旋转对称空间中的平均曲率型流

郭芳承¹, 李光汉^{2*}, 吴传喜³

1. 陇东学院数学与统计学院, 庆阳 745000;

2. 武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072;

3. 湖北大学数学与统计学学院, 武汉 430062

E-mail: gfch2006@163.com, ghli@whu.edu.cn, cxwu@hubu.edu.cn

收稿日期: 2015-10-22; 接受日期: 2016-01-13; 网络出版日期: 2016-07-04; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11171096) 和武汉市学术带头人计划 (批准号: Z201051730002) 资助项目

摘要 本文研究了一大类旋转对称空间中星形闭超曲面的平均曲率型流, 在初始超曲面没有任何曲率假设的条件下, 证明了该平均曲率型流的解长时间存在, 并光滑地指数阶收敛到一测地球面. 该结论完全推广了 Guan 和 Li (2015) 关于空间形式的星形闭超曲面平均曲率型流的结果.

关键词 旋转对称空间 星形超曲面 Minkowski 恒等式 平均曲率型流

MSC (2010) 主题分类 53C40, 53C44, 35K55

1 引言

考虑 $\mathbb{N}^{n+1} = [a, b) \times \mathbb{S}^n$, $b > a \geq 0$, 其上具有旋转对称度量 $\bar{g} = d\rho^2 + \phi^2(\rho)dz^2$, 其中 $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$, dz^2 是球面 $\mathbb{S}^n$ 上的标准度量, 且当 $\rho \in (a, b)$ 时, $\phi(\rho) > 0$, $\phi'(\rho) > 0$. 称 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 为旋转对称空间. 如果 $a = 0$, 则取 $\phi(\rho)$ 分别为 $\sin \rho$ 、 ρ 和 $\sinh \rho$ 时, $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 为空间形式, 截面曲率 K 分别为 1、0 和 -1 .

设 M^n 是 n 维紧致流形, 对于空间形式 $\mathbb{N}^{n+1}(K)$ 中的星形闭超曲面 $X: M^n \rightarrow \mathbb{N}^{n+1}(K)$, 最近, Guan 和 Li^[1] 引入了一种新的流, 他们称之为平均曲率型流, 即满足如下发展方程的一簇光滑浸入 $X: M^n \times [0, T) \rightarrow \mathbb{N}^{n+1}(K)$,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X = (n\phi'(\rho) - Hu)\nu, \\ X(\cdot, 0) = M_0, \end{cases}$$

其中 ν 和 H 分别表示发展超曲面 $M_t^n = X(M^n, t)$ 的单位外法向量和平均曲率, u 为其支撑函数, 定义为

$$u = \left\langle \phi(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho}, \nu \right\rangle.$$

他们证明了该流的解长时间存在, 并光滑地指数阶收敛到一测地球面, 在所有解存在的时间区间上, M_t^n 所围区域的体积始终保持不变, M_t^n 的面积单调递减, 即该流是一天然的保体积流. 众所周知,

英文引用格式: Guo F C, Li G H, Wu C X. Mean curvature type flow in rotationally symmetric spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 313–332, doi: 10.1360/N012015-00328

Cebezaz 和 Miquel^[2]、Huisken^[3] 及 McCoy^[4] 的保体积平均曲率流为

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X = (h - H)\nu, \\ X(\cdot, 0) = X_0, \end{cases}$$

其中 h 是发展超曲面上平均曲率的平均, 即 $h = \int_{M_t} H d\mu / \int_{M_t} d\mu$ 或某一曲率函子的积分. 相比之下, 一方面, 平均曲率型流不要求初始超曲面凸, 只要星形就够了; 另一方面, 它的速度项没有出现复杂的积分项, 而是由一些几何意义明确的几何量组成. 此外, 它在三种空间形式中有统一的表达形式和高度一致的结论. 鉴于如上优点, 它可能在解决一些等周问题时会有重要应用 (参见文献 [5]). 特别值得一提的是, Guan 和 Li^[1] 借此证明了高阶平均曲率的 Minkowski 不等式.

Guo 等^[6] 研究了具有垂直 Neumann 边界条件的平均曲率型流解的长时间存在性和收敛性, 研究该流在更一般的几何空间中的性质是一个有意思的问题. 本文将把空间形式中星型闭超曲面的平均曲率型流推广到一大类旋转对称空间 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 中去. 我们将证明: 如果 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 的径向截面曲率非负, 或者其径向截面曲率小于零并满足如下的三个条件, 则该类空间中的星形闭超曲面沿平均曲率型流发展具有长时间存在性, 并光滑地指数阶收敛到一测地球面. 这类空间一方面有着与空间形式相近的几何结构; 另一方面, 它又包含了一大类性质更一般却有重要应用的几何空间, 如 Anti-deSitter-Schwarzschild 流形和 Schwarzschild 流形等在几何物理中有重要应用的空间. 特别是注意到最近旋转对称空间中的逆平均曲率流被广泛研究, 并借此证明了重要的等周型不等式 (参见文献 [7–12]).

我们考虑旋转对称空间 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$, 当径向截面曲率小于零时, 必须满足的三个条件为

$$\begin{aligned} (P_1) \quad & \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)' < 0; \\ (P_2) \quad & \frac{\phi''}{\phi} + \frac{1-\phi'^2}{\phi^2} \geq 0; \\ (P_3) \quad & \left[(n-1)\frac{1-\phi'^2}{\phi^2} - 2\frac{\phi''}{\phi}\right]' \leq 0. \end{aligned}$$

如上条件有明确的几何意义, 例如, 条件 (P_2) 等价于要求 $\mathbb{N}^{n+1}$ 的径向 Ricci 曲率最小, 条件 (P_3) 等价于要求 $\mathbb{N}^{n+1}$ 的数量曲率沿径向方向非增.

例 1.1 空间形式 $(\mathbb{N}^{n+1}(K), \bar{g})$.

在空间形式中,

$$\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)' = \begin{cases} -\frac{1}{\sin^2 \rho}, & \phi = \sin \rho, \\ -\frac{1}{\rho^2}, & \phi = \rho, \\ -\frac{1}{\sinh^2 \rho}, & \phi = \sinh \rho, \end{cases}$$

即在空间形式中条件 (P_1) 满足. 同时, 在三种空间形式中, 都有 $\frac{\phi''}{\phi} + \frac{1-\phi'^2}{\phi^2} = 0$. 此外, 空间形式具有常数量曲率, 故

$$\left[(n-1)\frac{1-\phi'^2}{\phi^2} - 2\frac{\phi''}{\phi}\right]' = 0.$$

这说明, 满足条件 (P_1) – (P_3) 的旋转对称空间是空间形式的一种推广. 事实上, 满足如上条件的旋转对称空间远不止空间形式一种.

例 1.2 (Anti-deSitter-Schwarzschild 流形^[7]) 取 $\mathbb{N}^{n+1} = [s_0, \infty) \times \mathbb{S}^n$, 其中 s_0 是方程 $1+s^2-ms^{1-n}=0$ 的正解, $m > 0$. 其度量定义为

$$\bar{g} = \frac{1}{1+s^2-ms^{1-n}} ds^2 + s^2 dz^2.$$

空间 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 称为 Anti-deSitter-Schwarzschild 流形. 若取参数变换 $\rho = \rho(s)$ 使得 $\frac{d\rho}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2-ms^{1-n}}}$, 则度量变为

$$\bar{g} = d\rho^2 + \phi^2(\rho)dz^2,$$

其中 $\phi(\rho)$ 是 $\rho(s)$ 的反函数, 并满足常微分方程 (ODE)

$$\phi'(\rho) = \sqrt{1 + \phi^2 - m\phi^{1-n}}$$

和渐近展开式

$$\phi(\rho) = \sinh \rho + \frac{m}{2(n+1)} \sinh^{-n} \rho + O(\sinh^{-n-2} \rho).$$

直接计算得 $\mathbb{N}^{n+1}$ 的径向截面曲率为

$$K_{i0} = -\frac{\phi''}{\phi} = -1 - \frac{m(n-2)}{2} \sinh^{-n} \rho + O(\sinh^{-n-2} \rho),$$

球面方向的截面曲率为

$$K_{ij} = \frac{1 - \phi'^2}{\phi^2} = 1 + m \sinh^{-n} \rho + O(\sinh^{-n-2} \rho).$$

从而, 条件 (P_2) 等价于

$$K_{ij} - K_{i0} = \frac{1 - \phi'^2}{\phi^2} + \frac{\phi''}{\phi} = \frac{1}{2} mn \sinh^{-n} \rho + O(\sinh^{-n-2} \rho)$$

是否非负. 显然, 当 ρ 足够大时条件 (P_2) 满足. 这时, 条件 (P_1) 是否成立等价于是否有 $K_{ij} - K_{i0} < \frac{1}{\phi^2}$. 由 $\phi(\rho)$ 的渐近展开式知,

$$\frac{1}{\phi^2} = \sinh^{-2} \rho + O(\sinh^{2-n} \rho),$$

显然, 当 ρ 足够大时条件 (P_1) 也满足. 此外, Anti-deSitter-Schwarzschild 空间是一个具有常数量曲率 $-n(n+1)$ 的渐近双曲空间, 条件 (P_3) 自然满足.

在例 1.2 中, 如果 $\bar{g} = \frac{1}{1-2ms^{1-n}} ds^2 + s^2 dz^2$, 则 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 为另一种旋转对称空间, 称为 Schwarzschild 流形. 当 $m = \frac{1}{2}$ 时, 则为标准的 Schwarzschild 流形. Schwarzschild 流形是一个具有常数量曲率的渐近平坦流形, 可以证明如上条件 (P_1) – (P_3) 在该空间中也满足.

