2×2 上三角无界算子矩阵的谱

阿拉坦仓^{①②}, 青梅^{①*}, 吴德玉^①

① 内蒙古大学数学科学学院, 呼和浩特 010021;

② 内蒙古民族学院数学系, 呼和浩特 010051

E-mail: alatanca@imu.edu.cn, bai.qingmei@163.com, wudeyu2585@163.com

收稿日期: 2014-10-30; 接受日期: 2015-01-16; 网络出版日期: 2015-12-01; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11371185, 11101200 和 11362011) 和内蒙古自然科学基金 (批准号: 2013ZD01 和 2013MS0103) 资助项目

摘要 本文研究了 Hilbert 空间中的对角定义的 2×2 上三角闭线性算子矩阵的谱、近似点谱、亏谱和本质谱的性质, 进而得到了算子矩阵的谱、近似点谱和亏谱分别等于对角算子的谱、近似点谱和亏谱的并集的充要条件; 还得到了算子矩阵的本质谱等于对角算子的本质谱的并集的充分条件. 作为应用, 本文还得到了对角定义的上三角无穷维 Hamilton 算子的谱性质.

关键词 上三角闭算子矩阵 近似点谱 亏谱 本质谱 无穷维 Hamilton 算子

MSC (2010) 主题分类 47A10, 47A25

1 引言

算子矩阵论是算子理论中较为活跃的研究方向之一, 它在纯理论及实际应用中都有深远的研究意义, 一方面, 若 T 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子, 其中 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, 则 T 可写成如下形式:

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix},$$

其中 T_{ij} 是从子空间 $\mathcal{H}_j$ 到子空间 $\mathcal{H}_i$, $i, j = 1, 2$ 的线性算子. 特别地, 若 $\mathcal{H}_1$ 是 T 的不变子空间, 则 $T_{21} = 0$, 即 T 是上三角算子矩阵; 另一方面, 算子理论研究在矩阵论、偏微分方程的离散化和 Hamilton 系统等诸多数学分支中都有深入应用并且物理系统的相应算子矩阵的谱性质对其可解性及稳定性起重要作用. 近年来, 2×2 上三角算子矩阵研究引起了许多学者的关注, 参见文献 [1–4]. 值得注意的是, 文献 [5–8] 利用局部谱理论估计出集合 $(\sigma_*(A) \cup \sigma_*(D)) \setminus \sigma_*(T)$ 的分布范围, 并得到了等式

$$\sigma_*(T) = \sigma_*(A) \cup \sigma_*(D) \quad (1.1)$$

成立的充分条件, 其中

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

英文引用格式: Alatanca, Qingmei, Wu D Y. Spectra of 2×2 upper triangular operator matrices with unbounded entries (in Chinese). Sci Sin Math, 2016, 46: 157–168, doi: 10.1360/012015-44

是 Banach 空间上的上三角有界算子矩阵且 $\sigma_* = \{\sigma, \sigma_{ap}, \sigma_\delta, \sigma_e\}$. 本文主要工作是把这些结论推广到无界算子矩阵的情形, 并得到等式 (1.1) 成立的充要条件. 具体地, 本文首先刻画了集合 $(\sigma_*(A) \cup \sigma_*(D)) \setminus \sigma_*(T)$, 并得到了等式 (1.1) 成立的充要条件, 其中

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(D) \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

是 Hilbert 空间内的上三角闭算子矩阵, 且 $\sigma_* = \{\sigma_{ap}, \sigma_\delta, \sigma\}$. 本文还估计出了集合 $(\sigma_e(A) \cup \sigma_e(D)) \setminus \sigma_e(T)$ 的分布范围, 并得到了等式 (1.1) 成立的充分条件, 其中 T 是上三角稠定闭算子矩阵. 最后将结论运用于无穷维 Hamilton 算子, 并举例以验证结论的有效性.

2 预备知识

本文中, 记 $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间.

定义 1 ^[9] Hilbert 空间 $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ 中的稠定闭线性算子 H 称为无穷维 Hamilton 算子, 如果 H 具有如下 2×2 分块形式:

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix},$$

其中 A 是 $\mathcal{H}$ 中的稠定闭线性算子, B 和 C 是 $\mathcal{H}$ 中的自伴算子.

