复 Hilbert 空间中的 K - 框架和 K -Riesz 基

朱玉灿^{1*}, 舒志彪¹, 肖祥春²

1. 福州大学数学与计算机科学学院, 福州 350116;

2. 厦门理工学院应用数学学院, 厦门 361024

E-mail: zhuyucan@fzu.edu.cn, szb@fzu.edu.cn, xxc570@163.com

收稿日期: 2017-09-05; 接受日期: 2017-11-06; 网络出版日期: 2018-03-27; * 通信作者

福建省自然科学基金 (批准号: 2016J01014)、厦门理工学院高层次人才 (批准号: G2017005) 和河南省高等学校重点科研 (批准号: 17A110015) 资助项目

摘要 复 Hilbert 空间中的 K - 框架是框架的一种推广, 是 Găvruta 在研究算子 K 的原子分解系统时引入的. 本文首先在 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中引入 K -Riesz 基的概念, 给出 $\mathcal{H}$ 中 K -Riesz 基界为 A 和 B 的 K -Riesz 基的两个等价刻画及 K - 框架界为 A 和 B 的 K - 框架的一个特征. 众所周知, $\mathcal{H}$ 中无冗框架与 Riesz 基是等价的, 但是无冗 K - 框架与 K -Riesz 基是不等价的. 接着研究 $\mathcal{H}$ 中无冗 K - 框架与 K -Riesz 基之间的关系. 最后, 考虑 $\mathcal{H}$ 中 K - 框架或 K -Riesz 基的扰动的稳定性. 当 K 为 $\mathcal{H}$ 中的恒等算子时, 这些结果与框架或 Riesz 基的相应结果是一致的.

关键词 框架 K - 框架 无冗 K - 框架 K -Riesz 基

MSC (2010) 主题分类 42C15, 42C99

1 引言

Hilbert 空间中的框架是 Duffin 和 Schacffer^[1] 于 1952 年在研究非调和级数时引入的概念. Hilbert 空间中的框架是标准正交基的一种推广, 但是它的重构表示是不唯一的, 这种冗余性在一些实际问题的应用中非常有用. 框架理论已经在信号和图像诊断^[2]、神经网络^[3] 等许多领域中有着重要的应用. 有关 Hilbert 空间中的框架理论及其应用的介绍参见文献 [4–6].

最近, Găvruta^[7] 在复 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中引入一种称为 K - 框架的推广的框架, 它能够重构有界线性算子 K 的值域中的元素, Feichtinger 和 Werther^[8] 已考虑了 K 为正交投影的特殊情形. Găvruta^[7] 得到了 $\mathcal{H}$ 中的一个 K - 框架等价于 K 的一个原子分解系统, 还得到了 K - 框架的另一个等价的刻画, 即 $\mathcal{H}$ 中的序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K - 框架当且仅当由 (1.5) 定义的合成算子 T 满足 $R(K) \subset R(T)$ (参见文献 [7, 定理 4]), 而 $\mathcal{H}$ 中的序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个框架当且仅当由 (1.5) 定义的合成算子 T 为满的 (参见文献 [5, 定理 5.5.1]), 这两个结论是完全不同的. 由此可见, 研究 Hilbert 空间中的 K - 框

英文引用格式: Zhu Y C, Shu Z B, Xiao X C. K -frames and K -Riesz bases in complex Hilbert spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 609–622, doi: 10.1360/SCM-2017-0594

架和某些特殊的 K - 框架 (如 K -Riesz 框架和 K -Riesz 基等) 的一些性质是非常有意义的. 许多国内外专家学者已经得到了 Hilbert 空间中的 K - 框架、 K -Riesz 框架或 K -Riesz 基的一些重要的性质 (参见文献 [7, 9–15]).

本文将继续研究 Hilbert 空间中的 K - 框架或 K -Riesz 基的一些性质. 首先, 在 $\mathcal{H}$ 中引入 K -Riesz 基的概念, 得到 $\mathcal{H}$ 的 K -Riesz 基界为 A 和 B 的 K -Riesz 基的两个等价刻画 (见定理 3.1 和推论 3.7). 从我们得到的结果可清楚地看到 K -Riesz 基界与合成算子之间的关系 (见定理 3.1), 但是在文献 [7, 定理 4] 中的关于 K - 框架的结果没有给出 K - 框架界的信息. 而 K -Riesz 基界或 K - 框架界在研究 K -框架或 K -Riesz 基的扰动时需要涉及这些.

文献 [5, 引理 5.5.4] 给出了 $\mathcal{H}$ 中的 Riesz 基与框架之间的一个重要的关系, 对 $\mathcal{H}$ 中的 K - 框架是否有类似文献 [5, 引理 5.5.4] 的结论成立? 我们将对 K - 框架讨论这个问题, 得到如下结果:

(1) 若 $R(K) \subset \overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 且由 (1.5) 定义的合成算子 T 满足条件 (3.3), 则 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的 K -框架界为 $A\|K\|^{-2}$ 和 B 的 K - 框架 (见定理 3.2), 但是反过来的结论是不成立的 (见例 3.4).

(2) 若 T 具有闭值域, 则定理 3.2(2) 反过来的结论也成立 (见定理 3.5).

众所周知, Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的无冗框架与 Riesz 基是等价的 (参见文献 [16, 定理 2.8] 或 [5, 定理 6.1.1]), 但是, $\mathcal{H}$ 中的无冗 K - 框架与 K -Riesz 基是不等价的 (见例 3.9). 到底 $\mathcal{H}$ 中的无冗 K - 框架与 K -Riesz 基之间有什么关系呢? 这是一个值得研究的问题. 对这个问题, 我们得到部分结果 (见定理 3.10).

最后, 考虑 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的 K - 框架或 K -Riesz 基的扰动的稳定性. 文献 [15] 给出了一个 K - 框架扰动的结果, 即对给定 $\mathcal{H}$ 中的一个 K - 框架 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, 满足三个参数的扰动条件 (4.1) 的序列 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 $P_{Q(R(K))}K$ - 框架, 其中 $P_{Q(R(K))}$ 是 $\mathcal{H}$ 到 $Q(R(K))$ 上的正交投影, $Q = UT^*$, 而 T 和 U 分别是 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 的合成算子. 在一些应用中, 我们希望得到 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K - 框架, 为此, 我们给出序列 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K - 框架或 K -Riesz 基的两个充分条件 (见定理 4.1 和 4.4).

我们得到在 Hilbert 空间中关于 K - 框架或 K -Riesz 基的结果不是类似于框架或 Riesz 基的相应结果, 但是当 K 为恒等算子时, 这些结果与框架或 Riesz 基的相应结果是一致的.

在本文中, $\mathcal{H}$ 是一个可分的复 Hilbert 空间, 其内积为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, 范数为 $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$, I 是 $\mathcal{H}$ 中的恒等算子. $\mathbb{N}$ 为正整数集, A 和 B 为两个正的常数. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{H}$ 所有有界线性算子的集合. 令 $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 且 $K \neq 0$, 用 $R(K)$ 和 N_K 分别表示算子 K 的值域和核.

