复单位球上线性分式复合算子的本性正规性

庆贺钟同德教授 80 寿辰

江良英^{①②}, 欧阳才衡^{③*}

① 同济大学数学系, 上海 200092

② 上海金融学院应用数学系, 上海 201209

③ 中国科学院武汉物理与数学研究所, 武汉 430071

E-mail: liangying1231@163.com, ouyang@wipm.ac.cn

收稿日期: 2008-07-23; 接受日期: 2009-02-18; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 10571044) 资助项目

摘要 假设 φ 是单位球 B_N 中有一个边界不动点 e_1 的线性分式自映射, 我们将证明

$$1 - \operatorname{Re} \varphi_1(z) \sim \operatorname{Re}(1 - z_1)$$

在 $\overline{B_N}$ 上 e_1 的一个邻域内成立. 利用这个结果我们对 MacCluer 和 Weir 的猜测给出一个肯定的回答, 并且可以改进他们所得到的有关复合算子在 Hardy 空间 $H^2(B_N)$ 和加权 Bergman 空间 $A_\gamma^2(B_N)$ ($\gamma > -1$) 上的本性正规性的结果. 结合这些结论以及 MacCluer 和 Weir 论文中的相关结论, 我们进一步讨论了由 B_2 中抛物和双曲线性分式自映射诱导的复合算子的本性正规性问题. 其中有些结论表明单复变和多复变存在着很大差异.

关键词 复合算子 本性正规性 Hardy 空间 Bergman 空间

MSC(2000) 主题分类 47B33, 32A35, 32A36

1 引言

在单位圆 D 上, 由线性分式映射诱导的复合算子的许多基本性质已经得到研究 (例如次正规性, 谱, 循环性等; 见文献 [1–4]). 自 Cowen 和 MacCluer^[5] 开始研究多复变中线性分式映射的性质后, 一些结果已经被推广到由单位球 B_N 上线性分式自映射诱导的复合算子情形 (参见文献 [6–8]).

近来, 许多学者开始感兴趣于单变量和多变量情形线性分式复合算子的本性正规性问题. 在 Hardy 空间 $H^2(D)$ 上, 线性分式复合算子的本性正规性已经由 Bourdon 等在文献 [9] 中给出全面的刻画, 这些结果在标准加权 Bergman 空间 $A_\gamma^2(D)$ ($\gamma > -1$) 情形的推广被 MacCluer 和 Weir^[10] 证实. 文献 [11] 讨论了 $H^2(B_N)$ 和 $A_\gamma^2(B_N)$ ($\gamma > -1$) 上线性分式复合算子的本性正规性, 主要考虑的是换位子公式

$$[C_\varphi^*, C_\varphi] = T_g[C_\sigma, C_\varphi]T_h^* + T_gC_\sigma[T_h^*, C_\varphi] + (T_g - T_{g \circ \varphi})C_{\sigma \circ \varphi}T_h^*$$

引用格式: 江良英, 欧阳才衡. 复单位球上线性分式复合算子的本性正规性. 中国科学 A, 2009, 39(8): 953–962
Jiang L Y, Ouyang C H. Essential normality of linear fractional composition operators in the unit ball of $\mathbb{C}^N$. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0055-1

(见第 2 节) 中右边 3 项的紧性问题, 对于上述公式中的右边 3 项, 文献 [11] 证明:

- (a) 当 φ 在球面 ∂B_N 上有一个不动点时, 第 1 项是紧的当且仅当它是零.
- (b) 如果 φ 在 ∂B_N 上有一个不动点, 并且不将 ∂B_N 的其他点映到 ∂B_N 上, 则第 3 项是紧的.
- (c) 对较大一类固定边界点 e_1 的线性分式映射 φ , 如果存在某个常数 $c > 0$,

$$1 - |\varphi(\zeta)|^2 \geq c|e_1 - \varphi(\zeta)|^2 \quad (1.1)$$

对 e_1 附近的所有点 $\zeta \in \partial B_N$ 成立, 则第 2 项是紧的.

在 Hardy 空间 $H^2(B_N)$ 情形, 文献 [11] 对那些满足下面条件的线性分式映射 φ 证明了 (c) 中的结论, 即

$$\frac{1 - |\varphi_1(\zeta)|^2}{(1 - |\varphi(\zeta)|^2)^N} \leq \frac{c_1}{(1 - \operatorname{Re} \zeta_1)^{N-1}} \quad (1.2)$$

对某个常数 $c_1 > 0$ 和 e_1 附近所有的 $\zeta \in \partial B_N$ 成立, 其中 φ_1 和 ζ_1 各自表示 φ 和 ζ 的第一个坐标. 事实上, MacCluer 和 Weir 猜测不等式 (1.2) 在条件 (1.1) 下是自动成立的 (见文献 [11, p. 386]).

本文对这个问题给出肯定的回答. 设 φ 是 B_N 中以 e_1 为边界不动点的线性分式自映射, 我们将在第 3 节证明

$$1 - \operatorname{Re} \varphi_1(z) \sim \operatorname{Re}(1 - z_1) \quad (1.3)$$

在 $\overline{B_N}$ 上 e_1 的一个邻域内成立. 这样不等式 (1.2) 可以从 (1.1) 和 (1.3) 式推出, 同样地, 在标准加权 Bergman 空间 $A_\gamma^2(B_N)$ 情形, 类似 (1.2) 式的条件也可以被去掉. 由此 (c) 中的结论可以得到改进.

由于结论 (c) 的改进, 这时换位子公式中右边 3 项在 $H^2(B_N)$ 和 $A_\gamma^2(B_N)$ ($\gamma > -1$) 上为紧的所有条件都与单位圆情形类似. 第 4 节将利用这些结果讨论抛物和双曲线性分式映射在 $H^2(B_2)$ 或者 $A_\gamma^2(B_2)$ ($\gamma > -1$) 上是否诱导本性正规的复合算子, 并且在研究抛物映射时我们发现其中一些映射诱导的复合算子并不是本性正规的. 然而当 φ 是 D 上的线性分式映射且 $\|\varphi\|_\infty = 1$ 时, 复合算子 C_φ 是本性正规的当且仅当 φ 是一个抛物非自同构 (见文献 [9, 10]). 由此我们可以看到多复变中的本性正规性问题还难以得到完善的回答.

