(m K) , 内热源的大小取为 2000 W/m^3 , 初始温度取为 30°C . 研究基于温度场梯度的POD-Galerkin降维计算方法在二维、常物性、非稳态导热在三类边界条件下的降维计算效果. 其中, 第一类边界条件设置边界温度为 10°C , 第二类边界条件设置为边界热流 -600 W/m^2 , 第三类边界条件设置为对流换热系数 $20 \text{ W/(m}^2 \text{ }^\circ\text{C)}$, 环境温度 10°C . 有限元时间步长选作 0.1 s . 计算域均是 $0.1 \text{ m} \times 0.1 \text{ m}$ 的方形区域, 使用有限元算法计算时, 计

算区域被剖分成 40×40 的四边形网格.

4.1 计算结果

本文使用传统的有限元方法模拟第一类边界条件下温度场的变化, 选取 $0 \sim 4 \text{ s}$ 的温度场组成瞬像, 构造相关矩阵, 提取出POD基, 选取特征值最大的9个POD基代入到式(4)中, 可以得到POD方法在第一类边界条件下的表达式:

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \varphi dxdy = - \int_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dxdy + \int_{\Omega} s \varphi dxdy. \quad (15)$$

在已有的温度场的基础上, 进行POD外推计算, 图1分别给出了 34 s 时POD方法和传统的有限元方法的温度场计算结果.

对于第二类边界条件, 选取 $0 \sim 4 \text{ s}$ 的温度场提取出POD基, 选取特征值最大的5个POD基代入到式(4)中, 可以得到第二类边界条件下的POD-Galerkin降维方法的表达式:

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \varphi dxdy = \int_{\partial\Omega} -q \varphi ds - \int_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dxdy + \int_{\Omega} s \varphi dxdy. \quad (16)$$

使用POD-Galerkin降维方法外推到 44 s , 图2分别给出了POD-Galerkin降维方法和传统有限元方法的温

图1 第一类边界条件下的POD解和FEM解. (a) POD解; (b) FEM解

图2 第二类边界条件下的POD解和FEM解. (a) POD解; (b) FEM解

度分布云图.

对于第三类边界条件, 从选取0~4 s的温度场中提取出POD基, 选取4个POD基即可获得满意的精度要求, 可以得到二维、常物性、非稳态导热微分方程在第三类边界条件下的POD-Galerkin降维方法的表达式:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \varphi dx dy &= \int_{\partial\Omega} -h(T - T_f) \varphi ds \\ &- \int_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx dy \\ &+ \int_{\Omega} s \varphi dx dy. \end{aligned} \quad (17)$$

在式(17)的边界积分中, 边界上的温度分布使用式(8)的计算方法. 在前4 s的温度场的基础上, 外推到34 s, 图3分别给出了POD-Galerkin方法和有限元方法的温度分布.

4.2 精度分析

从图1~3可以看出, 二维、常物性、非稳态导热

微分方程在三类边界条件下, POD-Galerkin降维算法的解和传统有限元方法的解的温度分布基本一致, 因此可以认为POD-Galerkin方法均可以有效地进行降维计算. 为了更有效地反映POD-Galerkin降维方法的计算偏差, 以传统的有限元方法获得的温度场 T 作为POD-Galerkin降维模型的解的参照值. 通过式(18)定义POD-Galerkin降维计算相对于传统有限元解的相对偏差:

$$\delta = \frac{\|T' - T\|}{\|T\|}. \quad (18)$$

利用式(18)分别计算三类边界条件下的POD近似解的相对偏差, 表1中分别列出了三类边界条件下的降维计算的相对偏差.

选取计算域的中心(0.05, 0.05)为监视点, 记录该监视点从4 s开始到34 s, POD-Galerkin降维算法和有限元算法的温度大小的变化. 该点的两种算法的数值解随时间的变化呈现在图4中.

从图4中可以看出, 监视点的POD解的偏差随着时

图3 第三类边界条件下的POD解和FEM解. (a) POD解; (b) FEM解

表 1 POD-Galerkin降维算法的相对偏差

边界条件类型	第一类边界条件	第二类边界条件	第三类边界条件
相对偏差(%)	0.068	0.015	0.003

图 4 监视点处的POD解和FEM解

间变化逐渐累积. 第一类边界条件下, POD-Galerkin降维算法从第4 s开始计算到第34 s时, 监视点(0.05, 0.05)处的绝对偏差仍然小于0.5℃, 相对偏差低于2%. 第三类边界条件下, POD-Galerkin降维算法在监视点处的解与有限元方法的解基本重合.

