论 文

适宜于展开模糊推理的两类模糊度量空间

王国俊^①, 段景瑶^{①②*}^① 陕西师范大学数学研究所, 西安 710062^② 宝鸡文理学院数学系, 宝鸡 721013

* 通信作者. E-mail: nancy-duan@163.com

收稿日期: 2013-11-13; 接受日期: 2014-02-28

国家自然科学基金 (批准号: 11171200)、中央高校特别支持项目 (批准号: GK201403001)、宝鸡文理学院重点项目 (批准号: ZK14059) 和中央高校教师自由探索项目 (批准号: GK201402006) 资助

摘要 给出了衡量模糊推理鲁棒性的度量应有的结构, 建立了基于左连续三角模的 4 类模糊度量空间, 证明了基于 Lukasiewicz 蕴涵和 Goguen 乘积蕴涵的模糊度量空间是最适宜于展开模糊推理的两类模糊度量空间.

关键词 模糊推理 鲁棒性 正则度量 Goguen 型蕴涵 Lukasiewicz 型蕴涵

1 引言

1.1 正则度量

模糊推理是模糊控制的重要工具. 1973 年, Zadeh^[1] 提出了模糊推理的 CRI(compositional rule of inference) 方法, 此后许多学者陆续提出了若干不同的模糊推理方法, 包括王国俊等^[2] 于 1999 年提出的模糊推理的全蕴涵三 I 算法. 由于在各种模糊推理的过程中, 模糊集的选取大都带有主观性^[3], 所以输入数据往往并不精确, 从而推理的结果难免会有偏差. 我们自然希望在模糊推理系统中, 输入的小偏差不会导致输出的大偏差, 即我们希望这个推理系统具有良好的鲁棒性. 多年来关于模糊推理鲁棒性的研究有很多 (比如文献 [4~11]), 而且至今仍在讨论之中^[12]. 鲁棒性是评价一个推理系统好坏的标准之一. 在讨论模糊推理的鲁棒性时, 测量模糊集之间的偏差程度或扰动大小的指标极为重要. 文献 [4] 提出了模糊集的最大扰动和平均扰动的定义, 并基于此讨论了若干模糊推理系统的扰动性. Cai^[5] 利用集合的 δ -灵敏度, 针对连接词和蕴涵算子讨论了模糊推理的鲁棒性. 文献 [3,6] 提出了连接词的 δ -灵敏度、最大 δ -灵敏度以及平均 δ -灵敏度的概念作为指标, 给出了模糊推理扰动的最佳估计. 文献 [7~9] 又在以上这些概念的基础上, 从不同角度讨论了各种模糊推理系统的鲁棒性. 然而无论是“偏差”、“扰动”或者是“相似程度”都是针对某种度量而言的. 那么采用什么样的度量才是合理的呢? 相似度和度量是两个密不可分的概念, 因为二者之和恒等于 1, 换句话说, 从 1 减去相似度就是度量. 所以我们可以问, 什么样的相似度才是合理的呢? 以文献 [10~12] 为例, 设 $F(X)$ 是论域 X 上的全体模糊集之集, 其中把 2 个模糊集 A 与 B 之间的相似度定义为 $S_R(A, B) = \bigwedge_{x \in X} ((A(x) \rightarrow B(x)) \wedge (B(x) \rightarrow A(x)))$. 这里 $\rightarrow$ 表示 $[0, 1]$ 上的模糊蕴涵. 以此作为讨论

引用格式: 王国俊, 段景瑶. 适宜于展开模糊推理的两类模糊度量空间. 中国科学: 信息科学, 2014, 44: 623–632, doi: 10.1360/N112013-00079

鲁棒性的指标时用到了逻辑连接词 $\rightarrow$, 对研究模糊推理系统的鲁棒性赋予了逻辑意义, 这是其好的一面. 但是这种相似度采用了取下确界的聚合方法, 它只关注 $(A(x) \rightarrow B(x)) \wedge (B(x) \rightarrow A(x))$ 的最小值. 所以这种鲁棒性的指标容易丢失信息. 例如, 设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{10}\}$, A 是 $F(X)$ 中的最大模糊集, 即 $A(x_1) = A(x_2) = \dots = A(x_{10}) = 1$. B 定义为 $B(x_1) = B(x_2) = \dots = B(x_9) = 1, B(x_{10}) = 0$. 这时 A 和 B 在前 9 个点处取值完全相同, 只在最后 1 个点处取值不同, 结果得出 $S(A, B) = 0$, 这显然不大合理. 这是由于没有考虑前 9 个点处取值全都相等这一重要信息而造成的. 再设 C 是 $F(X)$ 中的最小模糊集, 即 $C(x_1) = C(x_2) = \dots = C(x_{10}) = 0$, 这时 A 和 C 在每一点处的值都不同, 结果也有 $S(A, C) = 0$. A 和 B 只在一个点处不同, 而 A 和 C 在每一个点处的值都不同, 但是结果却一样: $S(A, B) = S(A, C)$. 这个结果显然是不合理的. 为了弥补这一缺陷, 本文引入了正则度量的概念. 设 $\rightarrow$ 是 $[0, 1]$ 上与左连续三角模相伴的 4 类模糊蕴涵算子 (见例 1), $A, B \in F(X)$, 令

$$d(A, B) = 1 - S^*(A, B) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((A(x_i) \rightarrow B(x_i)) \wedge (B(x_i) \rightarrow A(x_i))),$$

则可证明 d 是 $F(X)$ 上的度量 (见本文第 2 节), 我们称其为 $F(X)$ 上的正则度量. 其中 S^* 是 $F(X)$ 上的相似度. 对于前面讨论的例子而言, 易验证 $S^*(A, B) = 0.9, S^*(A, C) = 0$. 因为这时顾及了每一个变元处的值, 未遗失信息, 所以就把 A, B 与 A, C 之间的相似程度明显地区分开了.