2 预备知识

令 σ 和 ν 分别表示球面 ∂B_N 上的规范化 Lebesgue 球面面积测度和 B_N 上的规范化 Lebesgue 体积测度, 当 $N \geq 1$ 时, Hardy 空间和标准加权 Bergman 空间分别定义为

$$H^2(B_N) = \left\{ f \text{ 在 } B_N \text{ 内全纯} : \|f\|^2 \equiv \sup_{0 < r < 1} \int_{\partial B_N} |f(r\zeta)|^2 d\sigma(\zeta) < \infty \right\}$$

和

$$A_\gamma^2(B_N) = \left\{ f \text{ 在 } B_N \text{ 内全纯} : \|f\|_\gamma^2 \equiv \int_{B_N} |f(z)|^2 w_\gamma(z) d\nu(z) < \infty \right\},$$

其中 $\gamma > -1$,

$$w_\gamma(z) = \frac{\Gamma(N + \gamma + 1)}{\Gamma(N + 1)\Gamma(\gamma + 1)}(1 - |z|^2)^\gamma.$$

当 $N = 1$ 时我们也经常将这些空间记为 $H^2(D)$ 和 $A_\gamma^2(D)$, 详细情况可以参见文献 [2, 12].

假设 $A = (a_{jk})$ 是一个 $N \times N$ 的矩阵, $B = (b_j)$ 和 $C = (c_j)$ 是 N 维列向量, d 是一个复数, $\mathbb{C}^N$ 上的线性分式映射定义为

$$\varphi(z) = \frac{Az + B}{\langle z, C \rangle + d},$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\mathbb{C}^N$ 中通常的 Hermitian 内积. 当映射 φ 定义在单位球 B_N 的一个邻域内并且 $\varphi(B_N) \subset B_N$, 则称映射 φ 为 B_N 的一个线性分式自映射, 并将 B_N 的所有线性分式自映射构成的集合记为 $\text{LFM}(B_N)$.

通常在 $N \geq 2$, 当 φ 是 B_N 的一个自映射时, 对于 B_N 内的解析函数 f , 由 $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$ 所定义的复合算子 C_φ 在 $H^2(B_N)$ 或 $A_\gamma^2(B_N)$ ($\gamma > -1$) 上不一定有界. 然而, Cowen 和 MacCluer^[5] 证明如果 $\varphi \in \text{LFM}(B_N)$ 则 C_φ 一定是有界的. 在文献 [5] 中还得到 C_φ 的伴随算子 $C_\varphi^* = T_g C_\sigma T_h^*$, 其中 $\sigma(z) = \frac{A^*z - C}{\langle z, -B \rangle + d}$ 是线性分式映射 φ 的伴随映射, $g(z) = (\langle z, -B \rangle + \bar{d})^{-r}$, $h(z) = (\langle z, C \rangle + d)^r$. 当 C_φ 作用在 $H^2(B_N)$ 上时, $r = N$, 作用在 $A_\gamma^2(B_N)$ 上时, $r = N + \gamma + 1$, T_g 和 T_h 分别是与 g 和 h 有关的乘积算子. 这些定义可以参见文献 [5].

设

$$m_\varphi = \begin{pmatrix} A & B \\ C^* & d \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad m_\sigma = \begin{pmatrix} A^* & -C \\ -B^* & \bar{d} \end{pmatrix}$$

分别是线性分式映射 φ 和它的伴随 σ 的矩阵表示. 则矩阵 m_φ 和 m_σ 是 Krein 伴随的, 也即 $m_\sigma = m_\varphi^\times = J m_\varphi^* J$, 其中 $J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 和 m_φ^* 是矩阵 m_φ 通常的 Hilbert 伴随. 另外, 两个线性分式映射是相等的当且仅当其中一个的矩阵表示是另一个的矩阵表示的非零常数乘积.

一个 Hilbert 空间算子 T 是本性正规的当且仅当 $[T, T^*] = TT^* - T^*T$ 是紧的. 在文献 [9] 中引入的换位子公式 (the commutator formula)

$$[C_\varphi^*, C_\varphi] = T_g[C_\sigma, C_\varphi]T_h^* + T_g C_\sigma [T_h^*, C_\varphi] + (T_g - T_{g \circ \varphi})C_{\sigma \circ \varphi}T_h^* \quad (2.1)$$

是单复变和多复变有关本性正规性研究的重要工具, 其中 σ, g 和 h 在前面已经定义. 注意到紧算子和正规算子都是平凡本性正规算子. 如果 φ 是 B_N 上的自同构, 则 C_φ 在 $H^2(B_N)$ 和 $A_\gamma^2(B_N)$ ($\gamma > -1$) 上是本性正规的当且仅当 φ 是酉映射 (见文献 [13, 14]), 这样 C_φ 实际上是正规的. 因此本文主要考虑球上的非自同构映射.

以下回顾一些与不动点和线性分式映射有关的结果, 在文献 [7] 中有如下的定理.

定理 A 假设映射 $\varphi \in \text{LFM}(B_N)$ 在 B_N 内无不动点, 则存在唯一一点 $\tau \in \partial B_N$ 使得 $\varphi(\tau) = \tau$ 且 $\langle d\varphi_\tau(\tau), \tau \rangle = \lambda$, 其中 $0 < \lambda \leq 1$.

定理 A 中的唯一点 $\tau \in \partial B_N$ 称为 φ 的 Denjoy-Wolff 点, λ 是 φ 的边界伸缩系数. 有关 Denjoy-Wolff 点和边界伸缩系数的一些性质可以见文献 [15, 16]. 根据定理 A, 单位球的线性分式映射半群可以分成下面三大类: 如果 φ 在 B_N 内有一个不动点则称它为椭圆的; 如果 φ 在 B_N 内没有不动点, 并且 λ 是 φ 在 Denjoy-Wolff 点的边界伸缩系数, 当 $\lambda < 1$ 时称它为双曲的; 而在 $\lambda = 1$ 时称之为抛物的 (参见文献 [17]).