定义 1.1 ^[5] 一个序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{H}$ 称为 $\mathcal{H}$ 的框架, 如果存在正数 A 和 B 满足

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (1.1)$$

常数 A 和 B 分别称为框架的下界和上界.

如果不等式 (1.1) 的右边成立, 则称 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 为 $\mathcal{H}$ 的界为 B 的 Bessel 序列.

称 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 为 $\mathcal{H}$ 的无冗框架, 如果去掉序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 中的任一个元素就不是 $\mathcal{H}$ 的框架.

定义 1.2 ^[5] 一个序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{H}$ 称为 $\mathcal{H}$ 的 Riesz 基, 如果 $\mathcal{H} = \overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^\infty$, 且存在正数 A 和 B 满足: 对任意 $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, 有

$$A \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^n a_k f_k \right\|^2 \leq B \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \quad (1.2)$$

成立. 常数 A 和 B 分别称为 Riesz 基的下界和上界.

定义 1.3^[7] 一个序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{H}$ 称为 $\mathcal{H}$ 的 K -框架, 如果存在正数 A 和 B 满足

$$A\|K^*f\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (1.3)$$

常数 A 和 B 分别称为 K -框架的下界和上界.

称 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 为 $\mathcal{H}$ 的无冗 K -框架, 如果去掉序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 中的任一个元素就不是 $\mathcal{H}$ 的 K -框架.

定义 1.4 一个序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{H}$ 称为 $\mathcal{H}$ 的 K -Riesz 基, 如果 $R(K) \subset \overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^\infty$, 且存在正数 A 和 B 满足: 对任意 $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, 有

$$A \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^n a_k f_k \right\|^2 \leq B \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \quad (1.4)$$

成立. 常数 A 和 B 分别称为 K -Riesz 基的下界和上界.

注 1.5 通过直接验证可知, 定义 1.4 与文献 [12, 定义 2.6] 是等价的. 当 K 为 $\mathcal{H}$ 中的恒等算子时, $\mathcal{H}$ 中的 K -框架和 K -Riesz 基分别就是 $\mathcal{H}$ 的框架和 Riesz 基. 下面给出一个例子说明 $\mathcal{H}$ 的 K -Riesz 基不是 $\overline{R(K)}$ 的 Riesz 基.

例 1.6 设 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个标准正交基, 令 $f_n = e_n$, $n \in \mathbb{N}$; 取 $Kf = \sum_{n=2}^\infty \langle f, e_n \rangle e_n$, $f \in \mathcal{H}$. 因为 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个标准正交基, 且 $R(K) \subset \mathcal{H} = \overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^\infty$. 所以, 根据定义 1.4 可知, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -Riesz 基. 由于 $\overline{R(K)} = \overline{\text{span}}\{e_n\}_{n=2}^\infty$, $\overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^\infty = \mathcal{H}$, 则 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 不是 $\overline{R(K)}$ 的 Riesz 基.

由于 $\mathcal{H}$ 中的一个 K -框架 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 也是一个 Bessel 序列, 因此, 我们可以定义有界线性算子 T 如下:

$$T: \ell^2 \rightarrow \mathcal{H}, \quad Ta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n, \quad a = \{a_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^2. \quad (1.5)$$

称 T 为序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 的合成算子. T 的共轭算子 T^* 为

$$T^*: \mathcal{H} \rightarrow \ell^2, \quad T^*f = \{\langle f, f_n \rangle\}_{n=1}^\infty, \quad f \in \mathcal{H}. \quad (1.6)$$

称 T^* 为序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 的分析算子. 序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 的框架算子 $S = TT^*$, 即

$$S: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad Sf = TT^*f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n, \quad f \in \mathcal{H}. \quad (1.7)$$

2 一些引理

为了得到我们的主要结果, 需要下列一些引理.

引理 2.1^[5] 设 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 是两个复 Hilbert 空间, $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ 是具有闭值域的有界线性算子, 则

(1) 存在唯一的有界线性算子 $T^+: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ 满足

$$N_{T^+} = R(T)^\perp, \quad R(T^+) = N_T^\perp, \quad TT^+f = f, \quad f \in R(T). \quad (2.1)$$

称算子 T^+ 为 T 的伪逆算子.

(2) $R(T^*)$ 是 $\mathcal{H}_1$ 的一个闭子空间, 且 $(T^*)^+ = (T^+)^*$.

如果 T 是可逆的有界线性算子, 则 $T^+ = T^{-1}$.

引理 2.2^[7] 序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的 K - 框架当且仅当由 (1.5) 可以定义有界线性算子 T 且 $R(K) \subset R(T)$.

引理 2.3 设 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 是两个复 Hilbert 空间, $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ 是具有闭值域的有界线性算子, 则

$$\|T^+ \|^{-1} \|f\| \leq \|T^* f\| \leq \|T\| \|f\|, \quad f \in R(T). \quad (2.2)$$

证明 由于 T 具有闭值域, 由引理 2.1 知, T 有伪逆算子 T^+ 满足: 对任意 $f \in R(T)$, 有 $TT^+ f = f$, 即 $TT^+ |_{R(T)} = I_{R(T)}$, 其中 $I_{R(T)}$ 是 $R(T)$ 上的恒等算子, 则 $(T^+ |_{R(T)})^* T^* |_{R(T)} = I_{R(T)}^*$. 从而, 对任意 $f \in R(T)$, 有

$$\|f\| = \|(T^+ |_{R(T)})^* T^* |_{R(T)}(f)\| \leq \|T^+\| \|T^* f\|.$$

所以, 对任意 $f \in R(T)$, 有 $\|T^+ \|^{-1} \|f\| \leq \|T^* f\| \leq \|T\| \|f\|$. $\square$

引理 2.4^[5] $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个界为 B 的 Bessel 序列当且仅当由 (1.5) 可定义有界线性算子 T 且 $\|T\| \leq \sqrt{B}$.

引理 2.5 假设由 (1.5) 可定义有界线性算子 T , 则 $\overline{R(T)} = \overline{\text{span}\{f_n\}_{n=1}^\infty}$.

证明 由 (1.5), 有 $\text{span}\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset R(T)$. 所以, $\overline{\text{span}\{f_n\}_{n=1}^\infty} \subset \overline{R(T)}$.