本文中, 对于旋转对称空间 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 中的星形闭超曲面 $X: M^n \rightarrow \mathbb{N}^{n+1}$, 我们考虑 Guan 和 Li [1] 的平均曲率型流

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X = (n\phi' - Hu)\nu, \\ X(\cdot, 0) = M_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 ν 和 H 分别表示发展超曲面 M_t^n 的单位外法向量和平均曲率, u 依然定义为 $u = \langle \phi(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho}, \nu \rangle$. 它在形式上与空间形式中的平均曲率型流一致, 区别在于, 这里的 ϕ 取更为广泛的光滑函数. 我们的主要结果是下面的定理.

定理 1.3 设 M_0^n ($n \geq 2$) 为旋转对称空间 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 中的星形闭超曲面. 若 $\mathbb{N}^{n+1}$ 的径向截面曲率 $K_{i0} = -\frac{\phi''}{\phi} \geq 0$, 或者 $K_{i0} < 0$ 并且满足条件 (P_1) – (P_3) , 则平均曲率型流 (1.1) 在整个时间区间 $[0, \infty)$ 都存在, 而且当 $t \rightarrow \infty$ 时, M_t 光滑地指数阶收敛到 $\mathbb{N}^{n+1}$ 中的一测地球面.

2 旋转对称空间及其闭超曲面

2.1 旋转对称空间

设 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 为引言中的旋转对称空间. 取 $\mathbb{S}^n$ 上的局部坐标 $\{x^1, \dots, x^n\}$, 则 $\mathbb{S}^n$ 的标准度量 $dz^2 = \sigma_{ij} dx^i dx^j$, 且 $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial \rho}\}$ 组成了 $\mathbb{N}^{n+1}$ 的一组局部切标架场. 记 $\bar{\nabla}$ 和 D 分别为 $\mathbb{N}^{n+1}$ 和 $\mathbb{S}^n$ 上的共变导数, 对应的联络系数分别记为 $\bar{\Gamma}$ 和 $\tilde{\Gamma}$, 则关于如上度量和基底, $\mathbb{N}^{n+1}$ 的联络系数可具体表达为

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k, \quad \bar{\Gamma}_{ij}^0 = -\phi\phi'\sigma_{ij}, \quad \bar{\Gamma}_{0j}^k = \frac{\phi'}{\phi}\delta_j^k, \quad \bar{\Gamma}_{0j}^0 = \bar{\Gamma}_{00}^k = \bar{\Gamma}_{00}^0 = 0, \quad (2.1)$$

其中角标 0 表示向径 ρ 对应的指标.

为了方便, 下面简记 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 和 $\frac{\partial}{\partial \rho}$ 分别为 ∂_i 和 ∂_0 , $\mathbb{N}^{n+1}$ 上的度量 $\bar{g}$ 记为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, 曲率张量、Ricci 张量和数量曲率分别记为 $\bar{R}$ 、 $\bar{\text{Ric}}$ 和 $\bar{S}$.

引理 2.1 旋转对称空间 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 中的曲率张量可以具体表示为

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ijkl} &= \frac{1 - \phi'^2}{\phi^2} (\bar{g}_{ik}\bar{g}_{jl} - \bar{g}_{il}\bar{g}_{jk}), \\ \bar{R}_{ijk0} &= 0, \\ \bar{R}_{i0j0} &= -\frac{\phi''}{\phi} \bar{g}_{ij}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中 $\bar{R}_{ijkl} = \bar{R}(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = \langle \bar{R}(\partial_k, \partial_l)\partial_j, \partial_i \rangle$.

证明 由曲率张量的定义, 结合 (2.1) 直接计算, 得

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ijkl} &= \langle \bar{R}(\partial_k, \partial_l)\partial_j, \partial_i \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\partial_k} \bar{\nabla}_{\partial_l} \partial_j - \bar{\nabla}_{\partial_l} \bar{\nabla}_{\partial_k} \partial_j, \partial_i \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\partial_k} (\bar{\Gamma}_{lj}^m \partial_m + \bar{\Gamma}_{lj}^0 \partial_0), \partial_i \rangle - \langle \bar{\nabla}_{\partial_l} (\bar{\Gamma}_{kj}^m \partial_m + \bar{\Gamma}_{kj}^0 \partial_0), \partial_i \rangle \\ &= \partial_k \bar{\Gamma}_{lj}^m \bar{g}_{mi} + \bar{\Gamma}_{lj}^m \bar{\Gamma}_{km}^s \bar{g}_{si} + \bar{\Gamma}_{lj}^0 \bar{\Gamma}_{k0}^s \bar{g}_{si} - \partial_l \bar{\Gamma}_{kj}^m \bar{g}_{mi} - \bar{\Gamma}_{kj}^m \bar{\Gamma}_{lm}^s \bar{g}_{si} - \bar{\Gamma}_{kj}^0 \bar{\Gamma}_{l0}^s \bar{g}_{si} \\ &= (\partial_k \bar{\Gamma}_{lj}^m - \partial_l \bar{\Gamma}_{kj}^m) \bar{g}_{mi} + (\bar{\Gamma}_{lj}^m \bar{\Gamma}_{km}^s - \bar{\Gamma}_{kj}^m \bar{\Gamma}_{lm}^s) \bar{g}_{si} - \phi'^2 \sigma_{lj} \delta_k^s \bar{g}_{si} + \phi'^2 \sigma_{kj} \delta_l^s \bar{g}_{si} \\ &= [(\partial_k \tilde{\Gamma}_{lj}^s - \partial_l \tilde{\Gamma}_{kj}^s) + (\tilde{\Gamma}_{lj}^m \tilde{\Gamma}_{km}^s - \tilde{\Gamma}_{kj}^m \tilde{\Gamma}_{lm}^s)] \bar{g}_{si} + \phi^2 \phi'^2 (\sigma_{il} \sigma_{kj} - \sigma_{lj} \sigma_{ki}). \end{aligned}$$

注意到

$$[(\partial_k \tilde{\Gamma}_{lj}^s - \partial_l \tilde{\Gamma}_{kj}^s) + (\tilde{\Gamma}_{lj}^m \tilde{\Gamma}_{km}^s - \tilde{\Gamma}_{kj}^m \tilde{\Gamma}_{lm}^s)] \bar{g}_{si} \frac{1}{\phi^2}$$

正好是单位球面 $\mathbb{S}^n$ 上曲率张量 $\tilde{R}_{ijkl}$ 的表达式, 即

$$[(\partial_k \tilde{\Gamma}_{lj}^s - \partial_l \tilde{\Gamma}_{kj}^s) + (\tilde{\Gamma}_{lj}^m \tilde{\Gamma}_{km}^s - \tilde{\Gamma}_{kj}^m \tilde{\Gamma}_{lm}^s)] \bar{g}_{si} \frac{1}{\phi^2} = \tilde{R}_{ijkl} = \sigma_{ik} \sigma_{jl} - \sigma_{il} \sigma_{jk},$$

故

$$\bar{R}_{ijkl} = \phi^2 (1 - \phi'^2) (\sigma_{ik} \sigma_{jl} - \sigma_{il} \sigma_{jk}).$$

同理可得其他两式. □

由如上引理, $\mathbb{N}^{n+1}$ 的截面曲率为

$$\bar{K}_{ij} = \frac{1 - \phi'^2}{\phi^2}, \quad \bar{K}_{i0} = -\frac{\phi''}{\phi}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

其 Ricci 张量为

$$\overline{\text{Ric}}(\partial_0, \partial_0) = -n \frac{\phi''}{\phi} \bar{g}_{00}, \quad \overline{\text{Ric}}(\partial_i, \partial_j) = \left[(n-1) \frac{1-\phi'^2}{\phi^2} - \frac{\phi''}{\phi} \right] \bar{g}_{ij},$$

即

$$\overline{\text{Ric}} = -\left(\frac{\phi''}{\phi} - (n-1) \frac{1-\phi'^2}{\phi^2} \right) \bar{g} - (n-1) \left(\frac{\phi''}{\phi} + \frac{1-\phi'^2}{\phi^2} \right) d\rho^2. \quad (2.3)$$

对其作缩并, 得 $\mathbb{N}^{n+1}$ 的数量曲率

$$\bar{S} = n(n-1) \frac{1-\phi'^2}{\phi^2} - 2n \frac{\phi''}{\phi}. \quad (2.4)$$

2.2 星形闭超曲面

设 M^n 为旋转对称空间 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 中的星形闭超曲面 $X: M^n \rightarrow \mathbb{N}^{n+1}$, 则 M^n 可以表示为单位球面 $\mathbb{S}^n$ 上径向函数 $\rho(x)$ 的图, 即

$$X(x) = \text{graph}\rho(x) = \{(x^0, x) \mid x^0 = \rho(x), x \in \mathbb{S}^n\}.$$

以下关于图超曲面几何量的计算具体可参见文献 [13, 14]. 取 $\mathbb{S}^n$ 上局部法坐标系 $\{x^1, \dots, x^n\}$, M^n 上的局部切标架场为

$$\frac{\partial X}{\partial x^i} = \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

记 g 和 ∇ 分别为 M^n 上的诱导度量和联络, 度量 g 表示为

$$g_{ij} = \bar{g} \left(\frac{\partial X}{\partial x^i}, \frac{\partial X}{\partial x^j} \right) = \rho_i \rho_j + \phi^2 \sigma_{ij},$$

其逆为

$$g^{ij} = \frac{1}{\phi^2} \left(\sigma^{ij} - \frac{\rho^i \rho^j}{\phi^2 + |D\rho|^2} \right).$$

M^n 的单位外法向量场为

$$\nu = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \phi^{-2} \rho_i \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \quad v = \sqrt{1 + \phi^{-2} |D\rho|^2}.$$

超曲面 M^n 在 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 中的第二基本形式为

$$h_{ij} = -\frac{1}{v} \left(\rho_{ij} - 2 \frac{\phi'}{\phi} \rho_i \rho_j - \phi \phi' \sigma_{ij} \right),$$

其平均曲率为

$$H = g^{ij} h_{ij} = -\frac{1}{v\phi^2} \left(\tilde{\Delta}\rho - \phi\phi' \frac{|D\rho|^2}{\phi^2 + |D\rho|^2} - n\phi\phi' - \frac{\rho^i \rho^j \rho_{ij}}{\phi^2 + |D\rho|^2} \right), \quad (2.5)$$

其中 $\tilde{\Delta}$ 为 $\mathbb{S}^n$ 上的标准 Laplace 算子.