我们通常会将单位球上的问题通过 Cayley 变换 σ_C 转化到 Siegel 半平面

$$H_N = \{(w_1, \dots, w_N) = (w_1, w') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{N-1} : \text{Re } w_1 > |w'|^2\},$$

其中 Cayley 变换 σ_C 定义为

$$\sigma_C(z_1, z') = \left(\frac{1+z_1}{1-z_1}, \frac{z'}{1-z_1} \right), \quad (z_1, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{N-1}.$$

众所周知 σ_C 是从 B_N 到 H_N 上的一个双全纯映射, 它可以扩充为 $\overline{B_N}$ 到 $H_N \cup \partial H_N \cup \{\infty\}$ 上的一个同胚. 另外有

$$\sigma_C^{-1}(w) = \left(\frac{w_1 - 1}{w_1 + 1}, \frac{2w'}{w_1 + 1} \right), \quad w = (w_1, w') \in H_N.$$

最后我们还需要一些记号: 给定两个正的实值函数 $f(z)$ 和 $g(z)$, $f(z) \sim g(z)$ 表示存在两个正的常数 C_1 和 C_2 使得 $C_1 \leq \frac{f(z)}{g(z)} \leq C_2$.

3 线性分式映射的一个估计式

在讨论换位子公式中右边第 2 项的紧性问题时, 实际上是转化为对每一个多重指标 β 分析算子 $[T_{z\beta}^*, C_\varphi]$ 的紧性. MacCluer 和 Weir 在文献 [11] 中证明如果 φ 是 B_2 上固定 e_1 的一个实系数线性分式自映射, 并满足条件 (1.1), 则 $[T_{z\beta}^*, C_\varphi]$ 在 $H^2(B_2)$ 和 $A_\gamma^2(B_2)$ ($\gamma > -1$) 上是紧的. 证明的主要思想是下面的估计 (见文献 [11] 中命题 1): 当 $\varphi \in \text{LFM}(B_2)$ 以实数为系数并满足 $\varphi(e_1) = e_1$, 则 $1 - |\varphi_1(z)|^2 \sim \text{Re}(1 - z_1)$ 对 e_1 附近的 $z \in \overline{B_2}$ 成立. 为了计算方便, 他们只给出 B_2 情形的上述结论, 并指出上面所有结论对任意的 $N \geq 2$ 成立. 事实上, 利用上面估计式的证明方法我们可以得到下面更一般的结论.

命题 3.1 假设 φ 是 B_N 的一个线性分式自映射并满足 $\varphi(e_1) = e_1$. 则

$$1 - \text{Re} \varphi_1(z) \sim \text{Re}(1 - z_1) \quad (3.1)$$

在 $\overline{B_N}$ 上 e_1 的一个邻域内成立.

证明 为简单起见, 我们只对 $N = 2$ 的情形给出证明, 一般情况可以类似推出. 对 B_2 中的线性分式自映射 φ , 我们选择下面的矩阵表示

$$m_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $|c_1|^2 + |c_2|^2 < 1$, $|b_1|^2 + |b_2|^2 < 1$. 因为 $\varphi(e_1) = e_1$, 由文献 [11] 中引理 1 可知 φ 的伴随映射 σ 也满足 $\sigma(e_1) = e_1$, 所以通过计算我们得到 $a_{11} + b_1 = c_1 + 1$, $a_{21} = -b_2$ 和 $a_{12} = c_2$. 因此

$$m_\varphi = \begin{pmatrix} c_1 - b_1 + 1 & c_2 & b_1 \\ -b_2 & a_{22} & b_2 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix}$$

以及

$$\varphi_1(z) = \frac{(c_1 - b_1 + 1)z_1 + c_2 z_2 + b_1}{c_1 z_1 + c_2 z_2 + 1} = 1 + \frac{(1 - z_1)(b_1 - 1)}{c_1 z_1 + c_2 z_2 + 1}.$$

从而

$$1 - \text{Re} \varphi_1(z) = \text{Re} \left[\frac{(1 - z_1)(1 - b_1)}{c_1 z_1 + c_2 z_2 + 1} \right] = \frac{\text{Re}[(1 - z_1)(1 - b_1)(\overline{c_1 z_1 + c_2 z_2 + 1})]}{|c_1 z_1 + c_2 z_2 + 1|^2}.$$

记 $z_1 = x + iy$, $z_2 = \alpha + i\beta$, $c_1 = c_{11} + ic_{12}$, $c_2 = c_{21} + ic_{22}$, $b_1 = b_{11} + ib_{12}$. 可以计算出 $\lambda := D_1 \varphi_1(e_1) = (1 - b_1)/(c_1 + 1)$, 并由单位球上的 Julia-Carathéodory 定理 (参见文献 [12] 或 [2]) 知道 λ 是正的, 这表明

$$(1 - b_{11})c_{12} + (c_{11} + 1)b_{12} = 0 \quad (3.2)$$

和

$$(c_{11} + 1)(1 - b_{11}) - c_{12}b_{12} = \lambda|c_1 + 1|^2.$$

利用 (3.2) 式, 我们得到

$$\begin{aligned} I(x, y, \alpha, \beta) &= \operatorname{Re}[(1 - z_1)(1 - b_1)(\overline{c_1 z_1} + \overline{c_2 z_2} + 1)] \\ &= [c_{11}(1 - b_{11}) - c_{12}b_{12}]x(1 - x) + (1 - b_{11})(1 - x) \\ &\quad + [c_{21}(1 - b_{11}) - c_{22}b_{12}]\alpha(1 - x) - [c_{22}(1 - b_{11}) + c_{21}b_{12}]\beta(1 - x) \\ &\quad - [c_{22}(1 - b_{11}) + c_{21}b_{12}]\alpha y - [c_{21}(1 - b_{11}) - c_{22}b_{12}]\beta y \\ &\quad - [c_{11}(1 - b_{11}) - c_{12}b_{12}]y^2. \end{aligned}$$