对于闭线性算子 $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, 若 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的且 $n(T) < \infty$ (或 $d(T) < \infty$), 则称 T 是左 Fredholm (右 Fredholm) 算子, 其中 $n(T)$ 和 $d(T)$ 分别是 $\mathcal{N}(T)$ 和 $\mathcal{H}/\mathcal{R}(T)$ 的维数. 若 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的, $n(T) < \infty$ 且 $d(T) < \infty$, 则称 T 是 Fredholm 算子. 闭算子 T 的左本质谱、右本质谱和本质谱定义如下:

$$\begin{aligned} \sigma_{le}(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ 不是左 Fredholm 算子}\}, \\ \sigma_{re}(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ 不是右 Fredholm 算子}\}, \\ \sigma_e(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ 不是 Fredholm 算子}\}. \end{aligned}$$

记闭线性算子 T 的谱、近似点谱和亏谱分别为 $\sigma(T)$, $\sigma_{ap}(T)$ 和 $\sigma_\delta(T)$. T 的 1- 点谱和 1- 剩余谱记为如下:

$$\begin{aligned} \sigma_{p,1}(T) &= \{\lambda \in \sigma_p(T) : \mathcal{R}(T - \lambda I) = \mathcal{H}\}, \\ \sigma_{r,1}(T) &= \{\lambda \in \sigma_r(T) : \overline{\mathcal{R}(T - \lambda I)} = \mathcal{R}(T - \lambda I)\}. \end{aligned}$$

不难发现, 有如下等式:

$$\sigma(T) = \sigma_{p,1}(T) \cup \sigma_\delta(T) = \sigma_{r,1}(T) \cup \sigma_{ap}(T).$$

引理 1 ^[10] 设

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(D) \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

是闭算子矩阵, 其中 A 和 D 均是闭算子, 则

$$(i) \sigma_p(A) \subset \sigma_p(T) \subset \sigma_p(A) \cup \sigma_p(D);$$

$$(ii) \rho(A) \cap \rho(D) \subset \rho(T).$$

引理 2^[11] 若闭算子 T 和可闭算子 S 满足 $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(S)$, 则 S 是相对于 T 有界, 即存在 $a_S, b_S \geq 0$, 成立

$$\|Sx\| \leq a_S\|x\| + b_S\|Tx\|, \quad x \in \mathcal{D}(T).$$

引理 3^[12] 设 $T: \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ 是闭线性算子, 则下列条件相互等价:

$$(i) 0 \notin \sigma_{ap}(T);$$

$$(ii) \mathcal{N}(T) = \{0\} \text{ 且 } \mathcal{R}(T) \text{ 是闭的};$$

$$(iii) \text{ 算子 } T \text{ 下方有界, 即存在一个常数 } \delta > 0, \text{ 满足 } \|Tx\| \geq \delta\|x\|, \forall x \in \mathcal{D}(T).$$

引理 4 设

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}: \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(D) \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

是闭算子矩阵, 其中 A 和 D 均是稠定闭算子且 B 是可闭算子. 若 $\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{D}(B^*)$, 则

$$T^* = \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ B^* & D^* \end{pmatrix}.$$

证明 易证

$$T^* \supset \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ B^* & D^* \end{pmatrix}.$$

反之, 只要证明

$$\mathcal{D}(T^*) \subset (\mathcal{D}(A^*) \cap \mathcal{D}(B^*)) \times \mathcal{D}(D^*) = \mathcal{D}(A^*) \times \mathcal{D}(D^*) \quad (2.1)$$

即可. 设 $z^* = (x^*, y^*)^T \in \mathcal{D}(T^*)$, 则存在 $f = (f_1, f_2)^T \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ 使得

$$(Tz, z^*) = (z, f), \quad z \in \mathcal{D}(T),$$

即

$$(Ax, x^*) + (By, x^*) + (Dy, y^*) = (x, f_1) + (y, f_2), \quad x \in \mathcal{D}(A), \quad y \in \mathcal{D}(D).$$

令 $y = 0$, 则

$$(Ax, x^*) = (x, f_1), \quad x \in \mathcal{D}(A),$$

则有 $x^* \in \mathcal{D}(A^*)$. 再令 $x = 0$, 则

$$(By, x^*) + (Dy, y^*) = (y, f_2), \quad y \in \mathcal{D}(D).$$

由 $\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{D}(B^*)$, 有

$$(Dy, y^*) = (y, f_2 - B^*x^*), \quad y \in \mathcal{D}(D).$$

从而有 $y^* \in \mathcal{D}(D^*)$. 故等式 (2.1) 成立. □

3 主要结论

定理 1 设

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(D) \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

是闭算子矩阵, 其中 A 和 D 均为闭算子且 B 是可闭算子, 则

- (i) $\sigma_\delta(D) \subset \sigma_\delta(T) \subset \sigma_\delta(A) \cup \sigma_\delta(D)$;
- (ii) $\sigma_{ap}(A) \subset \sigma_{ap}(T) \subset \sigma_{ap}(A) \cup \sigma_{ap}(D)$.