为了简化计算, 作重新参数化, 取

$$\gamma = \int_0^\rho \frac{1}{\phi(s)} ds, \quad (2.6)$$

则有如下关系:

$$\gamma_i = \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} = \frac{1}{\phi} \rho_i, \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{\phi} \rho_{ij} - \frac{\phi'}{\phi^2} \rho_i \rho_j.$$

从而, M^n 上的几何量可以有更简单的形式, 诱导度量可以重新表示为

$$g_{ij} = \phi^2(\sigma_{ij} + \gamma_i \gamma_j) = \phi^2 \tilde{\sigma}_{ij}, \quad g^{ij} = \frac{1}{\phi^2} \left(\sigma^{ij} - \frac{\gamma^i \gamma^j}{1 + |D\gamma|^2} \right) = \frac{1}{\phi^2} \tilde{\sigma}^{ij},$$

其中 $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \gamma_i \gamma_j$, σ^{ij} 为 σ_{ij} 的逆矩阵.

M^n 的第二基本形式为

$$h_{ij} = \frac{\phi}{v} (\phi' \tilde{\sigma}_{ij} - \gamma_{ij}), \quad (2.7)$$

其平均曲率为

$$H = \frac{1}{\phi v} (n\phi' - \tilde{\sigma}^{ij} \gamma_{ij}). \quad (2.8)$$

在 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 中定义光滑向量场 $V = \phi(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho}$. $\mathbb{N}^{n+1}$ 的曲率张量限制在超曲面 M^n 上时有如下事实.

引理 2.2 设 M^n 为旋转对称空间 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 中的星形闭超曲面, 则

$$\begin{aligned} \overline{\text{Ric}}(\nu, \nu) &= -\frac{n\phi''}{\phi v^2} + \frac{|D\rho|^2}{v^2 \phi^2} \left[(n-1) \frac{1-\phi'^2}{\phi^2} - \frac{\phi''}{\phi} \right], \\ \overline{\text{Ric}}(\nu, V) &= \overline{\text{Ric}}\left(\nu, \frac{\partial}{\partial \rho}\right) \phi = -\frac{n\phi''}{v}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

证明 注意到在 $\mathbb{N}^{n+1}$ 中, M^n 的单位外法向量表示为

$$\nu = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \phi^{-2} \rho_i \frac{\partial}{\partial x^i} \right),$$

结合 (2.3), 直接计算得

$$\begin{aligned} \overline{\text{Ric}}(\nu, \nu) &= \frac{1}{v^2} \overline{\text{Ric}}\left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\rho_i}{\phi^2} \partial_i, \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\rho_j}{\phi^2} \partial_j\right) = -\frac{n\phi''}{\phi v^2} + \frac{|D\rho|^2}{v^2 \phi^2} \left[(n-1) \frac{1-\phi'^2}{\phi^2} - \frac{\phi''}{\phi} \right], \\ \overline{\text{Ric}}\left(\nu, \frac{\partial}{\partial \rho}\right) &= \frac{1}{v} \overline{\text{Ric}}\left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\rho_i}{\phi^2} \partial_i, \frac{\partial}{\partial \rho}\right) = \frac{1}{v} \overline{\text{Ric}}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \rho}\right) - \frac{\rho_l}{v \phi^2} \overline{\text{Ric}}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}, \partial_l\right) = -\frac{n}{v} \frac{\phi''}{\phi}. \end{aligned}$$

由向量场 V 的表达式, 结论成立. □

2.3 积分恒等式

对如上定义的光滑向量场 $V = \phi(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho}$ 有如下结论.

引理 2.3 对旋转对称空间 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 中任意光滑向量场 Y , 有

$$\bar{\nabla}_Y V = \phi' Y.$$

证明 同第 2.1 小节一样, 取 $\mathbb{S}^n$ 上局部法坐标 $\{x^1, \dots, x^n\}$, 则 $\{\partial_1, \dots, \partial_n, \partial_0\}$ 组成了 $\mathbb{N}^{n+1}$ 的一组局部单位正交基, 只需验证结论在该基底下成立. 结合 (2.1), 直接计算得

$$\bar{\nabla}_{\partial_0} V = \phi'(\rho) \partial_0 + \phi(\rho) \bar{\nabla}_{\partial_0} \partial_0 = \phi' \partial_0,$$

$$\bar{\nabla}_{\partial_i} V = \phi(\rho) \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_0 = \phi \bar{\Gamma}_{i0}^j \partial_j = \phi' \partial_i,$$

即得结论. $\square$

记 $\bar{\Delta}$ 和 Δ 分别为外围空间 $\mathbb{N}^{n+1}$ 和超曲面 M^n 上的 Laplace 算子, 我们有如下事实.

引理 2.4 设 M^n 为旋转对称空间 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 中的星形闭超曲面, 可表示成 $\mathbb{S}^n$ 上径向函数 ρ 的图, 则对 M^n 上径向函数 ρ 和 $\phi(\rho)$, 有

$$\begin{aligned}\Delta \rho &= n \frac{\phi'}{\phi} - \frac{H}{v} - \frac{\phi'}{\phi^3 v^2} |D\rho|^2, \\ \Delta \phi' &= n \frac{\phi'' \phi'}{\phi} - \phi'' \frac{H}{v} - \frac{\phi' \phi''}{\phi^3 v^2} |D\rho|^2 + \phi''' |\nabla \rho|^2.\end{aligned}$$

证明 同样, 在 $\mathbb{S}^n$ 的局部法坐标系 $\{x^1, \dots, x^n\}$ 下计算, $\{\partial_1, \dots, \partial_n, \partial_0\}$ 构成了 $\mathbb{N}^{n+1}$ 的一组局部单位正交基, 结合 (2.1), 直接计算有

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}^2 \rho(\partial_i, \partial_j) &= \partial_i \partial_j(\rho) - (\bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j) \rho = -\Gamma_{ij}^0 \frac{\partial}{\partial \rho} \rho = \phi \phi' \sigma_{ij}, \\ \bar{\nabla}^2 \rho(\partial_0, \partial_0) &= \partial_\rho \partial_\rho(\rho) - (\bar{\nabla}_{\partial_\rho} \partial_\rho) \rho = 0.\end{aligned}$$

进而,

$$\bar{\Delta} \rho = \bar{g}^{ij} \bar{\nabla}^2 \rho(\partial_i, \partial_j) + \bar{g}^{00} \bar{\nabla}^2 \rho(\partial_0, \partial_0) = n \frac{\phi'}{\phi}.$$

另一方面, 取 M^n 上一组局部单位正交基 $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$, 使得 $\{\eta_1, \dots, \eta_n, \nu\}$ 组成外围空间 $\mathbb{N}^{n+1}$ 的一组单位正交基, 直接计算得

$$\Delta \rho = \bar{\Delta} \rho - \bar{\nabla}^2 \rho(\nu, \nu) - \frac{H}{v} = n \frac{\phi'}{\phi} - \frac{H}{v} - \frac{\phi'}{\phi^3 v^2} |D\rho|^2.$$

进一步有

$$\Delta \phi' = \phi'' \Delta \rho + \phi''' |\nabla \rho|^2 = n \frac{\phi'' \phi'}{\phi} - \phi'' \frac{H}{v} - \frac{\phi' \phi''}{\phi^3 v^2} |D\rho|^2 + \phi''' |\nabla \rho|^2. \quad (2.10)$$

于是结论成立. $\square$

此外, 在外围空间 $\mathbb{N}^{n+1}$ 中定义函数 $\Phi(\rho) = \int_0^\rho \phi(s) ds$, 显然, $\bar{\nabla} \Phi = V$, 并有如下性质.