另一方面, 由 (1.5), 有 $R(T) \subset \overline{\text{span}\{f_n\}_{n=1}^\infty}$, 则 $\overline{R(T)} \subset \overline{\text{span}\{f_n\}_{n=1}^\infty}$. 所以, $\overline{R(T)} = \overline{\text{span}\{f_n\}_{n=1}^\infty}$. 证毕. $\square$

引理 2.6^[17] 设 X 是一个复 Banach 空间, $\lambda_1, \lambda_2 \in (-1, 1)$, 有界线性算子 $T: X \rightarrow X$ 满足

$$\|x - Tx\| \leq \lambda_1 \|x\| + \lambda_2 \|Tx\|, \quad x \in X,$$

则 T 是可逆的有界线性算子, 且满足

$$\frac{1 - \lambda_1}{1 + \lambda_2} \|x\| \leq \|Tx\| \leq \frac{1 + \lambda_1}{1 - \lambda_2} \|x\|, \quad x \in X$$

和

$$\frac{1 - \lambda_2}{1 + \lambda_1} \|x\| \leq \|T^{-1}x\| \leq \frac{1 + \lambda_2}{1 - \lambda_1} \|x\|, \quad x \in X.$$

引理 2.7^[18] 设 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 是两个复 Hilbert 空间, $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ 是有界线性算子, 则

- (1) $R(T)^\perp = N_{T^*}$, $R(T^*)^\perp = N_T$, $\overline{R(T)} = N_{T^*}^\perp$, $\overline{R(T^*)} = N_T^\perp$;
- (2) $N_T = N_{T^*T}$, $N_{T^*} = N_{TT^*}$, $\overline{R(T)} = \overline{R(TT^*)}$, $\overline{R(T^*)} = \overline{R(T^*T)}$;
- (3) 如果 4 个子空间 $R(T)$ 、 $R(T^*)$ 、 $R(TT^*)$ 和 $R(T^*T)$ 中有一个是闭的, 则其他 3 个也是闭的.

3 K - 框架与 K -Riesz 基的一些性质

许多国内外的专家和学者已经得到了 $\mathcal{H}$ 中的 K - 框架与 K -Riesz 基的一些重要性质 (参见文献 [7, 9–15]). 在这些性质中, 有的结果与框架的相应结果是一样的, 有的结果与框架的相应结果是完全不同的. 下面给出 $\mathcal{H}$ 中的 K - 框架和 K -Riesz 基的一些其他的性质.

定理 3.1 序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -Riesz 基界为 A 和 B 的 K -Riesz 基当且仅当由 (1.5) 可定义有界线性算子 T 满足 $R(K) \subset R(T)$ 且

$$\sqrt{A}\|a\| \leq \|Ta\| \leq \sqrt{B}\|a\|, \quad a \in \ell^2. \quad (3.1)$$

证明 假设序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -Riesz 基界为 A 和 B 的 K -Riesz 基. 根据 (1.4) 直接验证可得到由 (1.5) 可定义有界线性算子 T 且不等式 (3.1) 成立. 从 (3.1) 直接验证可得到 $R(T)$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个闭子空间 (也可参见定理 3.2(2) 的证明过程), 由定义 1.4 和引理 2.5, 得到

$$R(K) \subset \overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^\infty = \overline{R(T)} = R(T).$$

反之, 设由 (1.5) 可定义有界线性算子 T 且 $R(K) \subset R(T)$, 由引理 2.5 得

$$R(K) \subset R(T) \subset \overline{R(T)} = \overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^\infty.$$

由 (3.1) 和定义 1.4 知, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -Riesz 基界为 A 和 B 的 K -Riesz 基. $\square$

定理 3.2 假设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 Bessel 序列, T 是由 (1.5) 定义的有界线性算子.

(1) 若 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -框架界为 A 和 B 的 K -框架, K 具有闭值域, 则

$$R(K) \subset \overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^\infty,$$

且 T 满足

$$\sqrt{A}\|K^+\|^{-1}\|a\| \leq \|Ta\| \leq \sqrt{B}\|a\|, \quad a \in N_{(K^*T)}^\perp. \quad (3.2)$$

(2) 若 $R(K) \subset \overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^\infty$, 且 T 满足

$$\sqrt{A}\|a\| \leq \|Ta\| \leq \sqrt{B}\|a\|, \quad a \in N_T^\perp, \quad (3.3)$$

则 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -框架界为 $A\|K\|^{-2}$ 和 B 的 K -框架.

证明 (1) 根据引理 2.2 和 2.5 得 $R(K) \subset R(T) \subset \overline{R(T)} = \overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^\infty$.

由引理 2.4, 有 $\|T\| \leq \sqrt{B}$, 从而, 对任意 $a \in \ell^2$, 不等式 (3.2) 的右边成立.

由引理 2.7 得到

$$\overline{T^*(R(K))} = \overline{R(T^*K)} = N_{(T^*K)^*}^\perp = N_{(K^*T)}^\perp. \quad (3.4)$$

根据范数 $\|\cdot\|$ 和 T 的连续性, 由 (3.4), 只需证明对任意 $a \in T^*(R(K))$, 不等式 (3.2) 的左边成立即可.

事实上, 对每个 $a \in T^*(R(K))$, 存在 $f \in R(K)$ 使得 $a = T^*f = \{\langle f, f_n \rangle\}_{n=1}^\infty$. 由引理 2.3 得到

$$\|T^*f\|^4 = |\langle Sf, f \rangle|^2 \leq \|Sf\|^2 \|f\|^2 \leq \|Sf\|^2 \|K^+\|^2 \|K^*f\|^2 \leq \|Sf\|^2 \|K^+\|^2 A^{-1} \|T^*f\|^2,$$

从而, $A\|T^*f\|^2 \leq \|Sf\|^2 \|K^+\|^2$. 所以, 对任意 $a \in T^*(R(K))$, 有

$$A\|a\|^2 = A\|T^*f\|^2 \leq \|Sf\|^2 \|K^+\|^2 = \|K^+\|^2 \|TT^*f\|^2 = \|K^+\|^2 \|Ta\|^2,$$

即对任意 $a \in T^*(R(K))$, 不等式 (3.2) 的左边成立.

(2) 先证明 $R(T)$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个闭子空间.

事实上, 设 $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset R(T)$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g \in \mathcal{H}$, 则 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 中的一个 Cauchy 列且存在一个序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \ell^2$ 使得对每一个 $n \in \mathbb{N}$, 有 $g_n = Tx_n$. 根据 $\ell^2 = N_T^\perp \oplus N_T$, 存在 $y_n \in N_T^\perp$ 和 $z_n \in N_T$ 满足: 对每一个 $n \in \mathbb{N}$, 有 $x_n = y_n + z_n$. 对任意 $n, m \in \mathbb{N}$, 由 (3.3), 有

$$\|y_{n+m} - y_n\| \leq \sqrt{A^{-1}} \|T(y_{n+m} - y_n)\|$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{A^{-1}} \|T(y_{n+m} + z_{n+m}) - T(y_n + z_n)\| \\
&= \sqrt{A^{-1}} \|g_{n+m} - g_n\|,
\end{aligned}$$

由此得到 $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ 是 ℓ^2 中的一个 Cauchy 列, 因此存在 $b \in \ell^2$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. 由 T 的连续性, 得到

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Ty_n = Tb \in R(T),$$

这就证明了 $R(T)$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个闭子空间.

其次, 证明 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K - 框架界为 $A\|K\|^{-2}$ 和 B 的 K - 框架.

事实上, 由于 $R(T)$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个闭子空间, 根据引理 2.5, 有

$$R(K) \subset \overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^\infty = \overline{R(T)} = R(T).$$

从引理 2.2 立即得到 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K - 框架. 下面来确定 K - 框架界.