证明 (i) $\sigma_\delta(D) \subset \sigma_\delta(T)$ 显然成立. 下证 $\sigma_\delta(T) \subset \sigma_\delta(A) \cup \sigma_\delta(D)$. 设 $\lambda \in \sigma_\delta(T)$, 则

$$\mathcal{R}(T - \lambda I) \neq \mathcal{H} \times \mathcal{H},$$

于是, $(\mathcal{R}(A - \lambda I) + \mathcal{R}(B|_{\mathcal{D}(D - \lambda I)})) \neq \mathcal{H}$ 或 $\mathcal{R}(D - \lambda I) \neq \mathcal{H}$.

若 $\mathcal{R}(D - \lambda I) \neq \mathcal{H}$, 则 $\lambda \in \sigma_\delta(D)$.

假设 $\mathcal{R}(A - \lambda I) + \mathcal{R}(B|_{\mathcal{D}(D - \lambda I)}) \neq \mathcal{H}$ 成立. 设 $\lambda \notin \sigma_\delta(A)$, 即 $\mathcal{R}(A - \lambda I) = \mathcal{H}$, 则

$$\mathcal{R}(A - \lambda I) + \mathcal{R}(B|_{\mathcal{D}(D - \lambda I)}) = \mathcal{H},$$

矛盾. 故 $\lambda \in \sigma_\delta(A)$, 从而 (i) 成立.

(ii) 易证 $\sigma_{ap}(A) \subset \sigma_{ap}(T)$. 下证 $\sigma_{ap}(T) \subset \sigma_{ap}(A) \cup \sigma_{ap}(D)$. 设 $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, 即存在

$$z_n = (x_n, y_n)^T \in \mathcal{D}(T),$$

使得 $\|z_n\|^2 = \|x_n\|^2 + \|y_n\|^2 = 1$, $n = 1, 2, \dots$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T - \lambda I)z_n = 0,$$

从而有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A - \lambda I)x_n + By_n = 0, \quad (3.1)$$

及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (D - \lambda I)y_n = 0. \quad (3.2)$$

假设 $\lambda \notin \sigma_{ap}(A) \cup \sigma_{ap}(D)$, 则

$$\lambda \in (\rho(A) \cap \sigma_{r,1}(D)) \cup (\sigma_{r,1}(A) \cap \rho(D)) \cup (\sigma_{r,1}(A) \cap \sigma_{r,1}(D)) \cup (\rho(A) \cap \rho(D)).$$

若 $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(D)$, 由引理 1, 有 $\lambda \in \rho(T)$, 与 $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ 矛盾.

若 $\lambda \in \rho(A) \cap \sigma_{r,1}(D)$, 则 $A - \lambda I$ 和 $D - \lambda I$ 分别在 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{R}(D - \lambda I)$ 上有有界逆. 由 (3.2) 知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0. \quad (3.3)$$

从而有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Dy_n = 0. \quad (3.4)$$

据引理 2, 存在 $a, b \geq 0$ 使得

$$\|By_n\| \leq a\|y_n\| + b\|Dy_n\|, \quad y_n \in \mathcal{D}(D).$$

由 (3.3) 和 (3.4), 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} By_n = 0. \quad (3.5)$$

再由 (3.1), 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A - \lambda I)x_n = 0. \quad (3.6)$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

这与 $\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2 = 1, n = 1, 2, \dots$ 矛盾.

同理可证 $\lambda \notin \sigma_{r,1}(A) \cap \rho(D)$ 及 $\lambda \notin \sigma_{r,1}(A) \cap \sigma_{r,1}(D)$.

综上所述, (ii) 成立. $\square$

由定理 1 可估计出集合 $(\sigma_\delta(A) \cup \sigma_\delta(D)) \setminus \sigma_\delta(T)$ 及 $(\sigma_{ap}(A) \cup \sigma_{ap}(D)) \setminus \sigma_{ap}(T)$ 的分布范围, 见如下定理:

定理 2 设

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(D) \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

是闭算子矩阵, 其中 A 和 D 闭算子且 B 为可闭算子, 则

(i) $\sigma_\delta(A) \cup \sigma_\delta(D) = \sigma_\delta(T) \cup (\sigma_{p,1}(D) \cap \sigma_\delta(A))$;

(ii) $\sigma_{ap}(A) \cup \sigma_{ap}(D) = \sigma_{ap}(T) \cup (\sigma_{r,1}(A) \cap \sigma_{ap}(D))$.