1.2 模糊度量空间 $(F(X), d)$ 结构的比较

要在模糊度量空间 $(F(X), d)$ 中讨论 2 个模糊集之间的偏差或讨论对某个输入的扰动, 自然要求这些偏差或扰动是存在的. 确切地说, 如果一个模糊集 A 是度量空间 $(F(X), d)$ 中的孤立点, 即不存在和它能任意接近的其它模糊集, 那么也就无法讨论基于 A 的偏差或对 A 的扰动了. 所以我们自然希望空间 $(F(X), d)$ 中的点都不是孤立点, 或仅仅只有个别的孤立点. 换句话说, 我们希望空间 $(F(X), d)$ 中的点绝大多数都是凝聚点. 本文在仔细分析了 4 种模糊度量空间的结构之后发现, 只有 Lukasiewicz 型和 Goguen 乘积型模糊度量空间最符合上面的要求. 从点集拓扑学的理论知, 孤立点的存在并不影响映射连续性的讨论. 本文将证明, 各种逻辑连接词所对应的映射在上述 4 种模糊度量空间 $(F(X), d)$ 中都是连续的.

本文在第 2 节介绍预备知识, 在第 3 节中研究 4 种模糊度量空间 $(F(X), d)$ 的结构, 并证明其中 Lukasiewicz 型度量空间 $(F(X), d)$ 是最适合于进行模糊推理的空间, 其次是 Goguen 乘积型度量空间. 而在 Gödel 型空间中, 只有正规模糊集才是凝聚点. 在 R_0 型空间中 A 是凝聚点当且仅当 A 或 A' 是正规模糊集, 这里 $A' = 1 - A$. 在第 4 节中证明若干逻辑连接词的连续性. 第 5 节是结论.

2 预备知识

定义 1^[13] 设 L 是完备格. 二元算子 $\otimes: L^2 \rightarrow L$ 被称为是 L 上的一个 T 模, 如果 $\otimes$ 满足交换律、结合律、对每个变量都不减, 且 $\forall x \in L, 1 \otimes x = x$. 设存在另一个二元算子 $\rightarrow: L^2 \rightarrow L$ 使得

$$a \otimes b \leq c \text{ 当且仅当 } a \leq b \rightarrow c, a, b, c \in L,$$

则称 $(\otimes, \rightarrow)$ 为 L 上的伴随对, 并且称 $(L, \otimes, \rightarrow)$ 为剩余格. L 上的 T 模 $\otimes$ 称为是左连续的, 如果对 L 的任意非空子集 B , 以下等式成立:

$$a \otimes \bigvee_{b \in B} b = \bigvee_{b \in B} (a \otimes b).$$

可以证明, 如果 L 上的 T 模 $\otimes$ 是左连续的, 则存在 L 上的二元算子 $\rightarrow: L^2 \rightarrow L$ 使得 $(\otimes, \rightarrow)$ 是一个伴随对. 其中

$$b \rightarrow c = \vee \{a \in L | a \otimes b \leq c\}.$$

以下, 我们称 $\rightarrow$ 为蕴涵算子, 有时也称其为 $\otimes$ 的剩余 (residuum).

例 1 若在 $[0, 1]$ 单位区间上定义

$$(i) a \otimes_L b = (a + b - 1) \vee 0, a \rightarrow_L b = (1 - a + b) \wedge 1.$$

$$(ii) a \otimes_G b = a \wedge b, a \rightarrow_G b = \begin{cases} 1, & a \leq b, \\ b, & a > b. \end{cases}$$

$$(iii) a \otimes_\pi b = ab, a \rightarrow_\pi b = \begin{cases} 1, & a \leq b, \\ \frac{b}{a}, & a > b. \end{cases}$$

$$(iv) a \otimes_0 b = \begin{cases} 0, & a + b \leq 1, \\ a \wedge b, & a + b > 1, \end{cases} a \rightarrow_0 b = \begin{cases} 1, & a \leq b, \\ (1 - a) \vee b, & a > b. \end{cases} \quad \text{则可证 } \otimes_\xi \text{ 是左连续的三角模, 且 } (\otimes_\xi, \rightarrow_\xi) \text{ 是 } [0, 1] \text{ 上的伴随对, 其中 } \xi \in \{L, G, \pi, 0\}. \text{ 如果 } \otimes \text{ 是以上 4 种左连续的 } T \text{ 模, } \rightarrow \text{ 是 } \otimes \text{ 的剩余, 则以下我们称 } (\otimes, \rightarrow) \text{ 是 } L \text{ 上的正则对, 称 } \otimes \text{ 为 } L \text{ 上的正则 } T \text{ 模, 称 } \rightarrow \text{ 为 } L \text{ 上的正则蕴涵.}$$

角模, 且 $(\otimes_\xi, \rightarrow_\xi)$ 是 $[0, 1]$ 上的伴随对, 其中 $\xi \in \{L, G, \pi, 0\}$. 如果 $\otimes$ 是以上 4 种左连续的 T 模, $\rightarrow$ 是 $\otimes$ 的剩余, 则以下我们称 $(\otimes, \rightarrow)$ 是 L 上的正则对, 称 $\otimes$ 为 L 上的正则 T 模, 称 $\rightarrow$ 为 L 上的正则蕴涵.