令 $a = c_{11}(1 - b_{11}) - c_{12}b_{12}$, $b = c_{21}(1 - b_{11}) - c_{22}b_{12}$ 和 $c = c_{22}(1 - b_{11}) + c_{21}b_{12}$, 则有

$$I(x, y, \alpha, \beta) = ax(1 - x) + (1 - b_{11})(1 - x) + b\alpha(1 - x) - c\beta(1 - x) - c\alpha y - b\beta y - ay^2.$$

因为 $1 - \operatorname{Re} \varphi_1(z) = I(x, y, \alpha, \beta)/|c_1 z_1 + c_2 z_2 + 1|^2$, 并注意到当 $z \rightarrow e_1$ 时 $c_1 z_1 + c_2 z_2 + 1 \rightarrow c_1 + 1 \neq 0$, 所以要证明 (3.1) 式只需要证明

$$I(x, y, \alpha, \beta) \sim (1 - x). \quad (3.3)$$

我们将在 ∂B_2 上 e_1 的一个邻域内证明 (3.3) 式, 并且这个式子可以直接推广到 $\overline{B_2}$ 上 e_1 的一个邻域内.

下面证明存在正的常数 K_1 和 K_2 , 使得当 $z = (z_1, z_2)$ 在 B_2 的边界上充分接近 e_1 时,

$$I(x, y, \alpha, \beta) \leq K_1(1 - x) \text{ 和 } I(x, y, \alpha, \beta) \geq K_2(1 - x)$$

成立. 当 $z_1 = x = t$, $z_2 = \alpha + i\beta$ 且 $\alpha^2 + \beta^2 = 1 - t^2$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} I(t, 0, \alpha, \beta) &= at(1 - t) + (1 - b_{11})(1 - t) + b\alpha(1 - t) - c\beta(1 - t) \\ &= (at + 1 - b_{11} + b\alpha - c\beta)(1 - t). \end{aligned}$$

因为当 $t \rightarrow 1$ 时 α, β 趋于 1 和

$$\lim_{t \rightarrow 1} (at + 1 - b_{11} + b\alpha - c\beta) = a + 1 - b_{11} = \lambda|c_1 + 1|^2 > 0,$$

所以需要证明的不等式分别对适当大的 K_1 和适当小的 K_2 在 e_1 附近的点 $z = (x, \alpha + i\beta) \in \partial B_2$ 成立. 因此只需证明对任意的正数 K_1 和 K_2 , 在 ∂B_2 上 e_1 的一个邻域内 $I(x, y, \alpha, \beta) + K_1 x$ 的最大值和 $I(x, y, \alpha, \beta) + K_2 x$ 的最小值在曲线 $z_1 = t$, $z_2 = \alpha + i\beta$ 且 $\alpha^2 + \beta^2 = 1 - t^2$, $0 \leq t \leq 1$ (也即 $y = 0$) 上达到. 利用 Lagrange 乘数法, 我们知道在限制条件 $x^2 + y^2 + \alpha^2 + \beta^2 = 1$ 下 $I(x, y, \alpha, \beta) + K_1 x$ 的最大值在下面方程组的解处取到,

$$a - 1 + b_{11} + K_1 - 2ax - b\alpha + c\beta = 2sx, \quad (3.4)$$

$$-2ay - c\alpha - b\beta = 2sy, \quad (3.5)$$

$$b(1 - x) - cy = 2s\alpha, \quad (3.6)$$

$$-c(1 - x) - by = 2s\beta. \quad (3.7)$$

首先, 如果 $s = 0$, 由方程 (3.6) 和 (3.7) 可以得到 $(b^2 + c^2)(1 - x) = 0$, 从而 $b^2 + c^2 = 0$ 或者 $1 - x = 0$. 如果 $b^2 + c^2 \neq 0$, 则 $I(x, y, \alpha, \beta) + K_1 x$ 的最大值在 $x = 1$ 时取得, 这样就完成了证明. 否则我们有 $b = c = 0$, 代入方程 (3.5) 得到 $ay = 0$. 而 $y \neq 0$ 必然给出 $a = 0$, 这时将

$a = b = c = 0$ 代入方程 (3.4) 可以推出 $K_1 = 1 - b_{11}$. 可以选择 K_1 使得上式并不成立, 这样方程组在 $y \neq 0$ 时就没有解, 所以 $s = 0$ 时我们证明结论成立.

现在考虑 $s \neq 0$ 的情况, 根据方程 (3.6) 和 (3.7) 可以求出 α 和 β 的解, 将其代入方程 (3.4) 和 (3.5) 得到

$$a - 1 + b_{11} + K_1 - 2ax - \frac{(b^2 + c^2)(1 - x)}{2s} = 2sx \quad (3.8)$$

和 $-2ay + (b^2 + c^2)y/2s = 2sy$. 因此或者 $y = 0$, 或者 $-2a + (b^2 + c^2)/2s = 2s$. 后面的等式表明 s 由最初的系数 b_1, c_1 和 c_2 决定, 并且 (3.8) 变为

$$a - 1 + b_{11} + K_1 - \frac{b^2 + c^2}{2s} = 0.$$

正如前面的证明, 当选择适当的 K_1 时这个方程并不成立, 这样 $I(x, y, \alpha, \beta) + K_1 x$ 的最大值只能在 $y = 0$ 时取得. 类似的理由可以推出在限制条件 $x^2 + y^2 + \alpha^2 + \beta^2 = 1$ 下 $I(x, y, \alpha, \beta) + K_2 x$ 的最小值也只能在 $y = 0$ 时达到. 定理证毕.

4 复合算子的本性正规性

这一节讨论单位球上一些线性分式映射所诱导的复合算子在 $H^2(B_N)$ 和 $A_\gamma^2(B_N)$ ($\gamma > -1$) 上的本性正规性. 本文只考虑映射 φ 是 B_N 上有一个边界不动点 α 的非自同构线性分式映射, 并且 $\|\varphi\|_\infty = 1$ (否则 C_φ 是紧的), 通过一个酉映射的共轭可以假设 $\alpha = e_1$, 这并不改变 C_φ 的本性正规性. 首先我们利用命题 3.1 改进 MacCluer 和 Weir^[11] 在考虑换位子公式 (2.1) 中右边第 2 项的紧性时得到的结论.