引理 2.5 设 M^n 为旋转对称空间 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 中的星形闭超曲面, 其诱导度量记为 g , 函数 $\Phi(\rho)$ 和向量场 V 如上定义, 则当 $\Phi(\rho)$ 限制在超曲面 M^n 上时, 其 Hesse 算子满足

$$\nabla_{ij}^2 \Phi = \phi' g_{ij} - h_{ij} u.$$

进一步, 函数 $\Phi(\rho)$ 在 M^n 上的 Laplace 算子作用下满足

$$\Delta \Phi = n \phi' - H u. \quad (2.11)$$

证明 取超曲面 M^n 上某点周围的局部法坐标, 其基底记为 $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$, 则连同 M^n 在该点处的单位外法向量 ν , $\{\eta_1, \dots, \eta_n, \nu\}$ 组成了外围空间 $\mathbb{N}^{n+1}$ 的一组基底, 从而,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\eta_i} \bar{\nabla}_{\eta_j} \Phi &= \eta_i(\eta_j \Phi) - (\bar{\nabla}_{\eta_i} \eta_j) \Phi \\ &= \eta_i(\eta_j \Phi) - (\nabla_{\eta_i} \eta_j) \Phi + h_{ij} \nu(\Phi) \\ &= \nabla_{\eta_i} \nabla_{\eta_j} \Phi + h_{ij} \langle V, \nu \rangle,\end{aligned}$$

所以,

$$\nabla_{\eta_i} \nabla_{\eta_j} \Phi = \bar{\nabla}_{\eta_i} \bar{\nabla}_{\eta_j} \Phi - h_{ij} \langle V, \nu \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\eta_i} V, \eta_j \rangle - h_{ij} u = \phi' g_{ij} - h_{ij} u,$$

这里用到了引理 2.3. $\square$

对如上引理中的方程 (2.11) 两边同时在超曲面 M^n 上积分, 并用散度定理, 则得如下旋转对称空间中的 Minkowski 恒等式.

命题 2.6 设 M^n 为旋转对称空间 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 中的星形闭超曲面, 则

$$\int_M H u d\mu = n \int_M \phi' d\mu.$$

文献 [1] 证明了如上积分恒等式在空间形式中成立, 并藉此引进了空间形式中的平均曲率型流. 而事实上, 正如如上命题结论, 该不等式对一般的旋转对称空间中的闭超曲面也成立. 我们也正是借助于它去研究旋转对称空间中的平均曲率型流.

事实上, 在旋转对称空间中的闭超曲面上, 对于高阶的平均曲率也成立类似的 Minkowski 恒等式. 首先回顾高阶平均曲率的相关事实.

设 $\sigma_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为定义在 n 维 Euclid 空间中的 k 阶初等对称函数, 具体地,

$$\sigma_k(\lambda) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n.$$

如果 A 为 n 阶对称矩阵, $\lambda(A) = (\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A))$ 为其实特征值, 则 A 的 k 阶初等对称函数定义为

$$\sigma_k(A) = \sigma_k(\lambda(A)) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_k=1}}^n \delta_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} A_{j_1}^{i_1} \cdots A_{j_k}^{i_k}.$$

A 的 k 阶 Newton 算子定义为

$$T_k(A) = \sigma_k(A)I - \sigma_{k-1}(A)A + \cdots + (-1)^k A^k,$$

$$T_k(A)_j^i = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i, i_1, \dots, i_k=1 \\ j, j_1, \dots, j_k=1}}^n \delta_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} A_{j_1}^{i_1} \cdots A_{j_k}^{i_k} = \frac{\partial \sigma_{k+1}(A)}{\partial A_j^i},$$

其中 $\delta_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$ 是 Kronecker 符号.

当取矩阵 A 为超曲面 M^n 在 $\mathbb{N}^{n+1}$ 中的第二基本形式时, $\lambda(A) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 为 M^n 的主曲率, 称

$$H_k = \frac{1}{C_n^k} \sigma_k$$

为超曲面 M^n 的 k 阶平均曲率. 为方便, 我们约定 $H_0 = 1, H_{-1} = 0$.

对于旋转对称空间 $\mathbb{N}^{n+1}$ 中的闭超曲面 M^n , 有如下形式的高阶平均曲率的 Minkowski 恒等式, 其详细证明参见文献 [15].

命题 2.7 设 M^n 为浸入在旋转对称空间 $\mathbb{N}^{n+1}$ 中的闭超曲面, 则

$$\int_M u H_k d\mu = \int_M \phi' H_{k-1} d\mu + \frac{k-1}{C_{n-1}^{k-2}} \int_M \sum_{i,j=1}^n B_{ij} (T_{k-2})_{ij} d\mu, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

其中

$$B_{ij} = -\frac{1}{n(n-1)} \langle V, e_i \rangle \overline{\text{Ric}}(e_j, \nu).$$

若 M^n 为星形闭超曲面, 且 $\mathbb{N}^{n+1}$ 的径向 Ricci 曲率最小, 即 $\frac{\phi''}{\phi} + \frac{1-\phi'^2}{\phi^2} \geq 0$, 则

$$B_{jj} \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

事实上, 当 $k=1$ 时即为命题 2.6.

3 旋转对称空间中的平均曲率型流

3.1 发展方程

在研究旋转对称空间 $\mathbb{N}^{n+1}$ 中的星形闭超曲面 M^n 沿着平均曲率型流 (1.1) 的性质之前, 我们先给出广义曲率流的发展方程. M^n 在 $\mathbb{N}^{n+1}$ 中广义曲率流定义为

$$\frac{\partial F}{\partial t} = f(F(x, t))\nu \quad (3.1)$$

的发展, 其中 $f(F(x, t))$ 为一个定义在发展超曲面 M_t^n 上的函数, ν 为 M_t^n 的单位外法向量.

命题 3.1 设曲面族 M_t^n 是旋转对称空间 $\mathbb{N}^{n+1}$ 中流 (3.1) 的解, 则 M_t^n 的几何量满足如下发展方程:

- (i) $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = 2fh_{ij}, \frac{\partial g^{ij}}{\partial t} = -2fh^{ij};$
- (ii) $\frac{\partial \nu}{\partial t} = -\nabla f;$
- (iii) $\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} = -\nabla_i \nabla_j f + f(h^2)_{ij} - f\bar{R}(\nu, \partial_i, \nu, \partial_j);$
- (iv) $\frac{\partial H}{\partial t} = -\Delta f - f|A|^2 - f\bar{\text{Ric}}(\nu, \nu);$
- (v) $\frac{\partial}{\partial t} d\mu = fHd\mu,$

其中 $(h^2)_{ij} = h_i^k h_{kj}$, $|A|^2$ 为第二基本形式的模长平方.

证明 为方便读者, 我们给出简要证明.

(i) 在发展超曲面 M_t^n 的局部切向量场 $\{\frac{\partial F}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x^n}\}$ 下, 其诱导度量

$$g_{ij} = \bar{g}\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}, \frac{\partial F}{\partial x^j}\right).$$

注意到 $[\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x^i}] = F_*[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^i}] = 0$, 直接计算得

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{g}\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}, \frac{\partial F}{\partial x^j}\right) = 2\bar{g}\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} \frac{\partial F}{\partial x^i}, \frac{\partial F}{\partial x^j}\right) = 2\bar{g}\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x^i}}(f\nu), \frac{\partial F}{\partial x^j}\right).$$

另一方面, 由于 $\bar{g}(\nu, \frac{\partial F}{\partial x^i}) = 0$, 因此有

$$\bar{g}\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x^i}} \nu, \frac{\partial F}{\partial x^k}\right) = -\bar{g}\left(\nu, \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x^i}} \frac{\partial F}{\partial x^k}\right) = h_{ik}.$$

所以,

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = 2f\bar{g}\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x^i}} \nu, \frac{\partial F}{\partial x^j}\right) = 2fh_{ij}.$$

(ii) 由于

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{g} \left(\nu, \frac{\partial F}{\partial x^i} \right) = \bar{g} \left(\frac{\partial \nu}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x^i} \right) + \bar{g}(\nu, \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial x^i}}(f\nu)) = 0,$$

所以,

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = -\nabla f.$$

(iii) 为方便, 记 $\frac{\partial F}{\partial x^i}$ 、 $\frac{\partial F}{\partial t}$ 和 $\bar{g}$ 分别为 ∂_i 、 $\dot{F}$ 和 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, 由 Gauss 公式知,

$$-h_{ij} = \langle \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j, \nu \rangle.$$

对其两边关于时间求导得

$$\begin{aligned} -\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j, \nu \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\dot{F}} \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j, \nu \rangle + \langle \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j, \bar{\nabla}_{\dot{F}} \nu \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\partial_i} \bar{\nabla}_{\dot{F}} \partial_j + \bar{R}(\dot{F}, \partial_i) \partial_j, \nu \rangle + \left\langle \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j, \frac{\partial \nu}{\partial t} \right\rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\partial_i} \bar{\nabla}_{\partial_j} \dot{F} + \bar{R}(\dot{F}, \partial_i) \partial_j, \nu \rangle - \langle \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j, \nabla f \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\partial_i} (\partial_j(f)\nu + f\bar{\nabla}_{\partial_j} \nu), \nu \rangle + \langle \bar{R}(\dot{F}, \partial_i) \partial_j, \nu \rangle - (\nabla_{\partial_i} \partial_j) f \\ &= \langle \partial_i (\partial_j(f))\nu + \partial_j(f)\bar{\nabla}_{\partial_i} \nu + \bar{\nabla}_{\partial_i} f \bar{\nabla}_{\partial_j} \nu + f\bar{\nabla}_{\partial_i} \bar{\nabla}_{\partial_j} \nu, \nu \rangle + f \langle \bar{R}(\nu, \partial_i) \partial_j, \nu \rangle - (\nabla_{\partial_i} \partial_j) f \\ &= \partial_i (\partial_j f) - (\nabla_{\partial_i} \partial_j) f + f \langle \bar{\nabla}_{\partial_i} \bar{\nabla}_{\partial_j} \nu, \nu \rangle + f \langle \bar{R}(\nu, \partial_i) \partial_j, \nu \rangle \\ &= \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} f - f \langle \bar{\nabla}_{\partial_i} \nu, \bar{\nabla}_{\partial_j} \nu \rangle + f \langle \bar{R}(\nu, \partial_i) \partial_j, \nu \rangle \\ &= \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} f - f h_{ik} g^{kl} h_{lj} + f \langle \bar{R}(\nu, \partial_i) \partial_j, \nu \rangle. \end{aligned}$$

重新整理即得 h_{ij} 的发展方程.