由引理 2.1 知, 存在 T 的伪逆算子 T^+ 满足

$$N_{T^+} = R(T)^\perp, \quad R(T^+) = N_T^\perp, \quad TT^+f = f, \quad f \in R(T). \quad (3.5)$$

根据 $\mathcal{H} = R(T) \oplus R(T)^\perp$, 对每个 $f \in \mathcal{H}$, 存在 $g \in R(T)$ 和 $h \in R(T)^\perp = N_{T^+}$ 使得 $f = g + h$, 则

$$g = TT^+g = TT^+g + TT^+h = TT^+f. \quad (3.6)$$

根据 $R(T^+) = N_T^\perp$, 有 $T^+f \in N_T^\perp$. 从 (3.3) 和 (3.6) 得到

$$\|T^+f\| \leq \sqrt{A^{-1}} \|TT^+f\| = \sqrt{A^{-1}} \|g\| \leq \sqrt{A^{-1}} \sqrt{\|g\|^2 + \|h\|^2} = \sqrt{A^{-1}} \|f\|.$$

从而, $\|T^+\| \leq \sqrt{A^{-1}}$. 由于 $\|K^*g\| \leq \|K^*\| \|g\| = \|K\| \|g\|$ 和 $h \in R(T)^\perp = N_{T^*} \subset R(K)^\perp = N_{K^*}$, $g \in R(T)$, 因此, 由引理 2.3 得到

$$\begin{aligned}
\|T^*f\| &= \|T^*g + T^*h\| = \|T^*g\| \geq \|T^+\|^{-1} \|g\| \geq \sqrt{A} \|g\| \\
&\geq \sqrt{A} \|K\|^{-1} \|K^*g\| = \sqrt{A} \|K\|^{-1} \|K^*g + K^*h\| = \sqrt{A} \|K\|^{-1} \|K^*f\|.
\end{aligned}$$

另一方面, 根据 $\ell^2 = N_T^\perp \oplus N_T$, 对每个 $a \in \ell^2$, 存在 $a_1 \in N_T^\perp$ 和 $a_2 \in N_T$ 使得 $a = a_1 + a_2$. 由 (3.3) 得到

$$\|Ta\| = \|Ta_1\| \leq \sqrt{B} \|a_1\| \leq \sqrt{B} \sqrt{\|a_1\|^2 + \|a_2\|^2} = \sqrt{B} \|a\|,$$

从而, $\|T\| \leq \sqrt{B}$. 所以, 对每个 $f \in \mathcal{H}$, 有

$$A\|K\|^{-2} \|K^*f\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2 = \|T^*f\|^2 \leq \|T\|^2 \|f\|^2 \leq B\|f\|^2,$$

这就证明了 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K - 框架界为 $A\|K\|^{-2}$ 和 B 的 K - 框架. $\square$

注 3.3 在特殊情形 $K = I$ 时, 由定理 3.1 和 3.2, 可得到关于通常框架或 Riesz 基的经典结果 (参见文献 [5, 定理 3.6.6 和引理 5.5.4], 或者 [6, 定理 7.13 和 8.29]). 定理 3.2(1) 或 3.2(2) 反过来的结论是不成立的. 下面给出一个反例.

例 3.4 设 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个标准正交基, 令

$$f_{2n-1} = e_{2n} - \frac{e_{2n-1}}{2^n}, \quad f_{2n} = e_{2n} + \frac{e_{2n-1}}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

T 是由 (1.5) 定义的有界线性算子.

(1) 由于常数项级数 $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^{2(n-1)}}$ 收敛, 因此, 直接验证级数 $\sum_{n=1}^\infty \frac{e_{2n-1}}{2^{n-1}}$ 在 $\mathcal{H}$ 中也收敛. 对每个 $m \in \mathbb{N}$, 令

$$a_n(m) = \begin{cases} 1, & \text{当 } n = 2k \text{ 且 } 1 \leq k \leq m \text{ 时,} \\ -1, & \text{当 } n = 2k-1 \text{ 且 } 1 \leq k \leq m \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } n > 2m \text{ 时,} \end{cases}$$

则 $a(m) = \{a_n(m)\}_{n=1}^\infty \in \ell^2$ 且

$$f = \sum_{n=1}^\infty \frac{e_{2n-1}}{2^{n-1}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{e_{2n-1}}{2^{n-1}} = \lim_{m \rightarrow \infty} T(a(m)) \in \overline{R(T)}.$$

如果 $f \in R(T)$, 则存在 $b = \{b_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^2$ 使得 $f = Tb$, 即

$$f = \sum_{n=1}^\infty \frac{e_{2n-1}}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^\infty b_n f_n = \sum_{n=1}^\infty (b_{2n} + b_{2n-1})e_{2n} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} (b_{2n} - b_{2n-1})e_{2n-1},$$

从而, 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 有 $b_{2n} + b_{2n-1} = 0$ 和 $b_{2n} - b_{2n-1} = 2$, 因此, $b_{2n} = 1$, $b_{2n-1} = -1$, 这与 $b = \{b_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^2$ 矛盾. 所以, $f \notin R(T)$.

令 $W = \overline{\text{span}}\{f\} = \{\lambda f : \lambda \in \mathbb{C}\}$ 和 $K = P_W$, 其中 P_W 是从 $\mathcal{H}$ 到 W 上的正交投影, 则 $\|K^+\| = \|P_W\| = 1$, $R(K) = W \subset \mathcal{H} = \overline{\text{span}}\{e_n\}_{n=1}^\infty = \overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $R(K) = W \not\subseteq R(T)$. 根据引理 2.2 得到 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 不是 $\mathcal{H}$ 的一个 K - 框架界为 A 和 B 的 K - 框架, 但是将证明对 $0 < A \leq \frac{10}{21}$, 不等式 (3.2) 成立.

事实上, 只需证明, 对 $0 < A \leq \frac{10}{21}$, 不等式 (3.2) 的左边成立即可. 经过一些简单计算, 有

$$\begin{aligned} \langle f, f_{2n} \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^\infty \frac{e_{2k-1}}{2^{k-1}}, e_{2n} + \frac{e_{2n-1}}{2^n} \right\rangle = \frac{2}{4^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \langle f, f_{2n-1} \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^\infty \frac{e_{2k-1}}{2^{k-1}}, e_{2n} - \frac{e_{2n-1}}{2^n} \right\rangle = -\frac{2}{4^n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

令 $b = T^*f = \{\langle f, f_n \rangle\}_{n=1}^\infty$, 则

$$\|b\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\langle f, f_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\langle f, f_{2n} \rangle|^2 + \sum_{n=1}^\infty |\langle f, f_{2n-1} \rangle|^2 = 8 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{16^n} = \frac{8}{15}$$

和

$$\|Tb\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^\infty \langle f, f_n \rangle f_n \right\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^\infty \frac{2}{4^n} f_{2n} - \sum_{n=1}^\infty \frac{2}{4^n} f_{2n-1} \right\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^\infty \frac{4}{8^n} e_{2n-1} \right\|^2 = 16 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{64^n} = \frac{16}{63}.$$

从而, $\|Tb\| = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{21}} \|b\|$. 由于 $N_{(K^*T)}^\perp = \overline{T^*(R(K))} = \{\lambda T^*f : \lambda \in \mathbb{C}\} = \{\lambda b : \lambda \in \mathbb{C}\}$, 对每个 $a \in N_{(K^*T)}^\perp$, 存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $a = \lambda b$, 则对 $0 < A \leq \frac{10}{21}$, 有

$$\|Ta\| = \|\lambda Tb\| = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{21}} |\lambda| \|b\| = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{21}} \|a\| \geq \sqrt{A} \|K^+\|^{-1} \|a\|$$

这就证明了对 $0 < A \leq \frac{10}{21}$, 不等式 (3.2) 的左边成立.