设 φ 是 B_N 的一个线性分式自映射, 满足 $\varphi(e_1) = e_1$ 和 $1 - |\varphi(\zeta)|^2 \geq c|e_1 - \varphi(\zeta)|^2$ 对某个常数 $c > 0$ 和 e_1 附近的 $\zeta \in \partial B_N$ 成立. 因为

$$1 - |\varphi|^2 \geq c|e_1 - \varphi|^2 = c(2 - 2\operatorname{Re} \varphi_1 + |\varphi|^2 - 1),$$

从而 $1 - |\varphi|^2 \geq 2c/(1 + c)(1 - \operatorname{Re} \varphi_1)$, 另一方面我们有 $1 - |\varphi_1|^2 \leq 2(1 - \operatorname{Re} \varphi_1)$, 利用这些估计和命题 3.1 可以推出存在某个常数 $c_1 > 0$, 使得

$$\frac{1 - |\varphi_1(\zeta)|^2}{(1 - |\varphi(\zeta)|^2)^N} \leq \frac{c_1}{(1 - \operatorname{Re} \zeta_1)^{N-1}}$$

对 e_1 附近的 $\zeta \in \partial B_N$ 成立. 同样也可以得到

$$\frac{1 - |\varphi_1(z)|^2}{(1 - |\varphi(z)|^2)^{N+\gamma+1}} \leq \frac{c_2}{(1 - \operatorname{Re} z_1)^{N+\gamma}}$$

对某个 $c_2 > 0$ 和 e_1 附近的 $z \in \overline{B_N}$ 成立, 其中 $\gamma > -1$. 从而文献 [11] 中的定理 4 和 5 可以改进为

定理 4.1 假设 φ 是 B_N 的一个线性分式自映射满足 $\varphi(e_1) = e_1$, 并且

$$1 - |\varphi(\zeta)|^2 \geq c|e_1 - \varphi(\zeta)|^2$$

对某个常数 $c > 0$ 和 e_1 附近 $\zeta \in \partial B_N$ 成立. 则对每一个多重指标 β , 算子 $[T_{z,\beta}^*, C_\varphi]$ 在 $H^2(B_N)$ 和 $A_\gamma^2(B_N)$ ($\gamma > -1$) 上是紧的.

对有一个边界不动点的非自同构线性分式映射 φ , 换位子公式 (2.1) 使得复合算子 C_φ 本性正规性问题的研究转化为考虑公式中右边三项的紧性问题. 由文献 [11] 中推论 1 和定理 2 以及本文的定理 4.1, 换位子公式中右边三项的紧性条件已经全部得到证实, 从而单位球中这样一类线性分式复合算子的本性正规性问题从理论上得到完全类似单变量中的结果.

注意到 Bisi 和 Bracci 给出的关于 B_N 上线性分式映射的分类 (见文献 [7] 中定理 3.2), 这为线性分式复合算子的本性正规性研究提供了有利工具. 当映射 φ 在 ∂B_N 上没有不动点时, MacCluer 和 Weir^[11] 已经给出映射 φ 的条件使得 C_φ 在 $H^2(B_N)$ 和 $A_\gamma^2(B_N)$ ($\gamma > -1$) 上不是本性正规的. 如果存在某个 $\zeta \in \partial B_N$, 映射 φ 在 $\partial B_N \cap [\zeta]$ 上只有两个不动点, 其中 $[\zeta] = \{\lambda\zeta : \lambda \in \mathbb{C}\}$, 由文献 [11] 中定理 7 可知 C_φ 不是本性正规的. 下面考虑 B_2 上有一个边界不动点的线性分式自映射, 并假设 e_1 固定, 我们将讨论由这些映射诱导的复合算子是否是本性正规的. 首先给出映射 φ 和伴随映射 σ 之间的一个关系, 它是文献 [9] 中引理 5.1 (a) 和 (b) 在多变量情形的推广.

引理 4.2 假设 φ 有一个不动点 $\alpha \in \partial B_N$, 则 $d_\varphi(\alpha) = 1/d_\sigma(\alpha)$, 其中

$$d_\varphi(\alpha) = \liminf_{z \rightarrow \alpha} \frac{1 - |\varphi(z)|}{1 - |z|}.$$

而且, 如果 φ 并不将 ∂B_N 上的其他点映到 ∂B_N 上, 则 $\varphi \circ \sigma$ 和 $\sigma \circ \varphi$ 都是抛物的 (且以 α 为不动点).

证明 经过一个酉映射的共轭, 我们可以假设 $\alpha = e_1$, 容易证明这并不改变 $d_\varphi(\alpha)$ 的值. 由单位球上的 Julia-Carathéodory 定理, 我们有 $d_\varphi(e_1) = D_1\varphi_1(e_1) > 0$. 因为 φ 的第一个坐标函数 φ_1 可以表示为

$$\varphi_1(z) = \frac{a_{11}z_1 + \cdots + a_{1N}z_N + b_1}{\overline{c_1}z_1 + \cdots + \overline{c_N}z_N + d},$$

则 $\varphi(e_1) = e_1$ 隐含着 $a_{11} + b_1 = \overline{c_1} + d$ 和

$$D_1\varphi_1(e_1) = \frac{a_{11} - \overline{c_1}}{\overline{c_1} + d} = \frac{-b_1 + d}{\overline{c_1} + d}.$$

同样 φ 的伴随映射 σ 的第一个坐标函数 σ_1 是

$$\sigma_1(z) = \frac{\overline{a_{11}}z_1 + \cdots + \overline{a_{1N}}z_N - c_1}{-\overline{b_1}z_1 - \cdots - \overline{b_N}z_N + \overline{d}},$$

这样

$$D_1\sigma_1(e_1) = \frac{\overline{a_{11}} + \overline{b_1}}{-\overline{b_1} + \overline{d}} = \frac{c_1 + \overline{d}}{-\overline{b_1} + \overline{d}} = \frac{1}{D_1\varphi_1(e_1)}.$$

因此我们得到 $d_\sigma(e_1) = D_1\sigma_1(e_1) = 1/D_1\varphi_1(e_1) = 1/d_\varphi(e_1)$.