定义 2^[14] 设 $(L, \otimes, \rightarrow)$ 是剩余格, $\forall a, b \in L$, 规定

$$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a), \quad a, b \in L.$$

以下也用 $S(a, b)$ 记 $a \leftrightarrow b$. 事实上, $S(a, b)$ 是一种特殊的模糊等价算子 E (见文献 [15]). 在文献 [5] 中, $S(a, b)$ 又被记作 $\rho(a, b)$. 但由 $\rho(a, a) = 1$ 知 ρ 不是 L 上的度量. 以下当 $L = [0, 1]$ 时, 我们在 L 上定义二元算子 $h: L^2 \rightarrow L$ 如下:

$$h(a, b) = 1 - S(a, b) = 1 - (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a). \quad (1)$$

以后将看到, 在一定条件下, h 是 L 上的度量.

定义 3 设 X 是一个非空集合, $\rightarrow$ 是 $[0, 1]$ 上的正则蕴涵, $\forall A, B \in F(X)$, 令

$$S_R(A, B) = \bigwedge_{x \in X} ((A(x) \rightarrow B(x)) \wedge (B(x) \rightarrow A(x))),$$

称 $S_R(A, B)$ 为 A, B 的相似度. 因为最终是由取下确界去聚合的, 所以我们把它也称为极小相似度.

极小相似度采用了取下确界的聚合方法, 从一定程度上来说, 它只关注当 x 在整个论域 X 中变化时 $(A(x) \rightarrow B(x)) \wedge (B(x) \rightarrow A(x))$ 的最小值. 所以由本文引言中的例子可见, 用它来衡量 A 与 B 之间的相似度是会丢失重要信息的.

定义 4 设 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $A, B \in F(X)$, $\rightarrow$ 是 $[0, 1]$ 上的正则蕴涵, 令

$$S^*(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((A(x_i) \rightarrow B(x_i)) \wedge (B(x_i) \rightarrow A(x_i))).$$

称 $S^*(A, B)$ 为 A 与 B 的正则相似度.

事实上, 正是由于极小相似度丢失了大量信息, 所以对于任意 2 个模糊集 A, B 而言, 若采用相同的蕴涵算子, 极小相似度不会超过正则相似度.

以下将论域 X 从有限集推广至无限集, 定义 $F(X)$ 上的正则相似度.

定义 5 设 $X = [a, b] \subseteq [0, 1]$, $A, B \in F(X)$, $\rightarrow$ 是 $[0, 1]$ 上的正则蕴涵, 则 $(A(x) \rightarrow B(x)) \wedge (B(x) \rightarrow A(x))$ 是 X 上的可积函数^[16], 令

$$S^*(A, B) = \int_X (A(x) \rightarrow B(x)) \wedge (B(x) \rightarrow A(x)) dx,$$

称 $S^*(A, B)$ 为 A 与 B 之间的正则相似度.

例 2 设 $X = [0, 1]$, $A(x) = 0, B(x) = x^{10}$. 取 $\rightarrow_L$. 则

$$S^*(A, B) = \int_0^1 (0 \rightarrow x^{10}) \wedge (x^{10} \rightarrow 0) dx = \int_0^1 (1 - x^{10}) dx \approx 0.91,$$

即 A 与 B 的正则相似度约为 0.91.

引理 1 设 $(\otimes, \rightarrow)$ 是 L 上的正则对, $L = [0, 1]$, 则 (1) 式中的二元算子

$$h(a, b) = 1 - S(a, b) = 1 - (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$$

是 L 上的度量.

证明 (i) 因为 $a \rightarrow b = 1$ 当且仅当 $a \leq b$, 所以 $h(a, b) = 0$ 当且仅当 $a = b$.

(ii) 显然 $h(a, b) = h(b, a)$.

(iii) 为了证明三角不等式, 只需证明

$$S(a, b) + S(b, c) \leq S(a, c) + 1. \quad (2)$$

首先假设 $\rightarrow$ 是 $\rightarrow_G$. 我们只需考虑 a, b, c 两两不同的情况. 当 $a < b$ 时: 如果 $a < b < c$, 则 $S(a, b) = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) = 1 \wedge (b \rightarrow a) = b \rightarrow a = a$, $S(b, c) = b$, $S(a, c) = a$. 因为 $a + b \leq a + 1$, 所以 (2) 成立; 同理可证当 $a < c < b$ 及 $c < a < b$ 时 (2) 式仍成立. 当 $b < a$ 时, 通过类似的方法可证 (2) 式成立.

其次假设 $\rightarrow$ 是 $\rightarrow_\pi$, 我们只需考虑 $a, b, c \in (0, 1)$ 的情况. $a < b$ 时: 在 c 最大、居中和最小的 3 种不同情况下, 要证明 (2) 式, 只需分别证明以下 3 个不等式成立, 即

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{c} &\leq \frac{a}{c} + 1 \quad (a < b < c), \\ \frac{a}{b} + \frac{c}{b} &\leq \frac{a}{c} + 1 \quad (a < c < b), \\ \frac{a}{b} + \frac{c}{b} &\leq \frac{c}{a} + 1 \quad (c < a < b). \end{aligned}$$

这 3 个不等式按常规方法是容易证明的, 这里不再赘述. 当 $b < a$ 时, 类似可分情况证明 (2) 式成立.

