数值格式的稳定性、相容性和收敛性

献给林群教授 80 华诞

许进超

Department of Mathematics, The Pennsylvania State University, University Park, PA 16802, USA

E-mail: xu@math.psu.edu

收稿日期: 2015-03-22; 接受日期: 2015-05-11

国家自然科学基金 (批准号: 41230210 和 91430215) 资助项目

摘要 本文提出一套理论框架, 用相容性、稳定性和收敛性来刻画和分析数值格式, 证明了三者间的包含关系, 并例证这套理论在数值格式分析中的应用.

关键词 稳定性 相容性 收敛性 等价定理 线性元 超接近

MSC (2010) 主题分类 65G99, 65J05, 65L20, 65M60, 65N30

1 引言

应用科学中的数学问题, 如各种微分方程定解问题, 通常不能够用解析的方法精确求解. 一种通行的做法是, 用数值格式将其转化 (离散) 成一族或者一序列离散问题, 使其可以在计算机上通过代数操作求解, 从而获得原问题的解的有效近似或数值模拟. 从理论分析和指导实践的角度来看, 离散过程的误差, 即原问题精确解与离散后求得的数值解之间的差异, 需要有效的界定、度量和控制. 这是数值分析学科的中心问题之一.

离散微分方程的方法有很多种, 形形色色的强形式方法和 Galerkin 类变分形式方法都在实际计算中发挥了作用, 取得了成功. 尽管具体形式和用法不同, 但是这些方法本质上是有一些共同之处的. 如何在比较一般的框架下统一分析这些方法的误差控制机制, 一直以来都吸引着学者们广泛的研究兴趣. 本文也希望在这个方向作一些探讨.

考虑一个形如方程 $Lu = f$ 的适定的定解问题. 给定一个右端项 f , 或称输入数据 (input data), 则可以唯一确定一个精确解 u , 并且当 f 受到的扰动不大时, u 的变化也不大. 通过某种数值格式, 在一定的取值范围内 (如一定的函数空间) 建立一个离散问题 $L_h u_h = f_h$, 用作原方程的逼近问题. 根据离散问题, 在一定范围内, 给定一个右端项 (离散输入数据) f_h , 可以确定一个离散解 u_h . 为使 u_h 成为 u 的好的近似解, 通常需要 $f_h (= R_h f)$ 体现 f 的性质. 这些成分合成一个完整的离散方法. 为使这个离散方法对原问题提供好的逼近解, 需要解决两方面问题. 一方面, u_h 的取值范围要足够大, 其中要包含 u 的较好的逼近, 同时, 实际采用的离散输入数据 $R_h f$ 和保证所求解出来的离散解为 u 的好的逼近的离散输入数据误差不能太大; 另一方面, 离散问题输入数据的变化不大需要足以保证所得离散解的变化不要太大. 我们把第一个方面的要求称为相容性; 对第二个方面的要求称为稳定性; 离

散解对真解的逼近则称为收敛性. 这三个概念的严格定义将在后面章节给出. 本文将探讨从稳定和相容的角度刻画和分析数值离散格式. 本文的一个主要结果是, 对一个数值格式来说, 上面三个性质中有一个成立, 那么余下的两个是互相包含的.

稳定性、相容性和收敛性属于数值分析学科中最基本的几个概念, 经典的数值分析教材都含有稳定性、相容性和收敛性三个概念刻画数值格式与分析三者间的相互关系的内容. 按照传统的说法, 相容性指真解和输入数据要能近似满足离散问题, 稳定性则强调离散问题的适定性. 针对发展问题, Courant 等在 1928 年的重要著作 [1] 中指出, 相容性和稳定性结合在一起才能保证数值方法的收敛性. 他们提出的保证稳定性的 CFL 条件, 与 von Neumann 等的系列工作 [2,3] 一起, 组成了数值分析经典教材中稳定性分析的主要部分. Lax 和 Richtmyer [4] 在 1956 年的里程碑式的工作中对时间发展问题的离散格式总结了稳定性、相容性与收敛性的关系, 指出如果离散格式是相容的, 那么离散格式的稳定性与收敛性是等价的. 该文献中的主要结果后来称为 Lax 等价定理. 该定理在数值分析领域产生重大影响, 同时对算子族相容性质、稳定性质和逼近性质间关系的刻画也吸引了来自泛函分析学科的关注, 如张恭庆和林源渠的著作 [5] 中的同名定理. 数学上说, 文献 [4] 描述的是用离散单参数算子半群族逼近连续单参数算子半群的过程, 其结果指出, 如果离散单参数算子半群族的近似生成元可以收敛到连续参数算子半群的无穷小生成元, 那么离散单参数算子半群族的一致有界性质和该族对连续算子半群的逼近性质是等价的. 本质上, 其应用背景是时间发展问题, 其稳定性条件也主要是应对误差累积和放大的效应的. 该文献的分析框架须经实质性推广才能用以分析静态问题. 同时, 如果对应到数值格式上, 文献 [4] 的讨论假设离散问题的输入数据和连续输入数据集合之间是一一对应的, 对于实际的数值格式来说, 如何保证或验证这样的假设是非平凡的, 一般也是困难的. 本文的理论框架探讨了数值解向精确解的收敛过程, 不需要对离散输入数据的取值范围预作设定, 原则上可以处理时间发展问题和静态问题.