由文献 [11] 中引理 1 可知 $\varphi(e_1) = e_1 = \sigma(e_1)$, 我们已经证明 $s := d_\varphi(e_1) = 1/d_\sigma(e_1)$, 所以通过计算可得

$$d\varphi_{e_1} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ a & P \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad d\sigma_{e_1} = \begin{pmatrix} 1/s & 0 \\ b & Q \end{pmatrix},$$

其中 $a, b \in \mathbb{C}^{N-1}$ 和 $P, Q \in \mathbb{C}^{(N-1) \times (N-1)}$. 由于 $\varphi \circ \sigma(e_1) = e_1 = \sigma \circ \varphi(e_1)$, 从而 $d(\varphi \circ \sigma)|_{e_1} = d\varphi_{e_1} \times d\sigma_{e_1}$ 和 $d(\sigma \circ \varphi)|_{e_1} = d\sigma_{e_1} \times d\varphi_{e_1}$, 这样便有 $D_1(\varphi \circ \sigma)_1(e_1) = 1 = D_1(\sigma \circ \varphi)_1(e_1)$. 如果 φ 不把 ∂B_N 上的其他点映到 ∂B_N 上, 利用文献 [11] 中引理 1, σ 也不会将 ∂B_N 上的其他点映到球面上. 因此 $\varphi \circ \sigma$ 和 $\sigma \circ \varphi$ 只有一个边界不动点, 并由上面的结论知道它们的边界伸缩系数都为 1, 这表明 $\varphi \circ \sigma$ 和 $\sigma \circ \varphi$ 是以 e_1 为边界不动点的抛物线性分式映射.

假设 $\varphi \in \text{LFM}(B_N)$ 只有一个边界不动点 e_1 和边界伸缩系数为 $\lambda \leq 1$, 由文献 [7] 中定理 3.2 可知 φ 是一个非椭圆的线性分式映射并以 e_1 为 Denjoy-Wolff 点. 则由文献 [17] 中引理 4.1, φ 共轭于 Siegel 半平面 H_N 上一个具有如下形式的自映射 Φ ,

$$\Phi(w_1, w') = \frac{1}{\lambda}(w_1 + \langle w', b \rangle + c, Aw' + d), \quad (w_1, w') \in H_N,$$

其中 $c \in \mathbb{C}$, $b, d \in \mathbb{C}^{N-1}$, $\lambda \operatorname{Re} c \geq |d|^2$, $A \in \mathbb{C}^{(N-1) \times (N-1)}$ 且 $\lambda I - A^* A$ 是一个 Hermitian 半正定的矩阵. 我们将利用这个形式研究 C_φ 的本性正规性, 并对 B_2 上的线性分式映射得到下面的一些结果. 而且我们将看到 B_2 上的抛物线性分式映射不一定诱导本性正规的复合算子, 这与单位圆情形有很大的差异.

定理 4.3 设 φ 是 B_2 的一个抛物线性分式自映射且 $\varphi(e_1) = e_1$. 假定 φ 共轭于 Siegel 半平面 H_2 上的一个映射 $\Phi(w_1, w_2) = (w_1 + bw_2 + c, aw_2 + d)$, $(w_1, w_2) \in H_2$, 其中 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ 满足 $|a| < 1$ 和 $\operatorname{Re} c > |d|^2$. 如果 $(1-a)\bar{b} = 2(\bar{a}-1)d$, 则复合算子 C_φ 在 $H^2(B_2)$ 和 $A_\gamma^2(B_2)$ ($\gamma > -1$) 上是本性正规的. 否则 C_φ 不是本性正规的.

证明 如果 $z = \sigma_C^{-1}(w) \in B_2$, 则对任意的常数 $k > 0$ 有

$$1 - |z|^2 - k|e_1 - z|^2 = \frac{4(\operatorname{Re} w_1 - |w_2|^2)}{|w_1 + 1|^2} - \frac{4k(1 + |w_2|^2)}{|w_1 + 1|^2} = \frac{4[(\operatorname{Re} w_1 - (1+k)|w_2|^2 - k)]}{|w_1 + 1|^2}.$$

特别地, 我们可以得到

$$\begin{aligned} 1 - |\varphi(z)|^2 - k|e_1 - \varphi(z)|^2 &= \frac{4[\operatorname{Re}(w_1 + bw_2 + c) - (1+k)|aw_2 + d|^2 - k]}{|w_1 + bw_2 + c + 1|^2} \\ &= \frac{4\{(1 - |a|^2 - k|a|^2)|w_2|^2 + \operatorname{Re}[(b - 2a\bar{d} - 2ka\bar{d})w_2] + \operatorname{Re} c - |d|^2 - k(1 + |d|^2)\}}{|w_1 + bw_2 + c + 1|^2} \\ &= \frac{4\{(1 - |a|^2 - k|a|^2)|z_2|^2 + \operatorname{Re}[(b - 2a\bar{d} - 2ka\bar{d})z_2(1 - \bar{z}_1)]\}}{|1 + z_1 + bz_2 + (c+1)(1 - z_1)|^2} \\ &\quad + \frac{4(\operatorname{Re} c - |d|^2 - k - k|d|^2)|1 - z_1|^2}{|1 + z_1 + bz_2 + (c+1)(1 - z_1)|^2} \end{aligned}$$

其中 $z = (z_1, z_2) \in \partial B_2$, 在第 2 行我们利用了当 $w = (w_1, w_2) = \sigma_C(z) \in \partial H_2$ 时 $\operatorname{Re} w_1 = |w_2|^2$.