(iv) 借助 (i) 和 (iii) 直接计算, 得

$$\frac{\partial}{\partial t} H = \frac{\partial}{\partial t} (g^{ij} h_{ij}) = -2f h^{ij} h_{ij} - \Delta f + f|A|^2 - f\bar{\text{Ric}}(\nu, \nu),$$

整理得

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\Delta f - f|A|^2 - f\bar{\text{Ric}}(\nu, \nu),$$

其中 $\bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) = g^{ij} \bar{\text{Ric}}(\nu, \partial_i, \nu, \partial_j)$.

(v) 由 (i) 直接计算得到. □

下面研究旋转对称空间中的平均曲率型流. 设 M_0^n 是旋转对称空间 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 中的星形闭超曲面. 对 $\mathbb{N}^{n+1}$ 中的平均曲率型流 (1.1), 有如下性质.

命题 3.2 设 M^n 是旋转对称空间 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 中的星形闭超曲面, 则沿着平均曲率型流 (1.1) 发展, 在其所有解存在的时间区间上, M_t^n 所围区域体积不变; 并且若 $\mathbb{N}^{n+1}$ 的径向 Ricci 曲率最小, 即条件 (P_2) 成立, 则 M_t^n 的面积递减.

证明 设超曲面 M_t^n 是流 (1.1) 的解, 记其所围区域为 Ω , 由命题 2.6 知, 沿着流 (1.1), Ω 的体积 $V(t)$ 关于时间的导数

$$\frac{\partial}{\partial t} V(t) = \int_M (n\phi' - Hu) d\nu = 0.$$

这说明, 在流 (1.1) 的解存在的时间区间内, 超曲面 M^n 所围区域的体积始终是常数.

结合命题 3.1, 沿着流 (1.1) 发展, 超曲面 M_t^n 的面积 $\mathbf{A}(t)$ 关于时间的导数

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(t) = \int_{M_t^n} (n\phi' - Hu)H d\mu.$$

当 $k = 2$ 时, 命题 2.7 中的 Minkowski 恒等式为

$$\int_{M_t^n} (\phi' H_1 - u H_2) d\mu = -\frac{1}{C_{n-1}^0} \int_{M_t^n} \sum_{i,j=1}^n B_{ij}(T_0)_{ij} d\mu = -\int_{M_t^n} \sum_{i,j=1}^n B_{ij} \delta_{ij} d\mu = -\int_{M_t^n} \sum_{i=1}^n B_{ii} d\mu.$$

由于超曲面 M_t^n 是始终保持星形 (这将在后面证明, 见引理 3.8 和 3.11), 当 $\frac{\phi''}{\phi} + \frac{1-\phi'^2}{\phi^2} \geq 0$ 时,

$$B_{ii} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

这等价于

$$\int_{M_t^n} (\phi' H_1 - u H_2) d\mu \leq 0.$$

所以,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(t) &= \int_{M_t^n} (n^2 \phi' H_1 - H^2 u) d\mu = \int_{M_t^n} (n^2 \phi' H_1 - n^2 u H_2 + n^2 u H_2 - H^2 u) d\mu \\ &\leq \int_{M_t^n} u (n^2 H_2 - H^2) d\mu. \end{aligned}$$

由于

$$n^2 H_2 - H^2 = \frac{2n}{n-1} \sigma_2 - H^2 = -\frac{1}{n-1} \sum_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \leq 0,$$

所以,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(t) \leq 0.$$

这说明, 在外围空间满足 $\frac{\phi''}{\phi} + \frac{1-\phi'^2}{\phi^2} \geq 0$ 时, 在流 (1.1) 的解存在的时间区间内, 发展超曲面 M_t^n 的面积随时间递减. $\square$

3.2 模长估计与梯度估计

设 M_0^n 为旋转对称空间 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 中的星形闭超曲面, 则 M_0^n 可以表示为单位球面 $\mathbb{S}^n$ 上函数 $\rho(x)$ 的径向图, 即 $X_0(x) = \rho_0(x)x$, 其中 x 为单位球面 $\mathbb{S}^n$ 上的点. 若曲面簇 M_t^n 是流 (1.1) 的解, 则对应的径向函数 $\rho(x, t)$ 满足如下初值问题方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = (n\phi' - Hu)v, & (x, t) \in \mathbb{S}^n \times [0, T], \\ \rho(\cdot, 0) = \rho_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

其中 $v = \sqrt{1 + \phi^{-2} |D\rho|^2}$.

经由 (2.6) 重新参数化后, 方程 (3.2) 等价于

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = (n\phi' - Hu) \frac{v}{\phi}, & (x, t) \in \mathbb{S}^n \times [0, T], \\ \gamma(\cdot, 0) = \gamma_0, \end{cases} \quad (3.3)$$

其中 $v = \sqrt{1 + |D\gamma|^2}$.

由极大值原理可得如下估计.

引理 3.3 设 M_0^n 为旋转对称空间 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 中的星形闭超曲面, 可表示成单位球面 $\mathbb{S}^n$ 上径向函数 ρ_0 的图, $\rho(x, t)$ 是初值问题 (3.2) 的解, 则对任意 $(x, t) \in \mathbb{S}^n \times [0, T]$, 有

$$\min_{x \in \mathbb{S}^n} \rho_0(x) \leq \rho(x, t) \leq \max_{x \in \mathbb{S}^n} \rho_0(x).$$

证明 由于 $\rho(x, t)$ 是初值问题 (3.2) 的解, 结合 M_t^n 的支撑函数

$$u = \langle V, \nu \rangle = \frac{\phi^2}{\sqrt{\phi^2 + |D\rho|^2}}$$

和平均曲率的表达式 (2.5), 方程 (3.2) 整理为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = v \left[n\phi' + \frac{1}{\phi v^2} \left(\tilde{\Delta}\rho - \phi\phi' \frac{|D\rho|^2}{\phi^2 + |D\rho|^2} - n\phi\phi' - \frac{1}{2} \frac{\langle D|D\rho|^2, D\rho \rangle}{\phi^2 + |D\rho|^2} \right) \right].$$

在临界点处, $D\rho = 0$, $v = 1$, 从而上式化为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{\phi} \tilde{\Delta}\rho.$$

由极大值原理即得结论. □

为证明 M_t^n 保持星形, 需要如下支撑函数 u 的发展方程.

引理 3.4 设 M_0^n 为旋转对称空间 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 中的星形闭超曲面, 沿着流 (1.1) 发展, 其支撑函数 u 满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - u\Delta u &= n\phi'^2 - 2Hu\phi' - n\phi''\langle V, \nabla\rho \rangle + H\langle V, \nabla u \rangle + |A|^2u^2 \\ &\quad - u\overline{\text{Ric}}(\nu, V) + \langle V, \nu \rangle \overline{\text{Ric}}(\nu, \nu)u. \end{aligned}$$

证明 对支撑函数 $u = \langle V, \nu \rangle$ 关于时间求导得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \langle V, \nu \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial x}{\partial t}} V, \nu \rangle + \left\langle V, \frac{\partial \nu}{\partial t} \right\rangle \\ &= (n\phi' - Hu)\langle \bar{\nabla}_\nu V, \nu \rangle - \langle V, \nabla(n\phi' - Hu) \rangle. \end{aligned}$$

由引理 2.3 知, $\bar{\nabla}_\nu V = \phi'\nu$, 故

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (n\phi' - Hu)\phi' - \langle V, \nabla(n\phi' - Hu) \rangle. \quad (3.4)$$

另一方面,

$$\nabla_{\partial_i} u = \langle \bar{\nabla}_{\partial_i} V, \nu \rangle + \langle V, \bar{\nabla}_{\partial_i} \nu \rangle = \phi' \langle \partial_i, \nu \rangle + h_{ik} g^{kl} \langle V, \partial_l \rangle = h_{ik} g^{kl} \nabla_{\partial_l} \Phi,$$

这里用到了 $\bar{\nabla}_{\partial_i} V = \phi' \partial_i$. 进一步,

$$\nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} u = h_{ik,j} g^{kl} \nabla_{\partial_l} \Phi + h_{ik} g^{kl} \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_l} \Phi = h_{ik,j} g^{kl} \nabla_{\partial_l} \Phi + h_{ik} g^{kl} (\phi' g_{jl} - u h_{jl}).$$

所以, 函数 u 在发展超曲面上 Laplace 算子作用下满足

$$\begin{aligned}\Delta u &= g^{ij}g^{kl}h_{ik,j}\nabla_{\partial_l}\Phi + \phi'H - |A|^2u \\ &= \nabla_{\partial_k}H\nabla_{\partial_l}\Phi g^{kl} + g^{ij}g^{kl}\bar{R}_{ijk}^0\nabla_{\partial_l}\Phi + \phi'H - |A|^2u \\ &= \langle \nabla H, V \rangle + \bar{\text{Ric}}(\nu, \partial_k)g^{kl}\langle V, \partial_l \rangle + \phi'H - |A|^2u \\ &= \langle \nabla H, V \rangle + \bar{\text{Ric}}(\nu, V) - \langle V, \nu \rangle \bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) + \phi'H - |A|^2u,\end{aligned}\quad (3.5)$$

这里用到了旋转对称空间中超曲面的 Codazzi 方程

$$h_{ij,k} - h_{ik,j} = \langle \bar{R}(\partial_j, \partial_k)\partial_i, \nu \rangle = \bar{R}_{0ijk}.$$

结合 (3.4) 和 (3.5) 即得结论. □

结合不等式 $|A|^2 \geq \frac{1}{n}H^2$ 和引理 2.2, 支撑函数 u 的发展方程可整理为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - u\Delta u &\geq \frac{1}{n}(n\phi' - Hu)^2 + H\langle V, \nabla u \rangle + n\frac{\phi''}{\phi}(u^2 - \phi^2) \\ &\quad + (n-1)\frac{u^2|\nabla \rho|^2}{v^2\phi^2}\left(\frac{\phi''}{\phi} + \frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\right).\end{aligned}$$

注意到 $u^2 < \phi^2$, 对上式运用极大值原理即得如下估计.