最后, 如果 $\rightarrow$ 是 $\rightarrow_L$ 或者 $\rightarrow_0$, 则 (2) 式的证明可参阅文献 [13].

定理 1 设 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $A, B \in F(X)$, $\rightarrow$ 是 $[0, 1]$ 上的正则蕴涵. 则由下式定义的 $d : F(X)^2 \rightarrow [0, 1]$ 是 $F(X)$ 上的度量.

$$d(A, B) = 1 - S^*(A, B) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (A(x_i) \rightarrow B(x_i)) \wedge (B(x_i) \rightarrow A(x_i)).$$

证明 (i) 显然 $d(A, B)$ 非负. 其次, $A = B$ 当且仅当 $S^*(A, B) = 1$, 即 $A = B$ 当且仅当

$$d(A, B) = 0.$$

(ii) 由 $S^*(A, B)$ 定义的对称性, 立即得 $d(A, B) = d(B, A)$.

(iii) $\forall A_1, A_2, A_3 \in F(X)$ 只需证明三角不等式

$$d(A_1, A_3) \leq d(A_1, A_2) + d(A_2, A_3).$$

由 (2) 式知 $\forall a, b, c \in [0, 1], S(a, c) \geq S(a, b) + S(b, c) - 1$, 故

$$S(A_1(x_i), A_3(x_i)) \geq S(A_1(x_i), A_2(x_i)) + S(A_2(x_i), A_3(x_i)) - 1, i = 1, \dots, n.$$

从而

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(A_1(x_i), A_3(x_i)) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(A_1(x_i), A_2(x_i)) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(A_2(x_i), A_3(x_i)) - 1,$$

即 $S^*(A_1, A_3) \geq S^*(A_1, A_2) + S^*(A_2, A_3) - 1$. 由此即得

$$\begin{aligned} d(A_1, A_3) &= 1 - S^*(A_1, A_3) \leq 1 - (S^*(A_1, A_2) + S^*(A_2, A_3) - 1) \\ &= 1 - S^*(A_1, A_2) + 1 - S^*(A_2, A_3) \\ &= d(A_1, A_2) + d(A_2, A_3). \end{aligned}$$

注 1 (i) 海明距离是定理 1 中的度量 d 的特例. 事实上, 度量 d 的定义中蕴涵取 Lukasiewicz 蕴涵 $\rightarrow_L$ 时, $d(A, B) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - |A(x_i) - B(x_i)|) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |A(x_i) - B(x_i)|$. 此度量即海明距离.

(ii) 设 $X = [0, 1], A, B \in F(X)$. $\rightarrow$ 是 $[0, 1]$ 上的正则蕴涵, 则如下定义的二元算子 $d : F(X)^2 \rightarrow [0, 1]$ 是 $F(X)$ 上的度量.

$$d(A, B) = 1 - S^*(A, B) = 1 - \int_0^1 (A(x) \rightarrow B(x)) \wedge (B(x) \rightarrow A(x)) dx.$$

(iii) 由于篇幅有限, 本文仅对常见的 4 种正则蕴涵做了详细讨论. 事实上, 可以证明, 文献 [17] 中提到的 $G - \lambda - R_0$ 蕴涵, 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, 也可按照定理 1 的方式生成度量. 对于更一般的情况, 我们将于另文讨论.

3 四种模糊度量空间结构的研究与比较

本节对基于正则蕴涵的 4 类模糊度量空间的结构进行分析和比较.

引理 2 设 $a, b \in [0, 1]$, 则

(i) $1 - (a \leftrightarrow_L b) \leq 1 - (a \leftrightarrow_0 b) \leq 1 - (a \leftrightarrow_G b)$;

(ii) $1 - (a \leftrightarrow_L b) \leq 1 - (a \leftrightarrow_\pi b) \leq 1 - (a \leftrightarrow_G b)$.

证明 (i) 首先假设 $a < b$, 则由例 1 知

$$1 - (a \leftrightarrow_L b) = b - a. \quad 1 - (a \leftrightarrow_G b) = 1 - a.$$

又, 这时若 $a \geq 1 - b$, 则 $1 - a \leftrightarrow_0 b = 1 - a$; 若 $a < 1 - b$, 则 $1 - a \leftrightarrow_0 b = b < 1 - a$. 因此 (i) 式成立. 其次假设 $b < a$, 则类似可证 (i) 式成立. 最后, 当 $a = b$ 时, (i) 式显然成立.

(ii) 类似可证, 证明从略.

由引理 2 和定理 1 立即得出以下的命题.

定理 2 设 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, 如果正则蕴涵分别取作 $\rightarrow_L, \rightarrow_G, \rightarrow_\pi, \rightarrow_0$, 定理 1 中的度量 d 分别记作 d_L, d_G, d_π, d_0 , 则 $\forall A, B \in F(X)$ 有

$$d_L(A, B) \leq d_0(A, B) \leq d_G(A, B), d_L(A, B) \leq d_\pi(A, B) \leq d_G(A, B).$$

注 2 (i) 定理 2 的结论当 $X = [0, 1]$ 时仍然成立.

(ii) d_0 和 d_π 是不可比较的. 事实上, 令 $A \equiv 0.5, B \equiv 0.4$, 则容易证明 $d_0(A, B) = 0.5$, 且 $d_\pi(A, B) = 0.2 < d_0(A, B)$. 如果 $A \equiv 0.4, B \equiv 0.1$, 则 $d_0(A, B) = 0.4, d_\pi(A, B) = 0.75 > d_0(A, B)$. 因此 d_0 和 d_π 是不可比较的.