令 $z_1 = x + iy$, $z_2 = \alpha + i\beta$, $A = 1 - |a|^2 - k|a|^2$, $B = \operatorname{Re} c - |d|^2 - k - k|d|^2$, $C = \operatorname{Re}(b - 2a\bar{d} - 2ka\bar{d})$ 和 $D = \operatorname{Im}(b - 2a\bar{d} - 2ka\bar{d})$. 因为 $z \in \partial B_2$ 给出 $|z_2|^2 = 2(1 - \operatorname{Re} z_1) - |1 - z_1|^2$, 所以

$$\begin{aligned} J(x, y, \alpha, \beta) &= (1 - |a|^2 - k|a|^2)|z_2|^2 + \operatorname{Re}[(b - 2a\bar{d} - 2ka\bar{d})z_2(1 - \bar{z}_1)] \\ &\quad + (\operatorname{Re} c - |d|^2 - k - k|d|^2)|1 - z_1|^2 \\ &= 2A(1 - x) + (B - A)[(1 - x)^2 + y^2] \\ &\quad + C\alpha(1 - x) - C\beta y - D\beta(1 - x) - D\alpha y. \end{aligned}$$

当选择 k 满足

$$k < \min \left\{ \frac{1 - |a|^2}{|a|^2}, \frac{\operatorname{Re} c - |d|^2}{1 + |d|^2} \right\},$$

类似于命题 3.1 的证明, 我们可以推出在限制条件 $x^2 + y^2 + \alpha^2 + \beta^2 = 1$ 下 $J(x, y, \alpha, \beta)$ 在 $y = 0$ 时取得最小值. 注意到

$$J(x, 0, \alpha, \beta) = [2A + (B - A)(1 - x) + C\alpha - D\beta](1 - x),$$

和

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [2A + (B - A)(1 - x) + C\alpha - D\beta] = 2A > 0,$$

因此对上述选择的 k , $J(x, y, \alpha, \beta) \geq 0$ 对充分靠近 e_1 的所有点 $z \in \partial B_2$ 成立. 因为当 $z \rightarrow e_1$

时 $|1 + z_1 + bz_2 + (c+1)(1-z_1)| \rightarrow 4$, 所以在 ∂B_2 上 e_1 的一个邻域内有

$$1 - |\varphi(z)|^2 \geq k|e_1 - \varphi(z)|^2. \quad (4.1)$$

从而由定理 4.1 可知对每一个多重指标 β , 算子 $[T_{z^\beta}^*, C_\varphi]$ 在 $H^2(B_2)$ 和 $A_\gamma^2(B_2)$ ($\gamma > -1$) 上是紧的.

下面分别分析换位子公式 (2.1) 中右边 3 项是否为紧的. 因为 $[T_h^*, C_\varphi]$ 的紧性立刻可以从 h 的定义和 $[T_{z^\beta}^*, C_\varphi]$ 的紧性得到 (或者见文献 [11] 中定理 6 的证明), 所以公式 (2.1) 中右边第 2 项是紧的.

注意到当方程 (4.1) 对某个 $k > 0$ 和 e_1 附近的 z 成立时, $|\varphi(z)| = 1$ 隐含 $z = e_1$ (见文献 [11, p. 386]), 这样由文献 [11] 中推论 1 可知算子 $(T_g - T_{g \circ \varphi})C_{\sigma \circ \varphi}T_h^*$ 在 $H^2(B_2)$ 和 $A_\gamma^2(B_2)$ ($\gamma > -1$) 上是紧的. 我们已经证明了公式 (2.1) 中右边第 2 项和第 3 项是紧的, 这时 $[C_\varphi^*, C_\varphi]$ 的紧性就完全依赖于第 1 项是否是紧的. 因为 T_g 和 T_h^* 是可逆的, 算子 $T_g[C_\sigma, C_\varphi]T_h^*$ 是紧的当且仅当 $[C_\sigma, C_\varphi]$ 为紧, 又由文献 [11] 中定理 2 可知 $[C_\sigma, C_\varphi]$ 为紧等价于它是零, 也即 $\sigma \circ \varphi = \varphi \circ \sigma$, 所以第 1 项的紧性就转化为考虑是否有 $\sigma \circ \varphi = \varphi \circ \sigma$ 成立.

由于 $\varphi = \sigma_C^{-1} \circ \Phi \circ \sigma_C$, 我们有 $m_\varphi = m_{\sigma_C^{-1} \circ \Phi \circ \sigma_C} = m_{\sigma_C^{-1}} m_\Phi m_{\sigma_C}$, 并且对伴随映射 σ 有 $m_\sigma = m_\varphi^\times = m_{\sigma_C}^\times m_\Phi^\times m_{\sigma_C^{-1}}^\times$. 显然 $m_{\sigma_C}^\times = J m_{\sigma_C}^* J = m_{\sigma_C}$ 和 $m_{\sigma_C^{-1}}^\times = m_{\sigma_C^{-1}}$, 从而 $m_\sigma = m_{\sigma_C} m_\Phi^\times m_{\sigma_C^{-1}}$. 令 $m_\Psi = m_{\sigma_C} m_{\sigma_C} m_\Phi^\times m_{\sigma_C^{-1}} m_{\sigma_C^{-1}}$, 则 $m_\sigma = m_{\sigma_C^{-1}} m_\Psi m_{\sigma_C}$ 和 $\sigma = \sigma_C^{-1} \circ \Psi \circ \sigma_C$ 成立. 因此 $\varphi \circ \sigma = \sigma \circ \varphi$ 当且仅当 $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$. 通过计算可得

$$\Psi(w_1, w_2) = (w_1 - 2\bar{d}w_2 + \bar{c}, \bar{a}w_2 - \bar{b}/2), \quad (w_1, w_2) \in H_2,$$

这样便有

$$\Phi \circ \Psi(w_1, w_2) = (w_1 + (\bar{a}b - 2\bar{d})w_2 + c + \bar{c} - |b|^2/2, |a|^2w_2 - a\bar{b}/2 + d),$$

和

$$\Psi \circ \Phi(w_1, w_2) = (w_1 + (b - 2a\bar{d})w_2 + c + \bar{c} - 2|d|^2, |a|^2w_2 + \bar{a}d - \bar{b}/2),$$

这时 $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$ 当且仅当 $b(1 - \bar{a}) = 2\bar{d}(a - 1)$. 因此, 如果 $b(1 - \bar{a}) = 2\bar{d}(a - 1)$, 则 C_φ 在 $H^2(B_2)$ 和 $A_\gamma^2(B_2)$ ($\gamma > -1$) 上是本性正规的, 否则 C_φ 不是本性正规的.