(2) 令 $Kf = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_{2n} \rangle e_{2n}$, $f \in \mathcal{H}$, 则对任意 $f \in \mathcal{H}$, 有 $K^*f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_{2n} \rangle e_{2n}$, 且

$$\begin{aligned} 2\|K^*f\|^2 &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_{2n} \rangle|^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[|\langle f, e_{2n} \rangle|^2 + \frac{1}{4^n} |\langle f, e_{2n-1} \rangle|^2 \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 = 2\|f\|^2, \end{aligned}$$

这就证明了 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K - 框架界为 $A = B = 2$ 的 K - 框架且 $R(K) \subset R(T) \subset \overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

若 $b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in N_T$, 则

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_{2n} + b_{2n-1}) e_{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (b_{2n} - b_{2n-1}) e_{2n-1},$$

从而, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有 $b_{2n} + b_{2n-1} = 0$ 和 $b_{2n} - b_{2n-1} = 0$. 所以, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有 $b_{2n} = b_{2n-1} = 0$. 这就证明 $N_T = \{0\}$ 且 $N_T^\perp = \ell^2$.

假设不等式 (3.3) 的左边成立. 对每个 $m \in \mathbb{N}$, 令 $a(m) = \{a_n(m)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$, 其中

$$a_n(m) = \begin{cases} 1, & \text{当 } n = 2m \text{ 时,} \\ -1, & \text{当 } n = 2m - 1 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } n \neq 2m \text{ 且 } n \neq 2m - 1 \text{ 时,} \end{cases}$$

则对每个 $m \in \mathbb{N}$, 有 $\sqrt{A} \cdot \sqrt{2} \leq \|Ta(m)\| = \frac{2}{2^m}$. 令 $m \rightarrow \infty$, 得到 $A = 0$. 这与 A 是正数矛盾. 所以, 不等式 (3.3) 的左边不成立. 但是有下面定理成立.

定理 3.5 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个界为 B 的 Bessel 序列, T 由 (1.5) 给出的有界线性算子, 则 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K - 框架且 T 具有闭值域当且仅当 $R(K) \subset \overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 且 T 满足

$$\|T^+ \|^{-1} \|a\| \leq \|Ta\| \leq \sqrt{B} \|a\|, \quad a \in N_T^\perp. \quad (3.7)$$

证明 假设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K - 框架且 T 具有闭值域. 根据引理 2.2, 有

$$R(K) \subset R(T) \subset \overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

由于 $R(T)$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个闭子空间, 由引理 2.7 得到 $R(T^*)$ 也是闭的. 根据引理 2.1 和 2.3, 有

$$\|Ta\| = \|(T^*)^* a\| \geq \|(T^*)^+ \|^{-1} \|a\| = \|(T^+)^* \|^{-1} \|a\| = \|T^+ \|^{-1} \|a\|, \quad a \in R(T^*).$$

根据引理 2.4, 有

$$\|Ta\| \leq \|T\| \|a\| \leq \sqrt{B} \|a\|, \quad a \in \ell^2.$$

根据引理 2.7, 有 $R(T^*) = N_T^\perp$. 所以, 不等式 (3.7) 成立.

反之, 从定理 3.2(2) 的证明过程知, T 具有闭值域. 根据定理 3.2(2) 的结论, 得到 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K - 框架界为 $\|T^+ \|^{-2} \|K\|^{-2}$ 和 B 的 K - 框架. $\square$

注 3.6 由定理 3.5 可得到文献 [9] 中的定理 2.12 和文献 [14] 中的定理 3. 当 $K = I$ 时, 由定理 3.5 可得到文献 [5] 中的引理 5.5.4 和文献 [6] 中的定理 8.29 的部分结论. 由文献 [16, 定理 2.8] 或

者 [5, 定理 6.1.1] 可知, 序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 Riesz 基当且仅当 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个框架且 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 ℓ^2 -线性无关的. 根据定理 3.1 知, 当 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -Riesz 基时, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -框架且 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 ℓ^2 -线性无关的. 反之, 如果 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -框架且 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 ℓ^2 -线性无关的, 但是 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 不一定是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -Riesz 基 (见例 3.4). 根据定理 3.1 和 3.5, 有如下的推论成立.

推论 3.7 设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 Bessel 序列, T 是由 (1.5) 定义的有界线性算子, 则 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -Riesz 基当且仅当 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -框架, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 ℓ^2 -线性无关的, 且 T 具有闭值域.

注 3.8 由推论 3.7 可得到文献 [12] 中的定理 3.1. 当 $K = I$ 时, 由推论 3.7 可得到文献 [16] 中的定理 2.8 和文献 [5] 中的定理 6.1.1. 众所周知, 在 Hilbert 空间中, 无冗框架与 Riesz 基是等价的 (参见文献 [16, 定理 2.8] 或者 [5, 定理 6.1.1]). 那么在 Hilbert 空间中, 无冗 K -框架与 K -Riesz 基是否是等价的? 事实上, 答案是否定的. 下面给出例子说明 Hilbert 空间中的无冗 K -框架与 K -Riesz 基是不等价的.

例 3.9 设 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个标准正交基, 取 $Kf = \sum_{n=1}^\infty \langle f, e_{2n} \rangle e_{2n}$, $f \in \mathcal{H}$. 令

$$f_{2n-1} = e_{2n} - \frac{e_{2n-1}}{2^n}, \quad f_{2n} = e_{2n} + \frac{e_{2n-1}}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

从例 3.4 的证明过程可知, 序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -框架界为 $A = B = 2$ 的 K -框架. 对每个 $m \in \mathbb{N}$, 令 $g_{2m-1} = e_{2m} - 2^m e_{2m-1}$, $g_{2m} = e_{2m} + 2^m e_{2m-1}$, 则 $\|K^* g_{2m-1}\| = \|K^* g_{2m}\| = 1$ 且

$$\sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{2m-1\}} |\langle g_{2m-1}, f_n \rangle|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{2m\}} |\langle g_{2m}, f_n \rangle|^2 = 0.$$

由此得到序列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{m\}}$ 不是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -框架. 所以, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个无冗 K -框架.

由例 3.4 证明过程可知, $R(T)$ 不是闭的, 根据推论 3.7 得到 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 不是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -Riesz 基.