引理 3.5 设 M_0^n 为旋转对称空间 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 中的星形闭超曲面, 沿着流 (3.2) 发展, u 为其支撑函数, 对任意 $(x, t) \in \mathbb{S}^n \times [0, T]$, 若

- (i) $\bar{K}_{i0} = -\frac{\phi''}{\phi} \geq 0$;
- (ii) $\frac{\phi''}{\phi} + \frac{1-\phi'^2}{\phi^2} \geq 0$,

则

$$u(x, t) \geq \min_{x \in \mathbb{S}^n} u(x, 0).$$

注 3.6 该结论说明, 在径向截面曲率非负并满足条件 (P_2) 的旋转对称空间中, 流 (1.1) 的解始终保持星形. 事实上, 后面进一步的估计表明, 这里条件 (P_2) 可以去掉, 并在一定条件下对负径向曲率情形也有对应结果.

记 $\omega = \frac{1}{2}|D\gamma|^2$, $\hat{\Delta}\omega = \tilde{\sigma}^{ij}\omega_{ij}$, 其中 $\tilde{\sigma}^{ij}$ 为 $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \gamma_i\gamma_j$ 的逆矩阵. 为作进一步的梯度估计, 我们需要计算 ω 的发展方程.

引理 3.7 设 $\gamma(x, t)$ 是流 (3.3) 的解, 则有

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{\phi v}\hat{\Delta}\omega &= -\frac{1}{\phi v}|D^2\gamma|^2 - \frac{2(n-1)}{\phi v}\omega - \frac{G}{v^2}\langle D\gamma, D\omega \rangle \\ &\quad + \frac{1}{v}\left[2n\frac{\phi'}{\phi}\langle D\gamma, D\omega \rangle - \frac{2}{\phi v^2}|D\omega|^2 + \frac{2}{\phi v^4}\langle D\gamma, D\omega \rangle^2\right] \\ &\quad + \frac{2\phi}{v}\left(2n\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)'\omega^2 + \left(\frac{1}{\phi}\right)'\tilde{\Delta}\gamma\omega\right),\end{aligned}\quad (3.6)$$

其中

$$v = \sqrt{1 + \frac{|D\rho|^2}{\phi^2}} = \sqrt{1 + |D\gamma|^2}, \quad G = \frac{1}{v}\left(n\frac{\phi'}{\phi}|D\gamma|^2 + \frac{1}{\phi}\tilde{\sigma}^{ij}\gamma_{ij}\right).$$

证明 经由 (2.6) 重新参数化后, 流 (1.1) 等价于初值问题 (3.3), 具体表达为

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = n \frac{\phi'}{\phi} \frac{|D\gamma|^2}{v} + \frac{1}{\phi v} \tilde{\sigma}^{ij} \gamma_{ij}.$$

记

$$G = n \frac{\phi'}{\phi} \frac{|D\gamma|^2}{v} + \frac{1}{\phi v} \tilde{\sigma}^{ij} \gamma_{ij}, \quad v = \sqrt{1 + |D\gamma|^2}.$$

对 ω 关于时间 t 求导得

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \gamma^k \gamma_{tk} = \gamma^k G_k = \gamma^k \left(\frac{\partial G}{\partial \gamma_{ij}} \gamma_{ij,k} + \frac{\partial G}{\partial \gamma_i} \gamma_{ik} + \frac{\partial G}{\partial \gamma} \gamma_k \right). \quad (3.7)$$

由于

$$G = \frac{1}{\sqrt{1 + |D\gamma|^2}} \left(n \frac{\phi'}{\phi} |D\gamma|^2 + \frac{1}{\phi} \left(\sigma^{ij} - \frac{\gamma^i \gamma^j}{1 + |D\gamma|^2} \right) \gamma_{ij} \right),$$

分别计算得

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \gamma_{ij}} &= \frac{1}{\phi v} \tilde{\sigma}^{ij}, \\ \frac{\partial G}{\partial \gamma_i} &= -\frac{G}{v^2} \gamma_i + \frac{1}{v} \left(2n \frac{\phi'}{\phi} \gamma_i - \frac{2}{\phi v^2} \gamma^j \gamma_{ji} + 2 \frac{\gamma^k \gamma^l \gamma_{kl}}{\phi v^4} \gamma_i \right), \\ \frac{\partial G}{\partial \gamma} &= \frac{\phi}{v} \left(n \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)' |D\gamma|^2 + \left(\frac{1}{\phi} \right)' \tilde{\sigma}^{ij} \gamma_{ij} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

注意到在单位球面 $\mathbb{S}^n$ 上,

$$\gamma_{ij,k} \gamma^k = \gamma_{k,ij} \gamma^k + \gamma^k \gamma_j \tilde{\sigma}_{ik} - \gamma^k \gamma_k \tilde{\sigma}_{ij}, \quad \hat{\Delta} \omega = \gamma_k^i \gamma_{il} \tilde{\sigma}^{kl} + \gamma^i \gamma_{i,kl} \tilde{\sigma}^{kl}.$$

由 (3.8), 分别计算 (3.7) 中的三项如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \gamma_{ij}} \gamma_{ij,k} \gamma^k &= \frac{1}{\phi v} (\hat{\Delta} \omega - |D^2 \gamma|^2 - (n-1) |D\gamma|^2), \\ \frac{\partial G}{\partial \gamma_i} \gamma_{ik} \gamma^k &= -\frac{G}{v^2} \langle D\gamma, D\omega \rangle + \frac{1}{v} \left(2n \frac{\phi'}{\phi} \langle D\gamma, D\omega \rangle - \frac{2}{\phi v^2} |D\omega|^2 + \frac{2}{\phi v^4} \langle D\gamma, D\omega \rangle^2 \right), \\ \frac{\partial G}{\partial \gamma} \gamma^k \gamma_k &= 2\omega \frac{\phi}{v} \left(2n \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)' \omega + \left(\frac{1}{\phi} \right)' \tilde{\Delta} \gamma \right). \end{aligned}$$

将上式代入 (3.7) 整理即得结论. □

于是, 对非负径向曲率情形有如下梯度估计.

引理 3.8 设 M_0^n 是旋转对称空间 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 中的星形闭超曲面, 可以表示成单位球面 $\mathbb{S}^n$ 上径向函数 ρ_0 的图, $\rho(x, t)$ 是初值问题 (3.2) 在时间区间 $[0, T]$ 上的解, 当 $\mathbb{N}^{n+1}$ 的径向截面曲率非负时, 对任意 $(x, t) \in \mathbb{S}^n \times [0, T]$, 都有

$$|D\rho| \leq e^{-\alpha t} \max_{x \in \mathbb{S}^n} |D\rho_0|(x),$$

其中 α 为与初始超曲面有关的正常数.

证明 在 ω 的临界点处, $D\omega = 0$, 从而, (3.6) 整理为

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{\phi v} \hat{\Delta} \omega = -\frac{1}{\phi v} |D^2 \gamma|^2 - \frac{2(n-1)}{\phi v} \omega + 4n \frac{\phi}{v} \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)' \omega^2 + 2 \frac{\phi}{v} \left(\frac{1}{\phi} \right)' \tilde{\Delta} \gamma \omega.$$

注意到 $|D^2\gamma|^2 \geq \frac{1}{n}(\tilde{\Delta}\gamma)^2$, 故

$$\begin{aligned}\frac{\partial\omega}{\partial t} - \frac{1}{\phi v}\hat{\Delta}\omega &\leq -\frac{1}{n\phi v}(\tilde{\Delta}\gamma)^2 - \frac{2(n-1)}{\phi v}\omega + \frac{4n}{v}\frac{\phi''\phi - (\phi')^2}{\phi}\omega^2 - \frac{2}{v}\frac{\phi'}{\phi}\tilde{\Delta}\gamma\omega \\ &= -\frac{1}{n\phi v}(\tilde{\Delta}\gamma + n\phi'\omega)^2 - \frac{2(n-1)}{\phi v}\omega + \frac{n}{\phi v}(4\phi''\phi - 3\phi'^2)\omega^2.\end{aligned}$$

如果旋转对称空间的径向截面曲率 $\bar{K}_{i0} = -\frac{\phi''}{\phi} \geq 0$, 则

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} - \frac{1}{\phi v}\hat{\Delta}\omega \leq -\frac{2(n-1)}{\phi v}\omega \leq 0.$$

由极大值原理, 对任意 $(x, t) \in \mathbb{S}^n \times [0, T]$, 有

$$|D\gamma|(x, t) \leq \max_{x \in \mathbb{S}^n} |D\gamma|(x, 0).$$

结合引理 3.3 知, 存在只依赖初值的常数 C_1 使得 $\phi v \leq C_1$, 取 $\alpha = \frac{2(n-1)}{C_1}$, 进一步有

$$\frac{\partial\omega_{\max}}{\partial t} \leq -\alpha\omega_{\max},$$

即

$$\omega(x, t) \leq e^{-\alpha t} \max_{x \in \mathbb{S}^n} \omega(x, 0).$$

由方程 (3.2) 和 (3.3) 的等价性, 结合引理 3.3 即得结论. $\square$

为得到负截面曲率情形的结果, 需先对平均曲率作上界估计.