定理 4.4 假设 φ 是 B_2 的一个双曲线性分式自映射, 只有一个边界不动点 e_1 , 边界伸缩系数为 λ . 如果 φ 共轭于 H_2 上具有下面形式的自映射 Φ ,

$$\Phi(w_1, w_2) = \frac{1}{\lambda}(w_1 + bw_2 + c, aw_2 + d), \quad (w_1, w_2) \in H_2,$$

其中 $a, d, c, d \in \mathbb{C}$, $|a|^2 < \lambda$ 和 $\lambda \operatorname{Re} c > |d|^2$, 则复合算子 C_φ 在 $H^2(B_2)$ 和 $A_\gamma^2(B_2)$ ($\gamma > -1$) 上不是本性正规的.

证明 因为 $|a|^2 < \lambda$ 和 $\lambda \operatorname{Re} c > |d|^2$, 我们可以用类似命题 3.1 的证明方法推出

$$1 - |\varphi(z)|^2 - k|e_1 - \varphi(z)|^2 = \frac{4[\lambda \operatorname{Re}(w_1 + bw_2 + c) - (1+k)|aw_2 + d|^2 - \lambda^2 k]}{|w_1 + bw_2 + c + \lambda|^2} \geq 0$$

对 e_1 附近的 $z \in \partial B_2$ 和某个 $k > 0$ 成立, 其中 k 满足

$$k < \min \left\{ \frac{\lambda - |a|^2}{|a|^2}, \frac{\lambda \operatorname{Re} c - |d|^2}{\lambda^2 + |d|^2} \right\}.$$

类似于定理 4.3 的证明, 我们得到算子 $T_g C_\sigma [T_h^*, C_\varphi]$ 和 $(T_g - T_{g \circ \varphi})C_{\sigma \circ \varphi}T_h^*$ 在 $H^2(B_2)$ 和 $A_\gamma^2(B_2)$ ($\gamma > -1$) 上是紧的.

下面我们断言 $\varphi \circ \sigma \neq \sigma \circ \varphi$. 因为 φ 只有一个边界不动点 e_1 , 由文献 [11] 中引理 1 可知伴随映射 σ 也固定 e_1 . 另一方面, 由引理 4.2 和 $D_1\varphi_1(e_1) = \lambda < 1$, 我们得到 $D_1\sigma_1(e_1) = 1/\lambda > 1$. 则由文献 [7] 中定理 3.2 我们知道 σ 有一个孤立的不动点 $\alpha \in B_2$. 如果 $\varphi \circ \sigma = \sigma \circ \varphi$, 则 $\sigma \circ \varphi(\alpha) = \varphi \circ \sigma(\alpha) = \varphi(\alpha)$, 也即 $\varphi(\alpha)$ 是 σ 的一个不动点. 又因为 φ 在 B_2 内没有不动点, 这样 $\varphi(\alpha) \neq \alpha$. 所以 σ 在 B_2 内固定两个点 α 和 $\varphi(\alpha)$, 矛盾. 因此由文献 [11] 中定理 2 可得 $[C_\sigma, C_\varphi]$ 不是紧的, 这表明 C_φ 不是本性正规的.

致谢 作者非常感谢审稿专家提出的建议.

参考文献

- 1 Cowen C. Linear fractional composition operators on H^2 . *Integral Equations Operator Theory*, **11**: 151–160 (1988)
- 2 Cowen C, MacCluer B. Composition Operators on Spaces of Analytic Functions. Boca Raton: CRC Press, 1995
- 3 Shapiro J. Composition Operators and Classical Function Theory. New York: Springer-Verlag, 1993
- 4 Bourdon P, Shapiro J. Cyclic phenomena for composition operators. In: Mem Amer Math Soc, 125, No. 596. Providence, RI: Amer Math Soc, 1997
- 5 Cowen C, MacCluer B. Linear fractional maps of the unit ball and their composition operators. *Acta Sci Math (Szeged)*, **66**: 351–376 (2000)
- 6 Bayart F. A class of linear fractional maps of the ball and their composition operators. *Adv Math*, **209**: 649–665 (2007)
- 7 Bisi C, Bracci F. Linear fractional maps of the unit ball: a geometric study. *Adv Math*, **167**: 265–287 (2002)
- 8 Jury M. Norms and spectral radii of linear fractional composition operators on the ball. *J Funct Anal*, **254**: 2387–2400 (2008)
- 9 Bourdon P, Levi D, Narayan S, et al. Which linear fractional composition operators are essentially normal? *J Math Anal Appl*, **280**: 30–53 (2003)
- 10 MacCluer B, Weir R. Essentially normal composition operators on Bergman spaces. *Acta Sci Math (Szeged)*, **70**: 799–817 (2004)
- 11 MacCluer B, Weir R. Linear-fractional composition operators in several variables. *Integral Equations Operator Theory*, **53**: 373–402 (2005)
- 12 Rudin W. Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^N$. New York: Springer-Verlag, 1980
- 13 Bourdon P, MacCluer B. Selfcommutators of automorphic composition operators. *Complex Var Elliptic Equ*, **52**: 85–104 (2007)
- 14 MacCluer B, Pons M. Automorphic composition operators on Hardy and Bergman spaces in the ball. *Houston J Math*, **32**: 1121–1132 (2006)
- 15 Bracci F. On the geometry at the boundary of holomorphic self-maps of the unit ball of $\mathbb{C}^N$. *Complex Var Theory Appl*, **38**: 221–241 (1999)
- 16 MacCluer B. Iterates of holomorphic self-maps of the unit ball in $\mathbb{C}^N$. *Michigan Math J*, **30**: 97–106 (1983)
- 17 Bracci F, Contreras M, Díaz-Madriral S. Classification of semigroups of linear fractional maps in the unit ball. *Adv Math*, **208**: 318–350 (2007)