证明 (i) 由定理 1 有

$$\sigma_\delta(A) \cup \sigma_\delta(D) \supset \sigma_\delta(T) \cup (\sigma_{p,1}(D) \cap \sigma_\delta(A)).$$

反之, 若 $\lambda \in (\sigma_\delta(A) \cup \sigma_\delta(D)) \setminus \sigma_\delta(T)$, 由定理 1 知, $\lambda \in \sigma_\delta(A) \setminus \sigma_\delta(D)$, 则

$$\lambda \in \sigma_{p,1}(D) \cup \rho(D).$$

假设 $\lambda \in \rho(D)$, 则 $D - \lambda I$ 是双射. 由 $\lambda \notin \sigma_\delta(T)$ 和

$$T - \lambda I = \begin{pmatrix} I & B(D - \lambda I)^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - \lambda I & 0 \\ 0 & D - \lambda I \end{pmatrix},$$

有 $\mathcal{R}(A - \lambda I) = \mathcal{H}$. 这与 $\lambda \in \sigma_\delta(A)$ 矛盾. 故 $\lambda \in \sigma_{p,1}(D)$. 从而,

$$(\sigma_\delta(A) \cup \sigma_\delta(D)) \setminus \sigma_\delta(T) \subset \sigma_{p,1}(D) \cap \sigma_\delta(A).$$

综上所述, (i) 成立.

(ii) 易证

$$\sigma_{ap}(A) \cup \sigma_{ap}(D) \supset \sigma_{ap}(T) \cup (\sigma_{r,1}(A) \cap \sigma_{ap}(D)).$$

反之, 设 $\lambda \in (\sigma_{ap}(A) \cup \sigma_{ap}(D)) \setminus \sigma_{ap}(T)$. 由定理 1, 有 $\lambda \in \sigma_{ap}(D) \setminus \sigma_{ap}(A)$, 则

$$\lambda \in \sigma_{r,1}(A) \cup \rho(A).$$

假设 $\lambda \in \rho(A)$, 则 $A - \lambda I$ 是双射. 由 $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$ 和引理 3 知, $\mathcal{N}(T - \lambda I) = \{0\}$ 且 $\mathcal{R}(T - \lambda I)$ 是闭集. 我们断言 $\mathcal{N}(D - \lambda I) = \{0\}$, 否则存在 $0 \neq y_0 \in \mathcal{N}(D - \lambda I)$ 使得

$$(D - \lambda I)y_0 = 0.$$

由 $-By_0 \in \mathcal{H} = \mathcal{R}(A - \lambda I)$, 则存在 $x_0 \in \mathcal{D}(A - \lambda I)$ 使得

$$(A - \lambda I)x_0 + By_0 = 0,$$

即

$$(T - \lambda I)z_0 = 0, \quad z_0 = (x_0, y_0)^T \neq 0.$$

这与 $\mathcal{N}(T - \lambda I) = \{0\}$ 矛盾. 由 $\mathcal{R}(T - \lambda I) = \mathcal{H} \times \mathcal{R}(D - \lambda I)$ 是闭集知, $\mathcal{R}(D - \lambda I)$ 是闭集. 若不然, 存在 $\{g_n\} \subset \mathcal{R}(D - \lambda I)$, 使得 $g_n \rightarrow g_0$ ($n \rightarrow \infty$), 但 $g_0 \notin \mathcal{R}(D - \lambda I)$. 对每一个 g_n , 存在 $y_n \in \mathcal{D}(D - \lambda I)$, 使得 $(D - \lambda I)y_n = g_n$. 由 $By_n \in \mathcal{H} = \mathcal{R}(A - \lambda I)$ 知, 存在 $x_n \in \mathcal{D}(A - \lambda I)$, 使得 $(A - \lambda I)x_n = By_n$. 令 $z_n = (-x_n, y_n)^T$, 则 $z_n \in \mathcal{D}(T - \lambda I)$ 且

$$(T - \lambda I)z_n = \begin{pmatrix} 0 \\ g_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ g_0 \end{pmatrix}, \quad n \rightarrow \infty.$$

由 $\mathcal{R}(T - \lambda I)$ 是闭集知, $g_0 \in \mathcal{R}(D - \lambda I)$, 矛盾. 据引理 3, 得 $\lambda \notin \sigma_{ap}(D)$, 与 $\lambda \in \sigma_{ap}(D)$ 矛盾. 故 $\lambda \in \sigma_{r,1}(A)$. 从而,

$$(\sigma_{ap}(A) \cup \sigma_{ap}(D)) \setminus \sigma_{ap}(T) \subset (\sigma_{r,1}(A) \cap \sigma_{ap}(D)).$$

综上所述, (ii) 成立. □

注 1 定理 2 的结论对有界线性算子亦成立. 再由

$$\sigma_{r,1}(K) \subset S(K^*), \quad \sigma_{p,1}(K) \subset S(K), \quad (3.7)$$

其中 $S(K) = \{\lambda \in \mathbb{C} : K \text{ 在 } \lambda \text{ 处没有 SVEP}\}$ 知, 文献 [8, 定理 3.5 和性质 3.2] 是本文定理 2 的推论.