定理 3.10 假设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个无冗 K -框架, T 是由 (1.5) 定义的具有闭值域的有界线性算子, 则 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -Riesz 基.

证明 由于 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个无冗 K -框架, 根据引理 2.2 得到 $R(K) \subset R(T)$, 但是对每个 $m \in \mathbb{N}$, 有 $R(K) \not\subset R(T_m)$, 其中 T_m 是如下定义的有界线性算子:

$$T_m: \ell^2 \rightarrow \mathcal{H}, \quad T_m a = \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{m\}} a_n f_n, \quad a = \{a_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^2. \quad (3.8)$$

首先证明序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 ℓ^2 线性无关的. 否则, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $f_m = \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{m\}} b_n f_n$, 其中 $\sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{m\}} |b_n|^2 < +\infty$. 对每个 $a = \{a_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^2$, 有

$$Ta = \sum_{n=1}^\infty a_n f_n = \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{m\}} (a_m b_n + a_n) f_n \in R(T_m),$$

从而, $R(T) \subset R(T_m)$. 由于 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -框架, 根据引理 2.2, 有 $R(K) \subset R(T) \subset R(T_m)$, 这与 $R(K) \not\subset R(T_m)$ 矛盾. 所以, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 ℓ^2 线性无关的.

由于 T 具有闭值域, 根据推论 3.7 知, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -Riesz 基. □

注 3.11 定理 3.10 仅给出 $\mathcal{H}$ 中的 K -Riesz 基的一个充分条件, 但是定理 3.10 反过来的结论是不成立的. 下面给出一个反例.

例 3.12 设 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个标准正交基, 令 $f_n = e_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. 取 $Kf = \sum_{n=1}^\infty \langle f, e_{2n} \rangle e_{2n}$, $f \in \mathcal{H}$, 则 $K^*f = \sum_{n=1}^\infty \langle f, e_{2n} \rangle e_{2n}$, $f \in \mathcal{H}$. 由于 $R(K) = \overline{\text{span}}\{e_{2n}\}_{n=1}^\infty \subset \overline{\text{span}}\{e_{n+1}\}_{n=1}^\infty = \overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 且对任意 $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, 有

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k f_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n a_k e_{k+1} \right\|^2 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2,$$

则 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 中的 K -Riesz 基. 对任意 $f \in \mathcal{H}$, 有

$$\begin{aligned} \|K^*f\|^2 &= \sum_{n=1}^\infty |\langle f, e_{2n} \rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^\infty |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^\infty |\langle f, e_n \rangle|^2 = \|f\|^2, \\ \|K^*f\|^2 &= \sum_{n=1}^\infty |\langle f, e_{2n} \rangle|^2 \leq |\langle f, f_3 \rangle|^2 + \sum_{n=1}^\infty |\langle f, f_{2n} \rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^\infty |\langle f, e_n \rangle|^2 = \|f\|^2. \end{aligned}$$

所以, 序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{f_3\} \cup \{f_{2n}\}_{n=1}^\infty$ 都是 $\mathcal{H}$ 的 K - 框架, 从而, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 不是 $\mathcal{H}$ 的无冗 K - 框架.

4 K - 框架和 K -Riesz 基的稳定性

许多国内外专家学者对 Hilbert 空间中的框架或 Riesz 基的扰动的稳定性进行了研究, 已经取得了一系列重要的研究成果 (参见文献 [19-22]), 这些在框架的具体构造和实际应用问题中尤为重要. 在 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中, 对给定一个 K - 框架 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, 如果序列 $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{H}$ 满足三个参数的扰动的条件 (4.1), 则对一般情形无法得到 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的 K - 框架 (见例 4.6), 但是可以得到 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的 $P_{Q(R(K))}K$ - 框架, 其中 $P_{Q(R(K))}$ 是 $\mathcal{H}$ 到 $Q(R(K))$ 上的正交投影, $Q = UT^*$, 而 T 和 U 分别是 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 的合成算子 (参见文献 [15, 定理 3.13]). 在一些实际问题应用中, 我们希望得到 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 也是 $\mathcal{H}$ 的 K - 框架, 为此, 下面主要给出能够使得 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 也是 $\mathcal{H}$ 的 K - 框架或 K -Riesz 基的两个充分条件.

定理 4.1 假设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -Riesz 基为 A 和 B 的 K -Riesz 基, 且 $0 \leq \mu < \sqrt{A}(1-\lambda)$, $\lambda, \beta \in (-1, 1)$. 如果序列 $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset \overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 满足: 对任意 $c_k \in \mathbb{C}$, $n, k \in \mathbb{N}$, 有

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k (f_k - g_k) \right\| \leq \lambda \left\| \sum_{k=1}^n c_k f_k \right\| + \beta \left\| \sum_{k=1}^n c_k g_k \right\| + \mu \left(\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.1)$$

则 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -Riesz 基, 且 K -Riesz 基界为

$$\frac{[\sqrt{A}(1-\lambda) - \mu]^2}{(1+\beta)^2}, \quad \frac{[\sqrt{B}(1+\lambda) + \mu]^2}{(1-\beta)^2}. \quad (4.2)$$

证明 根据文献 [19, 定理 2] 可知, $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个界为 $\frac{[\sqrt{B}(1+\lambda) + \mu]^2}{(1-\beta)^2}$ 的 Bessel 序列, 由引理 2.4 知, 可定义有界线性算子 U 如下:

$$U: \ell^2 \rightarrow \mathcal{H}, \quad Ua = \sum_{n=1}^\infty a_n g_n, \quad a = \{a_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^2.$$

由 (4.1) 和 (3.1) 得到

$$\|Ta - Ua\| \leq (\lambda + \mu\sqrt{A^{-1}})\|Ta\| + \beta\|Ua\|, \quad a \in \ell^2, \quad (4.3)$$

$$\frac{\sqrt{A}(1-\lambda)-\mu}{1+\beta}\|a\| \leq \|Ua\| \leq \frac{\sqrt{B}(1+\lambda)+\mu}{1-\beta}\|a\|, \quad a \in \ell^2, \quad (4.4)$$

其中 T 是由 (1.5) 给出的有界线性算子.