引理 3.9 设 M_0^n 为旋转对称空间 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 中的星形闭超曲面, 沿着流 (1.1) 发展, 其平均曲率 H 满足

$$\frac{\partial H}{\partial t} - u\Delta H = \phi'(H^2 - n|A|^2) + H\langle \nabla H, V \rangle + \frac{n}{2}\phi|\nabla\rho|^2 \left[(n-1)\frac{1-\phi'^2}{\phi^2} - 2\frac{\phi''}{\phi} \right]. \quad (3.9)$$

证明 由引理 3.1(iv), 取 $f = n\phi' - Hu$, 具体计算并整理得

$$\frac{\partial H}{\partial t} - u\Delta H = H\Delta u - n\Delta\phi' - (n\phi' - Hu)|A|^2 - (n\phi' - Hu)\overline{\text{Ric}}(\nu, \nu).$$

由 (3.5) 知,

$$\Delta u = \langle \nabla H, V \rangle + \overline{\text{Ric}}(\nu, V) - u\overline{\text{Ric}}(\nu, \nu) + \phi'H - |A|^2u.$$

结合以上两式, 整理得

$$\frac{\partial H}{\partial t} - u\Delta H = \phi'(H^2 - n|A|^2) + H\langle \nabla H, V \rangle - n\Delta\phi' - n\phi'\overline{\text{Ric}}(\nu, \nu) + H\overline{\text{Ric}}(\nu, V). \quad (3.10)$$

进一步, 由引理 2.2 和 2.4 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial t} - u\Delta H &= \phi'(H^2 - n|A|^2) + H\langle \nabla H, V \rangle - n^2\frac{\phi'\phi''}{\phi} + n\phi''\frac{H}{v} + n\frac{\phi'\phi''}{\phi^3v^2}|D\rho|^2 \\ &\quad - n\phi'''|\nabla\rho|^2 - n\phi''\frac{H}{v} + n^2\frac{\phi'\phi''}{\phi v^2} - n\frac{\phi'}{\phi^2v^2} \left[(n-1)\frac{1-\phi'^2}{\phi^2} - \frac{\phi''}{\phi} \right].\end{aligned} \quad (3.11)$$

注意到

$$|\nabla\rho|^2 = 1 - \left\langle \frac{\partial}{\partial\rho}, \nu \right\rangle^2 = \frac{|D\rho|^2}{\phi^2v^2}, \quad \frac{1}{v^2} - 1 = -|\nabla\rho|^2,$$

故 (3.11) 可整理为

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} - u\Delta H &= \phi'(H^2 - n|A|^2) + H\langle \nabla H, V \rangle + n^2 \frac{\phi'\phi''}{\phi} \left(\frac{1}{v^2} - 1 \right) + n \left[\frac{\phi'\phi''}{\phi} - \phi''' \right] |\nabla \rho|^2 \\ &\quad - n\phi' \left[(n-1) \frac{1-\phi'^2}{\phi^2} - \frac{\phi''}{\phi} \right] |\nabla \rho|^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

为方便, 记

$$P = n^2 \frac{\phi'\phi''}{\phi} \left(\frac{1}{v^2} - 1 \right) + n \left[\frac{\phi'\phi''}{\phi} - \phi''' \right] |\nabla \rho|^2 - n\phi' \left[(n-1) \frac{1-\phi'^2}{\phi^2} - \frac{\phi''}{\phi} \right] |\nabla \rho|^2,$$

进一步计算有

$$\begin{aligned} P &= -n^2 \frac{\phi'\phi''}{\phi} |\nabla \rho|^2 + n\phi \left(-\frac{\phi''}{\phi} \right)' |\nabla \rho|^2 - n(n-1) \frac{\phi'(1-\phi'^2)}{\phi^2} |\nabla \rho|^2 + n \frac{\phi'\phi''}{\phi} |\nabla \rho|^2 \\ &= \frac{n}{2} \phi \left[(n-1) \frac{1-\phi'^2}{\phi^2} - 2 \frac{\phi''}{\phi} \right]' |\nabla \rho|^2. \end{aligned}$$

将其代入 (3.12) 即得引理结论. $\square$

注意到旋转对称空间 $\mathbb{N}^{n+1}$ 中的数量曲率

$$\bar{S} = n(n-1) \frac{1-\phi'^2}{\phi^2} - 2n \frac{\phi''}{\phi},$$

对比 (3.9) 的最后一项, 并结合不等式 $|A|^2 \geq \frac{1}{n}H^2$, 对方程 (3.9) 运用极大值原理有如下结论.

引理 3.10 设 M_0^n 为旋转对称空间 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 中的星形闭超曲面, 沿着流 (3.2) 发展, 若 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 的数量曲率沿径向非增, 即满足条件 (P₃), 则 M_t^n 的平均曲率 H 满足

$$H(x, t) \leq \max_{x \in M} H(x, 0).$$

借助于该结论, 我们可得负径向截面曲率时初值问题 (3.2) 的梯度估计.

引理 3.11 设 M_0^n 是旋转对称空间 $(\mathbb{N}^{n+1}, \bar{g})$ 中的星形闭超曲面, 可以表示成单位球面 $\mathbb{S}^n$ 上径向函数 ρ_0 的图, $\rho(x, t)$ 是初值问题 (3.2) 在时间区间 $[0, T]$ 上的解, 当 $\mathbb{N}^{n+1}$ 的径向截面曲率小于零并满足条件 (P₁) 和 (P₃) 时, 对任意 $(x, t) \in \mathbb{S}^n \times [0, T]$, 都有

$$|D\rho| \leq C,$$

其中 C 是只依赖初值的正常数.

证明 由引理 3.7, 在 ω 的临界点 P 处, 有

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{\phi v} \hat{\Delta} \omega = -\frac{1}{\phi v} |D^2 \gamma|^2 - \frac{2(n-1)}{\phi v} \omega + \frac{2\phi}{v} \left(2n \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)' \omega^2 + \left(\frac{1}{\phi} \right)' \tilde{\Delta} \gamma \omega \right). \quad (3.13)$$

注意到在 ω 的临界点 P 处, 平均曲率

$$H = \frac{n\phi'}{\phi v} - \frac{1}{\phi v} \tilde{\Delta} \gamma,$$

从而, (3.13) 进一步整理为

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{\phi v} \hat{\Delta} \omega \leq -\frac{2}{\phi v} [v(nv(\phi'^2 - \phi\phi'') - \phi\phi'H) + n\phi\phi'' + (n-1)]\omega. \quad (3.14)$$

注意到 N^{n+1} 的径向截面曲率小于零, 即 $\phi'' > 0$. 若

$$nv(\phi'^2 - \phi\phi'') - \phi\phi'H \geq 0,$$

则有

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} - \frac{1}{\phi v}\hat{\Delta}\omega \leq 0,$$

由极大值原理得

$$\omega(x, t) \leq \max_{x \in \mathbb{S}^n} \omega(x, 0).$$

由方程 (3.2) 和 (3.3) 的等价性, 且 $\omega = \frac{1}{2\phi^2}|D\rho|^2$, 结合引理 3.3 即得结论.

若

$$nv(\phi'^2 - \phi\phi'') - \phi\phi'H < 0,$$

注意到条件 (P₁), 上式等价于

$$v < \frac{\phi\phi'H}{n(\phi'^2 - \phi\phi'')},$$

结合引理 3.3 和 3.10 知, v 有一致上界, 再由方程 (3.2) 和 (3.3) 的等价性即得结论. $\square$

注 3.12 该结论说明, 在径向截面曲率小于零并满足条件 (P₃) 的旋转对称空间中, 流 (1.1) 的解始终保持星形.

事实上, 我们可以进一步证明在此情形梯度是指数递减的.