由定理 2 直接可得出下面的推论:

推论 1 设

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(D) \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

是闭算子矩阵, 其中 A 和 D 均是闭算子且 B 是可闭算子, 则

(i) $\sigma_\delta(A) \cup \sigma_\delta(D) = \sigma_\delta(T)$ 当且仅当 $\sigma_{p,1}(D) \cap \sigma_\delta(A) \subset \sigma_\delta(T)$;

(ii) $\sigma_{ap}(A) \cup \sigma_{ap}(D) = \sigma_{ap}(T)$ 当且仅当 $\sigma_{r,1}(A) \cap \sigma_{ap}(D) \subset \sigma_{ap}(T)$.

进一步, 若 $\sigma_{p,1}(D) \cap \sigma_\delta(A) = \emptyset$ (或 $\sigma_{r,1}(A) \cap \sigma_{ap}(D) = \emptyset$), 则

$$\sigma_\delta(A) \cup \sigma_\delta(D) = \sigma_\delta(T) \quad \text{或} \quad \sigma_{ap}(A) \cup \sigma_{ap}(D) = \sigma_{ap}(T).$$

注 2 若 $S(D) = \emptyset$, 由 (3.7), 有 $\sigma_{p,1}(D) \cap \sigma_\delta(A) = \emptyset$. 再由推论 1 得 $\sigma_\delta(A) \cup \sigma_\delta(D) = \sigma_\delta(T)$. 这说明推论 1 是文献 [5, 推论 2.2] 的推广. 类似地, 我们易知, 推论 1 亦是文献 [8, 性质 3.2、推论 3.13 和 3.14] 的推广.

由定理 1 和 2 可估计出集合 $(\sigma(A) \cup \sigma(D)) \setminus \sigma(T)$ 的分布范围:

定理 3 设

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(D) \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

是闭算子矩阵, 其中 A 和 D 均是闭算子且 B 是可闭算子, 则

$$\sigma(A) \cup \sigma(D) = (\sigma_{p,1}(D) \cap \sigma_{r,1}(A)) \cup \sigma(T).$$

证明 首先证明 $\sigma(A) \cup \sigma(D) = \sigma_{r,1}(A) \cup \sigma(T)$. 易证

$$\sigma_{r,1}(A) \cup \sigma(T) \subseteq \sigma(A) \cup \sigma(D).$$

反之, 由定理 2 知,

$$\sigma_{ap}(A) \cup \sigma_{ap}(D) \subseteq \sigma_{r,1}(A) \cup \sigma_{ap}(T).$$

由 $\sigma_\delta(D) \subseteq \sigma_\delta(T)$, 有

$$\sigma_{ap}(A) \cup \sigma(D) \subseteq \sigma_{r,1}(A) \cup \sigma(T),$$

从而,

$$\sigma(A) \cup \sigma(D) \subseteq \sigma_{r,1}(A) \cup \sigma(T),$$

故 $\sigma(A) \cup \sigma(D) = \sigma_{r,1}(A) \cup \sigma(T)$.

同理可证 $\sigma_{p,1}(D) \cup \sigma(T) = \sigma(A) \cup \sigma(D)$, 于是有

$$\sigma(A) \cup \sigma(D) = \sigma(T) \cup (\sigma_{p,1}(D) \cap \sigma_{r,1}(A)).$$

定理 3 得证. □

注 3 由 (3.7) 有 $\sigma_{r,1}(A) \cap \sigma_{p,1}(D) \subset S(A^*) \cap S(D)$. 于是易知文献 [7, 定理 2.5] 是定理 3 的推论.

推论 2 设

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(D) \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

是闭算子矩阵, 其中 A 和 D 均是闭算子且 B 是可闭算子, 则

$$\sigma(A) \cup \sigma(D) = \sigma(T)$$

当且仅当

$$\sigma_{p,1}(D) \cap \sigma_{r,1}(A) \subset \sigma(T).$$

进一步, 若 $\sigma_{p,1}(D) \cap \sigma_{r,1}(A) = \emptyset$, 则 $\sigma(T) = \sigma(A) \cup \sigma(D)$.

定理 4 设

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(D) \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

是闭算子矩阵, 其中 A, D 均是稠定闭算子且 B 是稠定算子. 若 $\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{D}(B^*)$, 则

$$\sigma_{le}(A) \cup \sigma_{re}(D) \subset \sigma_e(T) \subset \sigma_e(A) \cup \sigma_e(D).$$

证明 先证 $\sigma_{le}(A) \cup \sigma_{re}(D) \subset \sigma_e(T)$. 设 $\lambda \notin \sigma_e(T)$, 则 $T - \lambda I$ 是 Fredholm 算子, 即 $n(T - \lambda I) < \infty$ 且 $d(T - \lambda I) < \infty$. 从而, $d(D - \lambda I) < d(T - \lambda I) < \infty$, 即 $D - \lambda I$ 是右 Fredholm 算子. 由引理 4 知,

$$T^* = \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ B^* & D^* \end{pmatrix}.$$

从而, $d(A^* - \bar{\lambda}I) < d(T^* - \bar{\lambda}I) = n(T - \lambda I) < \infty$. 则 $\mathcal{R}(A - \lambda I)$ 是闭集且 $n(A - \lambda I) < \infty$, 即 $A - \lambda I$ 是左 Fredholm 算子. 故 $\lambda \notin \sigma_{le}(A) \cup \sigma_{re}(D)$.