由 (3.1) 得到 $R(T)$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个闭子空间, 且 $T: \ell^2 \rightarrow R(T)$ 是可逆的有界线性算子. 注意到条件 $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset \overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^\infty$, 根据引理 2.5, 有

$$R(U) \subset \overline{\text{span}}\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset \overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^\infty = \overline{R(T)} = R(T).$$

令 $Q = UT^{-1}: R(T) \rightarrow R(T)$, 则有界线性算子 Q 满足

$$\|f - Qf\| \leq (\lambda + \mu\sqrt{A^{-1}})\|f\| + \beta\|Qf\|, \quad f \in R(T).$$

根据引理 2.6 知, Q 是可逆的有界线性算子, 由定理 3.1 得到

$$R(K) \subset R(T) = Q(R(T)) = U(T^{-1}(R(T))) \subset R(U).$$

根据 (4.4), 再由定理 3.1 得到 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -Riesz 基, 且 K -Riesz 界由 (4.2) 给出. $\square$

推论 4.2 假设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -Riesz 基, 且 $0 \leq \mu < \|T^+\|^{-1}(1-\lambda)$, $\lambda, \beta \in (-1, 1)$, 其中 T 是由 (1.5) 给出的有界线性算子. 如果序列 $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset \overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 满足: 对任意 $c_k \in \mathbb{C}$, $n, k \in \mathbb{N}$, 有

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k(f_k - g_k) \right\| \leq \lambda \left\| \sum_{k=1}^n c_k f_k \right\| + \beta \left\| \sum_{k=1}^n c_k g_k \right\| + \mu \left(\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

则 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -Riesz 基, 且 K -Riesz 基界为

$$\frac{[\|T^+\|^{-1}(1-\lambda) - \mu]^2}{(1+\beta)^2}, \quad \frac{[\|T\|(1+\lambda) + \mu]^2}{(1-\beta)^2}.$$

证明 根据定理 3.1 可知, $R(T)$ 是闭的, 且 $N_T = \{0\}$, $R(K) \subset R(T)$. 由引理 2.2 得到 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -框架. 根据定理 3.5 得到

$$\|T^+\|^{-1}\|a\| \leq \|Ta\| \leq \|T\|\|a\|, \quad a \in N_T^\perp = \ell^2.$$

由定理 3.1 得到序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -Riesz 基界为 $\|T^+\|^{-2}$ 和 $\|T\|^2$ 的 K -Riesz 基. 所以, 由定理 4.1 立即得到推论 4.2 成立. $\square$

注 4.3 根据推论 4.2 可得到文献 [12] 中的定理 4.3, 但是在文献 [12] 中的定理 4.3 的 K -Riesz 基的下界不是 $\frac{[\sqrt{A}(1-\lambda)-\mu]^2}{(1+\beta)^2}$.

定理 4.4 假设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -框架, 且 $0 \leq \mu < \|T^+\|^{-1}(1-\lambda)$, $\lambda, \beta \in (-1, 1)$, 其中 T 是由 (1.5) 给出的具有闭值域的有界线性算子. 如果序列 $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset \overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 满足: 对任意 $c_k \in \mathbb{C}$, $n, k \in \mathbb{N}$, 有

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k(f_k - g_k) \right\| \leq \lambda \left\| \sum_{k=1}^n c_k f_k \right\| + \beta \left\| \sum_{k=1}^n c_k g_k \right\| + \mu \left(\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.5)$$

则 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -框架, 且 K -框架界为

$$\frac{[\|T^+\|^{-1}(1-\lambda) - \mu]^2}{\|K\|^2(1+\beta)^2}, \quad \frac{[\|T\|(1+\lambda) + \mu]^2}{(1-\beta)^2}. \quad (4.6)$$

证明 由于 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K - 框架, 则 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个界为 $\|T\|$ 的 Bessel 序列. 从文献 [19] 中的定理 2 的证明过程中可知, $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个界为 $\frac{\|T\|(1+\lambda)+\mu^2}{(1-\beta)^2}$ 的 Bessel 序列. 根据引理 2.4 和 (4.5), 可定义有界线性算子 $U: \ell^2 \rightarrow \mathcal{H}$, $Ua = \sum_{n=1}^\infty a_n g_n$, $a = \{a_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^2$ 满足

$$\|Ta - Ua\| \leq \lambda\|Ta\| + \beta\|Ua\| + \mu\|a\|, \quad a \in \ell^2. \quad (4.7)$$

由于 $R(T)$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个闭子空间, 由引理 2.1 知, 存在 T 的伪逆算子 T^+ 满足

$$N_{T^+} = R(T)^\perp, \quad R(T^+) = N_T^\perp, \quad TT^+f = f, \quad f \in R(T). \quad (4.8)$$

对每个 $f \in R(T)$, 有 $T^+f \in \ell^2$. 由 (4.7) 和 (4.8) 得到

$$\|f - UT^+f\| \leq \lambda\|f\| + \beta\|UT^+f\| + \mu\|T^+f\| \leq (\lambda + \mu\|T^+\|)\|f\| + \beta\|UT^+f\|.$$

注意到条件 $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset \overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^\infty$, 根据引理 2.5, 有

$$R(U) \subset \overline{\text{span}}\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset \overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^\infty = \overline{R(T)} = R(T). \quad (4.9)$$

令 $Q = UT^+: R(T) \rightarrow R(T)$, 则有界线性算子 Q 满足

$$\|f - Qf\| \leq (\lambda + \mu\|T^+\|)\|f\| + \beta\|Qf\|, \quad f \in R(T).$$

根据引理 2.6 得到 Q 是可逆的有界线性算子, 且 $\|Q^{-1}\| \leq \frac{1+\beta}{1-(\lambda+\mu\|T^+\|)}$. 从而, 对任意 $f \in R(T)$, 有

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \langle QQ^{-1}f, f \rangle = \langle Q^{-1}f, Q^*f \rangle \\ &\leq \|Q^{-1}\| \|f\| \|Q^*f\| = \|Q^{-1}\| \|f\| \|(T^+)^*U^*f\| \\ &\leq \frac{1+\beta}{1-(\lambda+\mu\|T^+\|)} \cdot \|f\| \cdot \|T^+\| \cdot \|U^*f\|. \end{aligned}$$

由此得到, 对任意 $f \in R(T)$, 有 $\|U^*f\| \geq \frac{\|T^+\|^{-1}(1-\lambda)-\mu}{1+\beta}\|f\|$, 注意到 $\|K^*f\| \leq \|K\|\|f\|$, $f \in R(T)$, 立即得到

$$\|U^*f\| \geq \frac{[\|T^+\|^{-1}(1-\lambda)-\mu]}{\|K\|(1+\beta)}\|K^*f\|, \quad f \in R(T).$$

对每个 $g \in \mathcal{H}$, 根据 $\mathcal{H} = R(T) \oplus R(T)^\perp$ 知, 存在 $f \in R(T)$ 和 $h \in R(T)^\perp$ 使得 $g = f + h$. 由引理 2.7 和 (4.9) 有 $h \in R(T)^\perp \subset R(U)^\perp = N_{U^*}$, 从而, $U^*h = 0$, 由此得到

$$\|U^*g\|^2 = \|U^*f + U^*h\|^2 = \|U^*f\|^2 \geq \frac{[\|T^+\|^{-1}(1-\lambda)-\mu]^2}{\|K\|^2(1+\beta)^2}\|K^*f\|^2. \quad (4.10)$$

由于 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K - 框架, 根据引理 2.2, 有 $R(K) \subset R(T)$. 由引理 2.7 得 $h \in R(T)^\perp \subset R(K)^\perp = N_{K^*}$, 从而,

$$K^*f = K^*f + K^*h = K^*g. \quad (4.11)$$

由 (4.10) 和 (4.11) 立即得到 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K - 框架, 且 K - 框架界由 (4.6) 给出. $\square$

注 4.5 当 $K = I$ 时, 定理 4.4 正是文献 [19] 中的定理 2, 也可以得到文献 [5] 中的定理 15.1.1. Hilbert 空间中的 K - 框架的扰动的一些结果参见文献 [15]. 下面给出一个例子说明在定理 4.1 和 4.4 中, 如果条件 $\{g_n\}_{n=1}^\infty \not\subset \overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 不满足, 相应的结论就不成立.