为了体现各个网格节点上的POD解的相对偏差, 分别在第二类和第三类边界条件下使用POD-Galerkin降维算法计算至34 s, 将POD解的相对偏差分布图分别呈现在图5和6中.

从相对偏差分布云图中可见, 在POD-Galerkin求解的第二类边界条件下34 s时温度场中, 整个温度场的相对偏差均在0.03%以下. 第三类边界条件下的相对偏差更小, 均在0.05%以下. 这样的相对偏差, 能够满足降维算法对计算精度的要求.

4.3 与传统POD方法的比较

为了比较基于温度梯度的POD方法与基于温度的POD方法在外推能力上的差异, 以第一类边界条件为例, 使用基于温度的传统POD方法从0~4 s的温度场中提取POD基函数, 选取特征值最大的9个POD基, 并结合Galerkin投影法外推计算至11 s, 温度场的计算结果如图7(a)所示. 同时, 在第一类边界条件下, 使用基

图 5 第二类边界条件下POD解的相对偏差 **图 6** 第三类边界条件下POD解的相对偏差

于温度梯度的新型POD方法从0~4 s的温度场瞬像中提取POD基函数, 选取9个最大特征值所对应的POD基函数, 使用Galerkin投影法外推至11 s, 结果如图7(b)所示. 使用有限元方法在相同边界条件和初值条件下, 计算11 s时的温度场分布如图7(c).

对比图7(a)和(c)可以发现, 以优化POD温度解为优化目标的POD-Galerkin降维算法在外推到11 s时的计算结果与有限元计算方法得到的温度场相差较大, 外推误差较大. 对比图7(b)和(c)可以发现, 相对于基于温度的POD-Galerkin降维算法, 以优化POD解梯度为优化目标的POD-Galerkin降维算法的与有限元计算的结果基本一致, 误差较小. 因此, 基于温度梯度的POD-Galerkin降维算法比基于温度的POD-Galerkin降维算法有更强的外推能力, 精度损失更小.

图 7 基于温度的POD和基于温度梯度的POD外推比较. (a) 基于温度的POD解; (b) 基于温度梯度的POD解; (c) FEM解

5 总结

本文改变了传统的导热问题POD降维模型的优化目标,以最小化POD解的梯度为目标,而不以最小化POD解为优化目标.在本文中,通过该方法提取的POD基结合Galerkin投影法,可以从前4 s的温度场快速预测30 s的温度场.事实证明,这种新型的POD降维模型有更强的外推能力.

POD基函数是从瞬像中获得的,构成瞬像的温度场分布不仅可以通过传统的有限元算法获得,也可以通过其他的微分方程数值计算算法获得,更可以通过实验测量获得,因此,POD-Galerkin降维模型有很好的推广能力.

在本文中,由于计算域中一共有 41×41 个节点,传统的有限元方法需要求解 41×41 个线性方程组成的线性方程组.而对于本文的POD-Galerkin降维方法,需要求解的线性方程的个数在第一类边界条件下为9个,第二类边界条件下为5个,第三类边界条件下为4个,这大大降低了计算时间,节省了计算机资源.在本文中,有限元方法在每个时间步长上平均花费的计算时间为1.64 s,而POD-Galerkin降维方法在每个时间步长上平均花费的计算时间为0.02 s,计算速度约是有限元计算方法的80倍.可见,POD-Galerkin降维方法以较小的精度损失为代价,大大缩短了计算时间,实现了对温度场分布的快速预测.

参考文献

- 1 陈艳萍,鲁祖亮,刘利斌. 偏微分方程数值解法. 北京: 科学出版社, 2015
- 2 陶文铨. 数值传热学. 第2版. 西安: 西安交通大学出版社, 2001. 483–502
- 3 罗振东,王瑞文,陈静,等. 非定常的Navier-Stokes方程基于特征正交分解的差分格式. 中国科学A辑, 2007, 37: 709–718
- 4 Selten F M. Baroclinic empirical orthogonal functions as basis functions in an atmospheric model. *J Atmos Sci*, 1997, 54: 2099–2114