下证 $\sigma_e(T) \subset \sigma_e(A) \cup \sigma_e(D)$. 将文献 [13, 定理 3.1] 的证明中的 $-A^*$ 改为 D 即可. $\square$

集合 $(\sigma_e(A) \cup \sigma_e(D)) \setminus \sigma_e(T)$ 的估计见如下定理:

定理 5 设

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(D) \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

是闭算子矩阵, 其中 A 和 D 均是稠定闭算子且 B 是稠定算子. 若 $\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{D}(B^*)$, 则

$$\sigma_e(A) \cup \sigma_e(D) \subset \sigma_e(T) \cup (\sigma_{p+}(D) \setminus \sigma_{re}(D)) \cup (\sigma_{p+}(A^*)^* \setminus \sigma_{re}(A^*)^*), \quad (3.8)$$

其中 $\sigma_{p+}(\cdot) = \{\lambda \in \sigma_p(\cdot) : n(\cdot - \lambda I) > d(\cdot - \lambda I)\}$ 且 $\sigma_p(\cdot)^* = \{\bar{\lambda} \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma_p(\cdot)\}$.

证明 设 $\lambda \in (\sigma_e(A) \cup \sigma_e(D)) \setminus \sigma_e(T)$, 由定理 4 知,

$$\lambda \notin \sigma_{le}(A) \cup \sigma_{re}(D),$$

即 $A - \lambda I$ 是左 Fredholm 算子且 $D - \lambda I$ 是右 Fredholm 算子.

假设 $\lambda \notin (\sigma_{p+}(D) \setminus \sigma_{re}(D)) \cup (\sigma_{p+}(A^*)^* \setminus \sigma_{re}(A^*)^*)$, 则

$$\lambda \notin \sigma_{p+}(D) \setminus \sigma_{re}(D), \quad (3.9)$$

$$\lambda \notin \sigma_{p+}(A^*)^* \setminus \sigma_{re}(A^*)^*. \quad (3.10)$$

由 (3.9) 知, $\lambda \notin \sigma_p(D)$ 或 $n(D - \lambda I) \leq d(D - \lambda I)$. 若 $\lambda \notin \sigma_p(D)$, 则 $n(D - \lambda I) = 0$, 从而 $\lambda \notin \sigma_e(D)$; 若 $n(D - \lambda I) \leq d(D - \lambda I)$, 也有 $\lambda \notin \sigma_e(D)$. 由 (3.10) 知, $\bar{\lambda} \notin \sigma_p(A^*)$ 或 $n(A^* - \bar{\lambda}I) \leq d(A^* - \bar{\lambda}I)$. 若 $\bar{\lambda} \notin \sigma_p(A^*)$, 则 $d(A - \lambda I) = n(A^* - \bar{\lambda}I) = 0$, 从而有 $\lambda \notin \sigma_e(A)$; 若 $n(A^* - \bar{\lambda}I) \leq d(A^* - \bar{\lambda}I)$, 有 $\lambda \notin \sigma_e(A)$. 这与 $\lambda \in \sigma_e(A) \cup \sigma_e(D)$ 矛盾. 故 (3.8) 成立. $\square$

注 4 若

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

是有界线性算子矩阵, 则

$$\sigma_e(A) \cup \sigma_e(D) \subset \sigma_e(T) \cup ((\sigma_{p+}(D) \setminus \sigma_{re}(D)) \cap (\sigma_{p+}(A^*)^* \setminus \sigma_{re}(A^*)^*)).$$

因为 $(\sigma_{p+}(D) \setminus \sigma_{re}(D)) \subset S(D)$ 且 $(\sigma_{p+}(A^*)^* \setminus \sigma_{re}(A^*)^*) \subset S(A^*)$, 则

$$(\sigma_{p+}(D) \setminus \sigma_{re}(D)) \cap (\sigma_{p+}(A^*)^* \setminus \sigma_{re}(A^*)^*) \subset S(D) \cap S(A^*).$$

这说明此结论是文献 [8, 定理 3.2] 的推广.