例 4.6 设 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个标准正交基, 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 取 $f_n = e_{n+1}$, 令

$$K(f) = \sum_{n=2}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n, \quad f \in \mathcal{H}.$$

经过一些简单计算可得到 $K^*f = \sum_{n=2}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$, $T^+f = \{\langle f, e_{n+1} \rangle\}_{n=1}^\infty$, $f \in \mathcal{H}$, 且

$$R(K) = R(T) = \overline{\text{span}}\{e_n\}_{n=2}^\infty.$$

从而, $\|T^+\| = 1$, 且

$$\|K^*f\|^2 = \sum_{n=2}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 = \|f\|^2, \quad f \in \mathcal{H}.$$

由此得到 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -框架界为 $A = B = 1$ 的 K -框架.

另一方面, 由于

$$\|Ta\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_{n+1} \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \|a\|^2, \quad a = \{a_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^2,$$

根据定理 3.1 得到 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个 K -Riesz 基界为 $A = B = 1$ 的 K -Riesz 基.

对给定 $0 < \varepsilon < 1$, 令 $\lambda, \beta, \mu \in [0, 1)$ 满足 $\varepsilon - \beta \leq \mu + \lambda < 1$, 对 $n \geq 2$, 取 $g_n = e_{n+1}$, 且 $g_1 = e_2 + \varepsilon e_1$, 则 $0 \leq \mu < \|T^+\|^{-1}(1 - \lambda)$. 对任意 $c_k \in \mathbb{C}$, $n, k \in \mathbb{N}$, 有

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k (f_k - g_k) \right\| = \varepsilon |c_1| \leq (\lambda + \mu + \beta) |c_1| \leq \lambda \left\| \sum_{k=1}^n c_k f_k \right\| + \beta \left\| \sum_{k=1}^n c_k g_k \right\| + \mu \left(\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

取 $g = e_2 - \frac{1}{\varepsilon} e_1$, 则 $\|K^*g\| = 1$ 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle g, g_n \rangle|^2 = |\langle g, g_1 \rangle|^2 = \left| \left\langle e_2 - \frac{1}{\varepsilon} e_1, e_2 + \varepsilon e_1 \right\rangle \right|^2 = 0.$$

由此得到 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 不是 $\mathcal{H}$ 的 K -框架, 从而, $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 也不是 $\mathcal{H}$ 的 K -Riesz 基.

致谢 衷心感谢审稿专家提出的宝贵的修改意见.

参考文献

- 1 Duffin R J, Schaeffer A C. A class of nonharmonic Fourier series. Trans Amer Math Soc, 1952, 72: 341–366
- 2 Candès E J, Donoho D L. New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise $\mathbb{C}^2$ singularities. Comm Pure Appl Math, 2004, 57: 219–266
- 3 Candès E J. Harmonic analysis of neural networks. Appl Comput Harmon Anal, 1999, 6: 197–218
- 4 Casazza P G. The art of frame theory. Taiwanese J Math, 2000, 4: 129–201
- 5 Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. Boston: Birkhäuser, 2003
- 6 Heil C. A Basis Theory Primer, Expanded Edition. Boston: Birkhäuser, 2011
- 7 Găvruta L. Frames for operators. Appl Comput Harmon Anal, 2012, 32: 139–144
- 8 Feichtinger H G, Werther T. Atomic systems for subspaces. In: Proceedings of the 4th International Conference on Sampling Theory and Applications. Orlando, 2001, 163–165
- 9 Asgari M S, Rahimi H. Generalized frames for operators in Hilbert spaces. Infin Dimens Anal Quantum Probab Relat Top, 2014, 17: 1450013
- 10 丁明玲, 朱玉灿, 肖祥春. Hilbert 空间中的 K -框架. 数学学报, 2014, 57: 1089–1100

- 11 Guo X. Canonical dual K -Bessel sequences and dual K -Bessel generators for unitary systems of Hilbert spaces. J Math Anal Appl, 2016, 444: 598–609
- 12 黄永东, 化定丽. Hilbert 空间中的 K -Riesz 框架及其稳定性. 中国科学: 数学, 2017, 47: 383–396
- 13 Ramu G, Johnson P S. Frame operators of K -frames. SeMA J, 2016, 73: 171–181
- 14 Xiang Z Q, Li Y M. Frame sequences and dual frames for operators. Sci Asia, 2016, 42: 222–230
- 15 Xiao X, Zhu Y, Găvruta L. Some properties of K -frames in Hilbert spaces. Results Math, 2013, 63: 1243–1255
- 16 Christensen O. Frames, Riesz bases, and discrete Gabor/wavelet expansions. Bull Amer Math Soc, 2001, 38: 273–292
- 17 Ding J. New perturbation results on pseudo-inverses of linear operators in Banach spaces. Linear Algebra Appl, 2003, 362: 229–235
- 18 Taylor A E, Lay D C. Introduction to Functional Analysis. New York: John Wiley & Sons, 1980
- 19 Cazassa P G, Christensen O. Perturbation of operators and applications to frame theory. J Fourier Anal Appl, 1997, 3: 543–557
- 20 Christensen O. Frame perturbations. Proc Amer Math Soc, 1995, 123: 1217–1220
- 21 Christensen O. A Paley-Wiener theorem for frames. Proc Amer Math Soc, 1995, 123: 2199–2201
- 22 Christensen O. Frames containing a Riesz basis and approximation of the frame coefficients using finite-dimensional methods. J Math Anal Appl, 1996, 199: 256–270

K -frames and K -Riesz bases in complex Hilbert spaces

Yucan Zhu, Zhibiao Shu & Xiangchun Xiao

Abstract The K -frame, which is a generalization of a frame in a complex Hilbert space $\mathcal{H}$, was introduced by Găvruta to study an atomic system. In this paper, we first introduce the concept of a K -Riesz basis for $\mathcal{H}$. We give a characterization of a K -frame for $\mathcal{H}$ with K -frame bounds A and B and two equivalent characterizations of a K -Riesz basis for $\mathcal{H}$ with K -Riesz basis bounds A and B . It is well known that an exact frame is equivalent to a Riesz basis in $\mathcal{H}$. But an exact K -frame is not equivalent to a K -Riesz basis in $\mathcal{H}$. We also study the relation between an exact K -frame and a K -Riesz basis in $\mathcal{H}$. Lastly, we consider the stability of a K -frame or a K -Riesz basis for $\mathcal{H}$ under perturbation. All the obtained results are consistent with those of frames or Riesz bases when K is the identity operator for a complex Hilbert space.

Keywords frame, K -frame, exact K -frame, K -Riesz basis

MSC(2010) 42C15, 42C99

doi: 10.1360/SCM-2017-0594