以上 4 种度量都是 $F(X)$ 上的度量. d_G 是最粗的度量, d_L 是最细的度量. d_0 和 d_π 介于前二者之间. 值得注意的是, 它们的结构大不相同. 以下我们就来详细讨论和比较各种度量空间的性质.

引理 3 设 $0 \leq \alpha < 1, \beta \in [0, 1]$, 且 $\beta \neq \alpha$, 则 $S(\alpha, \beta) \leq \alpha$. 这里 $S(\alpha, \beta) = (\alpha \rightarrow_G \beta) \wedge (\beta \rightarrow_G \alpha)$.

证明 若 $\beta > \alpha$, 则由例 1(ii) 知 $S(\alpha, \beta) = (\alpha \rightarrow_G \beta) \wedge (\beta \rightarrow_G \alpha) = 1 \wedge (\beta \rightarrow_G \alpha) = \alpha$; 若 $\beta < \alpha$, 则 $S(\alpha, \beta) = (\alpha \rightarrow_G \beta) \wedge 1 = \beta < \alpha$.

定理 3 设 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, 若 $A \in F(X)$, 则 A 是 $(F(X), d_G)$ 的凝聚点当且仅当 A 是 X 上的正规模糊集.

证明 设 A 是正规模糊集, 则 $\exists x_k \in X$, 使 $A(x_k) = 1$. 任取 $\varepsilon \in (0, 1)$, 令 $B \in F(X), B(x_k) = 1 - \varepsilon, B(x_j) = A(x_j) (j \neq k)$, 则

$$\begin{aligned} S^*(A, B) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((A(x_i) \rightarrow B(x_i)) \wedge (B(x_i) \rightarrow A(x_i))) \\ &= \frac{1}{n} ((A(x_k) \rightarrow B(x_k)) \wedge (B(x_k) \rightarrow A(x_k)) + (n-1)) \\ &= \frac{1}{n} ((1 \rightarrow B(x_k)) \wedge (B(x_k) \rightarrow 1) + (n-1)) \\ &= \frac{n-1}{n} + \frac{B(x_k)}{n} = \frac{n-1}{n} + \frac{1-\varepsilon}{n} \\ &= 1 - \frac{\varepsilon}{n} \geq 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

从而 $d_G(A, B) \leq \varepsilon$, 所以 A 是度量空间 $(F(X), d_G)$ 中的凝聚点.

设 A 不是正规模糊集, 则 $\forall x_i \in X, 0 \leq A(x_i) < 1$. 设 $B \in F(X), B \neq A$. 则有 x_k 使 $B(x_k) \neq A(x_k) = \alpha < 1$. 由引理 3 知这时 $S(B(x_k), A(x_k)) \leq A(x_k) = \alpha$. 所以

$$\begin{aligned} S^*(B, A) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(B(x_i), A(x_i)) \\ &\leq \frac{1}{n} ((n-1) + S(B(x_k), A(x_k))) \\ &\leq \frac{1}{n} (n-1 + \alpha). \end{aligned}$$

从而

$$d_G(B, A) \geq 1 - \frac{1}{n} (n-1 + \alpha) = \frac{1}{n} (1 - \alpha) = \delta > 0,$$

即, A 的 δ -邻域中不含任何异于 A 的模糊集, 所以 A 是 $(F(X), d_G)$ 中的孤立点.

现在讨论 $(F(X), d_0)$ 的结构.

引理 4 设 $0 < \alpha < 1$, $\beta \in [0, 1]$ 且 $\beta \neq \alpha$, 则 $S(\alpha, \beta) \leq \alpha^*$. 这里 $\alpha^* = \alpha \vee (1 - \alpha)$, $S(\alpha, \beta) = (\alpha \rightarrow_0 \beta) \wedge (\beta \rightarrow_0 \alpha)$.

证明 若 $\beta > \alpha$, 则 $S(\alpha, \beta) = (\alpha \rightarrow_0 \beta) \wedge (\beta \rightarrow_0 \alpha) = 1 \wedge (\beta \rightarrow_0 \alpha) = (1 - \beta) \vee \alpha \leq (1 - \alpha) \vee \alpha = \alpha^*$; 若 $\beta < \alpha$, 则 $S(\alpha, \beta) = (\alpha \rightarrow_0 \beta) \wedge 1 = (1 - \alpha) \vee \beta \leq (1 - \alpha) \vee \alpha = \alpha^*$.

定理 4 设 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $A \in F(X)$, 则 A 是 $(F(X), d_0)$ 的凝聚点当且仅当 A 是正规模糊集或 A' 是正规模糊集, 这里 $A' = 1 - A$.

证明 假设 A 不是正规模糊集, 且 A' 也不是正规模糊集. 则 $\forall x_i \in X, 0 < A(x_i) < 1$. 又, $\forall B \neq A$, 则 X 中至少存在一点, 不妨设为 x_1 , 使得 $B(x_1) \neq A(x_1) = \alpha, 0 < \alpha < 1$. 这时由引理 4 知 $S(A(x_1), B(x_1)) \leq \alpha^*$. 从而

$$S^*(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (A(x_i) \leftrightarrow B(x_i)) \leq \frac{1}{n} (\alpha^* + (n-1)),$$

所以

$$d_0(A, B) \geq 1 - \frac{1}{n} (\alpha^* + (n-1)) = \frac{1}{n} (1 - \alpha^*) = \delta > 0,$$

即 A 的 δ -邻域中不含任何异于 A 的模糊集, 所以 A 是 $(F(X), d_0)$ 中的孤立点.