推论 3 设

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(D) \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

是闭算子矩阵, 其中 A 和 D 均是稠定闭算子且 B 是稠定算子. 若 $\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{D}(B^*)$ 且 $(\sigma_{p+}(D) \setminus \sigma_{re}(D)) \cup (\sigma_{p+}(A^*)^* \setminus \sigma_{re}(A^*)^*) \subset \sigma(T)$, 则

$$\sigma_e(T) = \sigma_e(A) \cup \sigma_e(D).$$

特别地, 若 $\sigma_{p+}(D) \cap \sigma_{re}(D) = \emptyset$ 且 $\sigma_{p+}(A^*)^* \cap \sigma_{re}(A^*)^* = \emptyset$, 则 $\sigma_e(T) = \sigma_e(A) \cup \sigma_e(D)$.

4 应用

上节结论对无穷维 Hamilton 算子亦成立, 即有如下定理:

定理 6 设

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^* \end{pmatrix} : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

是上三角无穷维 Hamilton 算子. 若 $\sigma_{r,1}(A) = \emptyset$ 或 $\sigma_{p,1}(A^*) = \emptyset$, 则

$$\sigma_{ap}(H) = -\sigma_{ap}(A^*) \cup \sigma_{ap}(A), \quad \sigma_{\delta}(H) = -\sigma_{\delta}(A^*) \cup \sigma_{\delta}(A).$$

定理 7 设

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^* \end{pmatrix} : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

是上三角无穷维 Hamilton 算子. 若如下四条件之一成立:

- (i) $\sigma_{r,1}(A) = \emptyset$;
- (ii) $\sigma_{p,1}(A^*) = \emptyset$;
- (iii) $\operatorname{Re} \lambda > 0, \forall \lambda \in \sigma_{r,1}(A)$;
- (iv) $\operatorname{Re} \lambda < 0, \forall \lambda \in \sigma_{r,1}(A)$,

则

$$\sigma(H) = -\sigma(A^*) \cup \sigma(A).$$

证明 易证 (i) 和 (ii).

设 (iii) 或 (iv) 成立. 对于稠定闭算子 A , 有 (参见文献 [9])

$$\lambda \in \sigma_{r,1}(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_{p,1}(A^*) \Leftrightarrow -\bar{\lambda} \in \sigma_{p,1}(-A^*).$$

则 (iii) 或 (iv) 成立当且仅当 $\sigma_{p,1}(-A^*) \cap \sigma_{r,1}(A) = \emptyset$. 再由推论 2 知,

$$\sigma(H) = -\sigma(A^*) \cup \sigma(A).$$

定理 7 得证. □

定理 8 设

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^* \end{pmatrix} : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

是上三角无穷维 Hamilton 算子. 若 $-(\sigma_{p+}(A^*) \setminus \sigma_{re}(A^*)) \cup (\sigma_{p+}(A^*)^* \setminus \sigma_{re}(A^*)^*) \subset \sigma_e(T)$, 则

$$\sigma_e(H) = -\sigma_e(A^*) \cup \sigma_e(A).$$

特别地, 若 $\sigma_{p+}(A^*) \cap \sigma_{re}(A^*) = \emptyset$ 且 $\sigma_{p+}(A^*)^* \cap \sigma_{re}(A^*)^* = \emptyset$, 则

$$\sigma_e(H) = -\sigma_e(A^*) \cup \sigma_e(A).$$

证明 由等式

$$\begin{aligned} \sigma_{p+}(-A^*) &= \{-\lambda \in \sigma_p(A^*) : n(-A^* - \lambda I) > d(-A^* - \lambda I)\} \\ &= \{-\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma_p(A^*), n(A^* - \lambda I) > d(A^* - \lambda I)\}, \end{aligned}$$

结论易得证. □

下面举一些例子来说明定理的有效性.

例 1 考虑定义在 $\{(x, y) : 0 < x < h, 0 < y < 1\}$ 上的板弯曲方程

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \omega = 0,$$

及边界条件

$$\begin{aligned} \omega(X, 0) &= \omega(X, 1) = 0, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} &= 0, \quad y = 0, 1. \end{aligned}$$

令

$$\theta = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad q = D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} \right), \quad m = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right),$$

则方程可改写为如下无穷维 Hamilton 系统形式^[14]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \omega \\ \theta \\ q \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{D} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \theta \\ q \\ m \end{pmatrix},$$

其相应的 Hamilton 算子为

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{d^2}{dy^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{D} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d^2}{dy^2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^* \end{pmatrix} : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H},$$

其中

$$\mathcal{H} = L_2(0, 1) \times L_2(0, 1), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{d^2}{dy^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{D} \end{pmatrix},$$

且

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \omega \\ \theta \end{pmatrix} \in \mathcal{H} : \omega(0) = \omega(1) = 0, \omega' \in AC[0, 1], \omega', \omega'' \in \mathcal{H} \right\}.$$

经简单计算, 有 $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{k\pi : k = \pm 1, \pm 2, \dots\}$, 则 $\sigma_{r,1}(A) = \emptyset$. 由定理 6 和 7 知,

$$\sigma_*(H) = -\sigma_*(A^*) \cup \sigma_*(A),$$

其中 $\sigma_* = \{\sigma, \sigma_{ap}, \sigma_\delta\}$.