- 5 Luo Z D. Proper orthogonal decomposition-based reduced-order stabilized mixed finite volume element extrapolating model for the nonstationary incompressible Boussinesq equations. *J Math Anal Appl*, 2015, 425: 259–280
- 6 Luo Z D, Wang R, Zhu J. Finite difference scheme based on proper orthogonal decomposition for the nonstationary Navier-Stokes equations. *Sci China Ser A*, 2007, 50: 1186–1196
- 7 Luo Z D, Du J, Xie Z H, et al. A reduced stabilized mixed finite element formulation based on proper orthogonal decomposition for the nonstationary Navier-Stokes equations. *Int J Numer Meth Engng*, 2011, 88: 31–46
- 8 Hu H M, Du X Z, Yang L J, et al. Cross scale simulation on transport phenomena of direct air-cooling system of power generating units based on reduced order modeling. *Int J Heat Mass Transf*, 2014, 75: 156–164
- 9 胡和敏, 杜小泽, 杨立军, 等. 直接空冷系统流动特性的多尺度模拟研究. *动力工程学报*. 2014, 34: 216–221
- 10 Nie Q, Joshi Y. Multiscale thermal modeling methodology for thermoelectrically cooled electronic cabinets. *Numer Heat Tr A-Appl*, 2007, 53: 225–248
- 11 Ghosh R, Joshi Y. Error estimation in POD-based dynamic reduced-order thermal modeling of data centers. *Int J Heat Mass Transf*, 2013, 57: 698–707
- 12 Samadiani E, Joshi Y. Multi-parameter model reduction in multi-scale convective systems. *Int J Heat Mass Transf*, 2010, 53: 2193–2205
- 13 康伟, 张家忠, 李凯伦. 利用本征正交分解的非线性Galerkin降维方法. *西安交通大学学报*, 2011, 45: 62–67
- 14 Hazenberg M, Astrid P, Weiland S. Low order modeling and optimal control design of a heated plate. In: *European Control Conference (ECC)*, 2003. Cambridge: IEEE, 2003. 1240–1245
- 15 Rambo J, Joshi Y. Reduced-order modeling of turbulent forced convection with parametric conditions. *Int J Heat Mass Transfer*, 2007, 50: 539–551
- 16 丁鹏, 陶文铨. 建立低阶模型的POD方法. *工程热物理学报*, 2009, 30: 1019–1021
- 17 吴学红, 陶文铨, 吕彦力, 等. 不可压缩流动问题快速计算的降阶模型. *中国电机工程学报*, 2010, 30: 69–74
- 18 Ding P, Wu X H, He Y L, et al. A fast and efficient method for predicting fluid flow and heat transfer problems. *J Heat Transf*, 2008, 130: 032502
- 19 Astrid Patricia. Reduction of process simulation models: A proper orthogonal decomposition approach. Dissertation of Doctoral Degree. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 2004
- 20 Pentenrieder B. Finite element solutions of heat conduction problems in complicated 3D geometries using the multigrid method. Dissertation of Masteral Degree. München: Technische Universität München, 2005
- 21 罗振东. 混合有限元法基础及其应用. 北京: 科学出版社, 2006
- 22 Li H R, Luo Z D, Chen J. Numerical simulation based on POD for two-dimensional solute transport problems. *Appl Math Modelling*, 2011, 35: 2489–2498

Extrapolating POD reduced-order model based on temperature gradient for unsteady heat conduction

FENG YuKai, DU XiaoZe & YANG LiJun

Key Laboratory of Condition Monitoring and Control for Power Plant Equipment, Ministry of Education, North China Electric Power University, Beijing 102206, China

A new proper orthogonal decomposition (POD) reduced-order model based on temperature gradient is established for heat conduction differential equation. In the most of present studies of heat conduction POD reduced-order model, the POD basis functions are extracted from temperature fields by adopting proper orthogonal decomposition or singular value decomposition (SVD). Different from conventional POD reduced-order method, this paper optimize the gradient of POD solutions by extracting the optimal orthogonal basis from temperature gradient. After getting POD basis, the POD reduced-order model is solved by using Galerkin projection. POD-Galerkin reduced-order model of two dimensional, constant property and non-steady heat conduction differential equations is established, and the accuracy of the reduced-order model under different boundary conditions is further studied. The results suggests that the relative error of POD solution is less than 0.1% while the average computing time reduces from 1.64 s to 0.02 s.

temperature field, heat conduction differential equation, proper orthogonal decomposition, Galerkin projection

doi: 10.1360/N092017-00079