其次设 A 正规, 则用与定理 3 的证明中相同的方法可证 A 是度量空间 $(F(X), d_0)$ 中的凝聚点.

最后设 A' 正规, 则 $\exists x_k \in X, A(x_k) = 0$. 设 $0 < \varepsilon < 1$, 取 $B \in F(X)$, 使 $B(x_k) = \varepsilon, B(x_j) = A(x_j) (j \neq k)$, 则由 $S(B(x_k), A(x_k)) = S(\varepsilon, 0) = \varepsilon \leftrightarrow 0 = 1 - \varepsilon, S(B(x_j), A(x_j)) = 1$ 知 $S^*(B, A) = 1 - \frac{\varepsilon}{n}$. 即, $d_0(B, A) = \frac{\varepsilon}{n} \leq \varepsilon$. 所以 A 是 $(F(X), d_0)$ 中的凝聚点.

现在讨论 $(F(X), d_\pi)$ 的结构.

定理 5 设 $X = \{x_1, \dots, x_n\}, A \in F(X), A \equiv 0$. 则 A 是 $(F(X), d_\pi)$ 中唯一的孤立点.

证明 设 $A(x_i) \equiv 0, i = 1, \dots, n$. 则 $\forall B \in F(X), B \neq A$, 有 $k \in \{1, \dots, n\}$ 使 $B(x_k) > 0$. 这时 $A(x_k) \leftrightarrow B(x_k) = 0 \leftrightarrow B(x_k) = 0$, 所以 $S^*(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (0 \leftrightarrow B(x_i)) \leq \frac{1}{n} ((n-1) + (0 \leftrightarrow B(x_k))) = 1 - \frac{1}{n}$. 即, $d_\pi(A, B) \geq \frac{1}{n}$. 取正数 $\varepsilon < \frac{1}{n}$, 则 A 的 ε -邻域中没有和 A 不同的模糊集, 所以 A 是 $(F(X), d_\pi)$ 中的孤立点.

如果 A 不恒等于 0, 设 $A(x_k) = a > 0$. ε 是任意给定的小正数, 取自然数 $m > \frac{1}{\varepsilon}$, 令 $b = (1 - \frac{1}{m})a$. 取 $B \in F(X)$, 使 $B(x_k) = b, B(x_j) = A(x_j) (j \neq k)$, 则由 $a \leftrightarrow b = \frac{b}{a} = 1 - \frac{1}{m} > 1 - \varepsilon$ 得 $S^*(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (A(x_i) \leftrightarrow B(x_i)) = \frac{1}{n} ((n-1) + (a \leftrightarrow b)) > \frac{n-\varepsilon}{n} = 1 - \frac{\varepsilon}{n}$. 即, $d_\pi(A, B) < \frac{\varepsilon}{n} \leq \varepsilon$. 由 $B \neq A$ 知 A 的 ε -邻域中有和 A 不同的模糊集, 所以 A 是凝聚点.

定理 5 表明, 模糊度量空间 $(F(X), d_\pi)$ 只有一个不常用到的孤立点, 其余各模糊集全都是凝聚点, 所以在模糊度量空间 $(F(X), d_\pi)$ 中讨论偏差、扰动和展开模糊推理以及讨论其鲁棒性等都是无障碍的. 最后, 下面将看到, 对于以上所说的各项研究而言, Lukasiewicz 型模糊度量空间 $(F(X), d_L)$ 是最理想的空间.

定理 6 设 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, 则度量空间 $(F(X), d_L)$ 中没有孤立点.

证明 由注 1 知 $d_L(A, B) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - |A(x_i) - B(x_i)|) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |A(x_i) - B(x_i)|$ 为 $F(X)$ 上的海明距离. 设 $A \in F(X), \varepsilon > 0$, 取 $B \in F(X)$ 使 $|B(x_i) - A(x_i)| < \varepsilon (i = 1, \dots, n)$, 则 $d_L(A, B) < \varepsilon$, 所以 A 是 $(F(X), d_L)$ 中的凝聚点, 从而 $(F(X), d_L)$ 中没有孤立点.

4 逻辑连接词对应映射的连续性

在上一节中我们看到, 有的模糊度量空间中有较多的孤立点, 不宜于讨论模糊推理的鲁棒性, 但这并不影响我们讨论各模糊度量空间中映射的连续性. 本节中我们研究若干常用的逻辑连接词所对应的映射的连续性.

引理 5 设 X 是非空集合, $A, B, C, D \in F(X)$, $(\otimes, \rightarrow)$ 是正则对, $S(a, b) = a \leftrightarrow b, x \in X$, 则以下结论成立:

- (i) $S(A(x) \vee B(x), C(x) \vee D(x)) \geq S(A(x), C(x)) + S(B(x), D(x)) - 1$;
- (ii) $S(A(x) \wedge B(x), C(x) \wedge D(x)) \geq S(A(x), C(x)) + S(B(x), D(x)) - 1$;
- (iii) $S(A(x) \otimes B(x), C(x) \otimes D(x)) \geq S(A(x), C(x)) + S(B(x), D(x)) - 1$;
- (iv) $S(A(x) \rightarrow B(x), C(x) \rightarrow D(x)) \geq S(A(x), C(x)) + S(B(x), D(x)) - 1$.