命题 3.13 在引理 3.11 同样的假设下, 存在只依赖初值的正常数 α , 使得对任意的 $(x, t) \in \mathbb{S}^n \times [0, T]$, 都有

$$|D\rho| \leq e^{-\alpha t} \max_{x \in \mathbb{S}^n} |D\rho|(x, 0).$$

证明 由于 $A(t) = \int_{M_t} d\mu$, 则

$$A(t) - A(0) = \int_0^t A'(s) ds.$$

由命题 3.2 知,

$$A'(s) \leq -\frac{1}{n-1} \int_{M_t} u \sum_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 d\mu \leq 0.$$

结合以上两式, 有

$$\frac{1}{n-1} \int_0^t \int_{M_s} u \sum_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 d\mu ds \leq A(0) - A(t) \leq A(0) < \infty,$$

进而,

$$\frac{1}{n-1} \int_0^\infty \int_{M_s} u \sum_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 d\mu ds < \infty.$$

由此可见,

$$\int_{M_t} u \sum_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 d\mu \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

而由模长和梯度的一致估计知, M_t^n 的支撑函数和面积都上下一致有界, 因此, 对任意 $\varepsilon > 0$, 必存在某时刻 T_0 , 对所有 $t \geq T_0$, 都有

$$\max_{x \in \mathbb{S}^n} |\lambda_i(x, t) - \lambda_j(x, t)| < \sum_{i < j} |\lambda_i(x, t) - \lambda_j(x, t)| \leq \varepsilon.$$

另一方面, 在 ω 的临界点 P 处, M_t^n 的 Weingarten 张量

$$h_j^i = \frac{1}{\phi v} (-\gamma_j^i + \delta_j^i \phi').$$

通过适当旋转坐标系使得 $\gamma_1 = |D\gamma|$, 则 $\gamma_{1j} = 0, j = 2, \dots, n$. 进一步, 在 $P \in M_t$ 处取单位正交基, 使得 $n-1$ 阶矩阵 $(\gamma_{ij}) (i, j \geq 2)$ 可对角化, 这时, P 点处主曲率

$$\lambda_i = \frac{1}{\phi v} (-\gamma_{ii} + \phi'),$$

从而, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在某时刻 T_0 , 当 $t \geq T_0$ 时,

$$|\lambda_i(x, t) - \lambda_j(x, t)| = \frac{1}{\phi v} |\gamma_{ii} - \gamma_{jj}| \leq \varepsilon.$$

注意到 ϕv 一致有界, 不妨设 $\phi v \leq C_1$, 则

$$|\gamma_{ii} - \gamma_{jj}| \leq C_1 \varepsilon.$$

由 $\gamma_{11} = 0$ 知, 当 $j \geq 2$ 时, $|\gamma_{jj}| \leq C_1 \varepsilon$, 所以,

$$-\phi v H = \sum_{i=1}^n \gamma_{ii} - n\phi' \geq -(n-1)C_1 \varepsilon - n\phi'. \quad (3.15)$$

由 (3.14) 知,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{\phi v} \hat{\Delta} \omega \leq -\frac{2}{\phi v} [v(nv(\phi'^2 - \phi\phi'') - \phi\phi'H) + n\phi\phi'' + (n-1)]\omega.$$

为方便, 记

$$Q = nv^2(\phi'^2 - \phi\phi'') - \phi\phi'Hv + n\phi\phi'' + (n-1).$$

注意到条件 (P_1) , 结合 (3.15) 得

$$\begin{aligned} Q &\geq nv^2(\phi'^2 - \phi\phi'') - (n-1)C_1\varepsilon\phi' - n\phi'^2 + n\phi\phi'' + (n-1) \\ &= n(\phi'^2 - \phi\phi'')|D\gamma|^2 + (n-1)(1 - C_1\phi'\varepsilon) \\ &\geq (n-1)(1 - C_1\phi'\varepsilon). \end{aligned}$$

若取 $\varepsilon < \frac{1}{C_1\phi'(\max \gamma_0)}$, 则存在某正常数 C_2 使得 $Q \geq C_2 > 0$. 进而对 $\alpha = \frac{C_2}{C_1}$, 有

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{\phi v} \hat{\Delta} \omega \leq -\alpha \omega.$$

由极大值原理立即得

$$\omega(x, t) \leq e^{-\alpha t} \max_{x \in \mathbb{S}^n} \omega(x, 0).$$

再由方程 (3.2) 和 (3.3) 的等价性, 结合引理 (3.3) 即得命题结论成立. $\square$

事实上, 方程 (3.2) 和 (3.3) 均可表达为散度型抛物方程.

引理 3.14 设 $\gamma(x, t), (x, t) \in \mathbb{S}^n \times [0, T]$ 是流 (3.3) 的解, 则方程 (3.3) 是散度型抛物方程, 即

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{1}{\phi v} D\gamma \right) + (n+1) \frac{\phi'}{\phi v} |D\gamma|^2. \quad (3.16)$$

等价地, 若 $\rho(x, t), (x, t) \in \mathbb{S}^n \times [0, T]$ 是流 (3.2) 的解, 则方程 (3.2) 也是散度型抛物方程, 即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{1}{\phi v} D\rho \right) + \frac{n\phi'}{\phi^2 v} |D\rho|^2, \quad (3.17)$$

其中 $v = \sqrt{1 + |D\gamma|^2} = \sqrt{1 + \frac{|D\rho|^2}{\phi^2}}$.

证明 一方面, 由重新参数化 (2.6) 之后 H 和 u 的具体表达式, 方程 (3.3) 变为

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = n \frac{\phi'}{\phi} v - H = n \frac{\phi'}{\phi} \frac{|D\gamma|^2}{v} + \frac{1}{\phi v} \tilde{\Delta} \gamma - \frac{\gamma^i \gamma^j \gamma_{ij}}{\phi v^3}.$$

另一方面, 直接计算得

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\phi v} D\gamma \right) &= \frac{\tilde{\Delta} \gamma}{\phi v} - \frac{\gamma^j}{\phi^2 v^2} \left(\phi' v \rho_j + \frac{\phi}{v} \gamma^i \gamma_{ij} \right) \\ &= \frac{\tilde{\Delta} \gamma}{\phi v} - \frac{1}{\phi^2 v^2} \left(\phi' \phi v |D\gamma|^2 + \frac{\phi}{v} \gamma^i \gamma^j \gamma_{ij} \right). \end{aligned}$$

以上两式相减即得 (3.16), 类似办法可得 (3.17). $\square$

在上述所有结论的基础上, 我们给出主要定理的证明.

定理 1.3 的证明 (主要定理的证明) 由引理 3.14 知, 流 (1.1) 实质上等价于一个散度型抛物方程, 由引理 3.3、3.8 和 3.11 中模长和梯度的一致估计, 结合标准的散度型抛物方程的理论 (参见文献 [16]), 可以得到解的高阶正则性先验估计, 并且解长时间存在并始终保持星形. 进一步由引理 3.8 和命题 3.13 知, 当时间 t 趋于无穷大时, $D\rho$ 指数阶趋于零. 这就说明, 发展超曲面最终指数阶收敛到球面, 从而完成了定理 1.3 的证明. $\square$

本文出版时获悉 Guan 等^[17]作了这方面更广的结果.

致谢 作者衷心地感谢审稿人提出的宝贵建议.

参考文献

- 1 Guan P, Li J. A mean curvature type flow in space forms. *Int Math Res Not IMRN*, 2015, 2015: 4716–4740
- 2 Cabezas R, Miquel V. Volume preserving mean curvature flow in the hyperbolic space. *Indiana Univ Math J*, 2007, 56: 2061–2086
- 3 Huisken G. The volume preserving mean curvature flow. *J Reine Angew Math*, 1987, 382: 35–48
- 4 McCoy J. The mixed volume preserving mean curvature flow. *Math Z*, 2006, 246: 155–166
- 5 Guan P, Li J. The quermassintegral inequalities for k -convex starshaped domains. *Adv Math*, 2009, 221: 1725–1732
- 6 Guo F, Li G, Wu C. Mean curvature type flow with perpendicular Neumann boundary condition inside a convex cone. *Abstr Appl Anal*, 2014, 2014: 315768
- 7 Brendle S, Hung P, Wang M. A Minkowski inequality for hypersurfaces in the Anti-deSitter-Schwarzschild manifold. *Comm Pure Appl Math*, 2016, 69: 124–144
- 8 Brendle S. Constant mean curvature surfaces in warped product manifolds. *Publ Math Inst Hautes Études Sci*, 2013, 117: 247–269
- 9 Ding Q. The inverse mean curvature flow in rotationally symmetric space. *Chin Ann Math Ser B*, 2011, 32: 27–44
- 10 Ge Y, Wang G, Wu J. Hyperbolic Alexandrov-Fenchel quermassintegral inequalities I. *ArXiv:1303.1714*, 2013

- 11 Li H, Wei Y. A Minkowski type inequality for hypersurfaces in the Schwarzschild manifold. ArXiv:1212.4218, 2015
- 12 Scheuer J. The inverse mean curvature flow in warped cylinders of non-positive radial curvature. ArXiv:1312.5662, 2013
- 13 Li G, Salavessa I. Forced convex mean curvature flow in Euclidean space. Manuscripta Math, 2008, 126: 333–351
- 14 Zhu X. Lectures on Mean Curvature Flows. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 32. Providence: Amer Math Soc; Somerville: International Press, 2002
- 15 Wu J, Xia C. On rigidity of hypersurfaces with constant curvature functions in warped product manifolds. Ann Global Anal Geom, 2014, 46: 1–22
- 16 Lieberman G. Second Order Parabolic Differential Equations. Singapore: World Scientific Publishing, 1996
- 17 Guan P F, Li J F, Wang M T. A volume preserving flow and the isoperimetric problem in warped product spaces. ArXiv:1609.08238, 2016

Mean curvature type flow in rotationally symmetric spaces

GUO FangCheng, LI GuangHan & WU ChuanXi

Abstract In this paper, the mean curvature type flow of star-shaped closed hypersurfaces in rotationally symmetric spaces is investigated. We prove that the flow exists for all times and converges exponentially to a sphere in the C^∞ topology, enclosing the same volume as the initial hypersurfaces. This extends the corresponding result of space forms by Guan and Li (2015) to a large class of rotationally symmetric spaces.

Keywords rotationally symmetric space, star-shaped hypersurface, Minkowski identity, mean curvature type flow

MSC(2010) 53C40, 53C44, 35K55

doi: 10.1360/N012015-00328