另一方面, 经计算, 有

$$\sigma(H) = \{k\pi : k = \pm 1, \pm 2, \dots\} = -\sigma(A^*) \cup \sigma(A).$$

例 2 令 $\mathcal{H} = l^2$. S_l 和 S_r 分别表示 $\mathcal{H}$ 上的左移及右移算子, 即对任意 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \mathcal{H}$, 定义

$$S_l x = (x_2, x_3, x_4, \dots), \quad S_r x = (0, x_1, x_2, \dots),$$

则易知

$$\sigma(S_l) = \sigma(S_r) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}.$$

再令

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_r & I - S_r S_l \\ 0 & -S_l \end{pmatrix},$$

经简单计算, 有 $0 \in \sigma_{r,1}(A) \subset -\sigma(A^*) \cup \sigma(A)$, 且 $\operatorname{Re} 0 = 0$.

另一方面, 易证得 H 既是单射又是满射, 即 $0 \in \rho(H)$. 从而,

$$\sigma(H) \neq -\sigma(A^*) \cup \sigma(A).$$

这说明定理 7 的逆否定理成立, 即验证了定理 7 的有效性.

参考文献

- 1 Tretter C. Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. London: Imperial College Press, 2008
- 2 Du H K, Pan J. Perturbation of spectrum of 2×2 operator matrices. Proc Amer Math Soc, 1994, 121: 761–766
- 3 Han J K, Lee H Y, Lee W Y. Invertible completions of 2×2 upper triangular operator matrices. Proc Amer Math Soc, 2000, 127: 119–123
- 4 Barraa M, Boumazgour M. A note on the spectrum of an upper triangular operator matrices. Proc Amer Math Soc, 2003, 130: 3083–3088
- 5 Houimdi M, Zguitti H. Propriétés spectrales locales d'une matrice carrée desopérateurs. Acta Math Vietnam, 2000, 25: 137–144
- 6 Djordjevic S V, Han Y M. A note on Weyl's theorem for operator matrices. Proc Amer Math Soc, 2002, 129: 2543–2547
- 7 Elbjaoui H, Zerouali E H. Local spectral theory for 2×2 operator matrices. Int J Math Math Sci, 2003, 2003: 2667–2672

- 8 Zerouali E H, Zguitti H. Perturbation of spectra of operator matrices and local spectral theory. *J Math Anal Appl*, 2006, 324: 992–1005
- 9 Wu D Y. The spectrum of infinite dimensional Hamiltonian operators and completeness of the eigenfunction systems. PhD Thesis. Hohhot: Inner Mongolia University, 2008
- 10 Fan X Y. The spectrum of upper triangular infinite dimensional Hamiltonian operators and applications. PhD Thesis. Hohhot: Inner Mongolia University, 2009
- 11 Kato T. *Perturbation Theory for Linear Operators* Classics in Mathematics. Berlin: Springer, 1995
- 12 Taylor A E, Lay D C. *Introduction to Functional Analysis*. 2nd ed. New York: Wiley, 1958
- 13 Alatancang, Hai G J. The essential spectrum for a class of infinite dimensional Hamiltonian operator and its application (in Chinese). *Acta Math Sci Ser A Chin Ed*, 2013, 33: 984–992
- 14 Zhong W X. Method of separation of variables and Hamiltonian system (in Chinese). *Comput Struct Mech Appl*, 1991, 8: 229–240

Spectra of 2×2 upper triangular operator matrices with unbounded entries

ALATANCANG, QINGMEI & WU DeYu

Abstract In this paper, some properties of the spectrum, the approximate point spectrum, the detect spectrum and the essential spectrum of unbounded 2×2 upper triangular operator matrices with diagonal domain in Hilbert space are studied. Moreover, a necessary and sufficient condition under which the spectrum (resp. the approximate point spectrum, the detect spectrum) of operator matrices is equal to the union of the spectrum (resp. the approximate point spectrum, the detect spectrum) of diagonal entries is given. We also obtain a sufficient condition under which the essential spectrum of operator matrices is equal to the union of the essential spectrum of diagonal entries. In the end, the theory is applied to Hamiltonian operator matrix arising in mathematical physics.

Keywords upper triangular operator matrix, approximate point spectrum, detect spectrum, essential spectrum, Hamiltonian operator matrix

MSC(2010) 47A10, 47A25

doi: 10.1360/012015-44