证明 以 (i), (iii) 为例证明.

(i) 由 (2) 式得

$$\begin{aligned} & S(A(x) \vee B(x), C(x) \vee D(x)) \\ & \geq S(A(x) \vee B(x), A(x) \vee D(x)) + S(A(x) \vee D(x), C(x) \vee D(x)) - 1 \\ & = (A(x) \vee B(x)) \leftrightarrow (A(x) \vee D(x)) + (A(x) \vee D(x)) \leftrightarrow (C(x) \vee D(x)) - 1. \end{aligned}$$

由文献 [13] 知, $\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0, 1], (a_1 \leftrightarrow b_1) \wedge (a_2 \leftrightarrow b_2) \leq ((a_1 \vee a_2) \leftrightarrow (b_1 \vee b_2))$.

所以 $(A(x) \vee B(x)) \leftrightarrow (A(x) \vee D(x)) + (A(x) \vee D(x)) \leftrightarrow (C(x) \vee D(x)) - 1 \geq (A(x) \leftrightarrow A(x)) \wedge (B(x) \leftrightarrow D(x)) + (A(x) \leftrightarrow C(x)) \wedge (D(x) \leftrightarrow D(x)) - 1 = (B(x) \leftrightarrow D(x)) + (A(x) \leftrightarrow C(x)) - 1 = S(B(x), D(x)) + S(A(x), C(x)) - 1$. 这就证明了 (i).

(iii) 由 (2) 式得 $S(A(x) \otimes B(x), C(x) \otimes D(x)) \geq S(A(x) \otimes B(x), A(x) \otimes D(x)) + S(A(x) \otimes D(x), C(x) \otimes D(x)) - 1 = (A(x) \otimes B(x)) \leftrightarrow (A(x) \otimes D(x)) + (A(x) \otimes D(x)) \leftrightarrow (C(x) \otimes D(x)) - 1$.

由文献 [13] 知, $\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0, 1], (a_1 \leftrightarrow b_1) \otimes (a_2 \leftrightarrow b_2) \leq ((a_1 \otimes a_2) \leftrightarrow (b_1 \otimes b_2))$. 所以,

$$\begin{aligned} & (A(x) \otimes B(x)) \leftrightarrow (A(x) \otimes D(x)) + (A(x) \otimes D(x)) \leftrightarrow (C(x) \otimes D(x)) - 1 \\ & \geq (A(x) \leftrightarrow A(x)) \otimes (B(x) \leftrightarrow D(x)) + (A(x) \leftrightarrow C(x)) \otimes (D(x) \leftrightarrow D(x)) - 1 \\ & = (B(x) \leftrightarrow D(x)) + (A(x) \leftrightarrow C(x)) - 1 \\ & = S(B(x), D(x)) + S(A(x), C(x)) - 1. \end{aligned}$$

这就证明了 (iii).

引理 6 设 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $A, B, C, D \in F(X)$, $(\otimes, \rightarrow)$ 是正则对, 则以下结论成立

如果 $S^*(A, C) \geq \delta_1, S^*(B, D) \geq \delta_2$, 那么 $S^*(A \circ B, C \circ D) \geq \delta_1 + \delta_2 - 1$. 其中 $\circ \in \{\vee, \wedge, \otimes, \rightarrow\}$.

证明 因为对于 $\circ$ 取各种连接词时证明都是类似的, 所以我们仅以 $\rightarrow$ 为例证明. 由引理 5(iv) 得

$$\begin{aligned} & S^*(A \rightarrow B, C \rightarrow D) \\ & = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(A(x_i) \rightarrow B(x_i), C(x_i) \rightarrow D(x_i)) \\ & \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S(A(x_i), C(x_i)) + S(B(x_i), D(x_i)) - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(A(x_i), C(x_i)) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(B(x_i), D(x_i)) - 1 \\
&= S^*(A, C) + S^*(B, D) - 1 \geq \delta_1 + \delta_2 - 1.
\end{aligned}$$

所以引理 6 成立.

定理 7 逻辑连接词 $\circ$ 对应的映射关于距离 d 是连续的. 即, 设 $\varepsilon > 0$, 如果 $d(A, C) \leq \varepsilon, d(B, D) \leq \varepsilon$, 则 $d(A \circ B, C \circ D) \leq 2\varepsilon$. 其中, $\circ \in \{\vee, \wedge, \otimes, \rightarrow\}$, $d \in \{d_L, d_G, d_\pi, d_0\}$.

证明 由 $d(A, C) \leq \varepsilon, d(B, D) \leq \varepsilon$, 得

$$S^*(A, C) = 1 - d(A, C) \geq 1 - \varepsilon, S^*(B, D) \geq 1 - \varepsilon.$$

所以由引理 6 得 $S^*(A \circ B, C \circ D) \geq 1 - 2\varepsilon$. 因此 $d(A \circ B, C \circ D) \leq 2\varepsilon$.

5 结束语

在研究模糊推理的鲁棒性时, 必然要涉及偏差、扰动、灵敏度乃至相似度等概念, 如何衡量这些量的大小自然是根本的问题. 本文基于左连续三角模引入了一种合理的度量, 即, 正则度量. 随即又引入了正则蕴涵和正则对的概念. 当正则蕴涵取为 Lukasiewicz 蕴涵时, 正则度量就转化为海明距离. 本文针对 4 种常用的正则对构造出了相应的模糊度量空间, 详细地研究了各个空间中孤立点的分布情况, 证明了不含任何孤立点的 Lukasiewicz 空间是最适宜于展开模糊推理及研究其鲁棒性的空间. 其次是仅含有一个孤立点的 Goguen 乘积空间. 最后本文还证明了与常用的逻辑连接词相应的映射关于上述 4 种空间都是连续的. 那么一般的左连续三角模能否导出适宜于展开模糊推理及研究其鲁棒性的模糊度量空间呢? 针对更广泛的任意三角模研究同类问题, 结果又会如何呢? 另外, 不难证明 $F(X)$ 上的极小相似度被 1 减也能构成 $F(X)$ 上的度量. 那么这两种度量空间在拓扑结构上有何区别与联系? 这些都是值得进一步研究的问题.

参考文献

- 1 Zadeh L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Trans Syst Man Cy B, 1973, 1: 28–44
- 2 Wang G J. The full implication triple I method of fuzzy reasoning. Sci Sin Technol, 1999, 29: 43–53 [王国俊. 模糊推理的全蕴涵三 I 算法. 中国科学 E 辑, 1999, 29: 43–53]
- 3 Li Y M. Analysis of Fuzzy System. Science Press, Beijing, 2005 [李永明. 模糊系统分析. 北京: 科学出版社, 2005]
- 4 Ying M S. Perturbation of fuzzy reasoning. IEEE Trans Fuzzy Syst, 1999, 7: 625–629
- 5 Cai K Y. Robustness of fuzzy reasoning and δ -equalities of fuzzy sets. IEEE Trans Fuzzy Syst, 2001, 9: 738–750
- 6 Li Y M, Li D C, W J J, et al. An approach of measure the robustness of fuzzy reasoning. Int J Intell Syst, 2005, 20: 393–413
- 7 Li Y F, Qin K Y, He X X. Robustness of fuzzy connectives and fuzzy reasoning. Fuzzy Syst, 2013, 225: 93–105
- 8 Dai S S, Pei D W, Wang S M. Perturbation of fuzzy sets and fuzzy reasoning based on normalized Minkowski distances. Fuzzy Syst, 2011, 189: 63–73
- 9 Luo M X, Yao N. Triple I algorithms based on Schweizer-Sklar operators in fuzzy reasoning. Int J Approx Reason, 2013, 54: 640–652
- 10 Jin J H, Li Y M, Li C Q. Robustness of fuzzy reasoning. Fuzzy Syst Math, 2008, 22: 80–91 [金检华, 李永明, 李春泉. 模糊推理系统的鲁棒性. 模糊系统与数学, 2008, 22: 80–91]

- 11 Jin J H, Li Y M, Li C Q. Robustness of fuzzy reasoning via logically equivalence measure. Inform Sci, 2007, 177: 5103–5117
- 12 Dai S S, Pei D W, Guo D H. Robustness analysis of full implication inference method. Int J Approx Reason, 2013, 54: 653–666
- 13 Wang G J. Non-classical Mathematical Logic and Approximate Reasoning. Science Press, Beijing, 2008 [王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理. 北京: 科学出版社, 2008]
- 14 Klement E P, Mesiar R, Pap E. Triangular Norms. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000
- 15 Li Y F, Qin K Y, He X X. Some new approaches to constructing similarity measures. Fuzzy Syst, 2014, 234: 46–60
- 16 Wang G J. A universal theory of measure and integral on valuation spaces with respect to diverse implication operations. Sci Sin Technol, 2001, 1: 42–50 [王国俊. 适用于多种蕴涵算子的赋值空间上的测度与积分理论. 中国科学 E 辑, 2001, 1: 42–50]
- 17 Zhang S, Li C Y, Zhang X F. Regular family of implication operator and its fuzzy reasoning triple I sustaining method. Comput Eng Appl, 2009, 45: 29–31 [张森, 李成允, 张兴芳. 正则蕴涵算子族 $G - \lambda - R_0$ 及其三 I 支持算法. 计算机工程与应用, 2009, 45: 29–31]

Two types of fuzzy metric spaces suitable for fuzzy reasoning

WANG GuoJun¹ & DUAN JingYao^{1,2*}

1 Department of Mathematics and Information Sciences, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China;

2 Department of Mathematics, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721013, China

*E-mail: nancy-duan@163.com

Abstract The metric structures for measure the robustness of fuzzy reasoning are given. Based on the left-continuous triangular norms, four types of fuzzy metric spaces are constructed. Finally, it proved that the fuzzy metric spaces related to Lukasiewicz implication and Goguen implication are more suitable for fuzzy reasoning.

Keywords fuzzy reasoning, robustness, regular metric, Goguen implication, Lukasiewicz implication

WANG GuoJun (1935.11~2013.12). He graduated from Shaanxi Normal University in 1958. At present he is a Professor and Director of Institute of Mathematics of Shaanxi Normal University. Currently he serves as a coeditor-in-chief of the Chinese Journal of Engineering Mathematics as well as an editor of the journals Studies in Logic, Fuzzy Mathematics, and New Mathematics and Natural Computation, etc. His research interests include fuzzy topology, many-valued logic, and quantitative logic.

DUAN JingYao was born in 1983. She is a lecturer of Department of Mathematics of Baoji University of Arts and Sciences. Currently, she is a Ph. D. student at the Department of Mathematics, Shaanxi Normal University, Xi'an, China. Her research interests include fuzzy topology, many-valued logic, and quantitative logic.