在本文提出的等价定理的框架下, 数值格式的收敛性分析将归纳为稳定性分析和相容性分析两步; 这样的分析程式广泛适用于不同的数值格式. 在后文中, 我们针对变分问题的离散格式, 例示了用本定理进行格式分析的具体程式. 此外, 需要指出的是, 数值格式的稳定性、相容性和收敛性是互相协调的, 在一定的稳定性假设下, 较高的相容性会导致较好的收敛性; 另一方面, 对相同的数值格式, 在不同的稳定性条件下, 可以藉由不同的相容性结果, 得到不同的收敛性结果. 作为示例, 我们按照有限元方式和差分方式分别计算了 Poisson 方程线性元离散格式的相容性误差. 作为本文的另一个主要结果, 我们证明线性元离散格式按照差分方式分析, 可以是不相容的, 并且如果线性元离散格式在差分方式下相容, 那么, 我们可以获得相对应的超接近性 (supercloseness) 结果. 这样的超接近性结果是有限元超收敛分析和后处理的重要基础, 可参见文献 [6] 及林群和合作者的专著 [7-9].

本文所余章节结构如下. 第 2 节回顾 Lax-Richtmyer 等价定理. 第 3 节给出新的等价定理. 第 4 节详示本定理指导下, 变分问题离散格式分析的具体程式. 第 5 节讨论 Poisson 方程线性元的相容性和相关超接近性. 第 3 和 5 节是本文的主要结果, 它们取材于作者 2004 年在有限元论坛的报告 [10], 属首度发表. 最后, 第 6 节给出结论和若干进一步的讨论.

2 Lax-Richtmyer 的等价定理

令 B 为一个 Banach 空间, A 表示 B 上的一个变换. 考虑求解初值问题

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.1)$$

$$u(0) = u_0, \quad (2.2)$$

即给定对应系统初始状态的元素 u_0 , 求一个单参数元素集合 $\{u(t)\}_{t>0}$.

相应于任意的初状态 u_0 , 初值问题的解对应于一个单参数算子族 $E(t)$, 即 $u(t) = E(t)u_0$. 这个单参数算子族满足以下性质:

(1) 算子族定义了原来初值问题的解,

$$\text{当 } \tau \rightarrow 0, \quad \left\| \frac{u(t+\tau) - u(t)}{\tau} - Au(t) \right\| \text{ 关于 } t \text{ 一致趋于零, } 0 \leq t \leq T; \quad (2.3)$$

(2) 算子族 $\{E(t)\}$ 在 $[0, T]$ 是一致有界的;

(3) 算子族满足半群性质 $E(0) = \text{id}$, $E(t+s) = E(t)E(s)$, $t, s > 0$.

考虑用差分方法进行时间变量的离散: 在时间方向取离散点 $t = t^0, t^1, \dots$, 其中 $t^n = n\Delta t$, 并求在各离散时刻的离散状态序列 $u^0, u^1, \dots$ 诸状态均对应空间 $\mathcal{B}$ 中的元素. 假设采用某种离散格式后, 离散时间时刻的物理状态的演进规律可以写为

$$u^{n+1} = C(\Delta t)u^n. \quad (2.4)$$

按照这种表示方法, $C(\Delta t)$ 完全表达了某种离散格式, 同时获得了一族算子

$$C(\Delta t)^k, \quad 0 \leq k\Delta t \leq T.$$

而 $u(t)$ 的近似状态即为 $C(\Delta t)^k u_0$, 这里 $k\Delta t \rightarrow t$.

配合上面的描述, Lax-Richtmyer 定义离散格式的相容性、稳定性和收敛性分别如下:

(1) 相容性. 离散格式是相容的, 如果

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \left(\frac{C(\Delta t) - I}{\Delta t} - A \right) u(t) \right\| = 0$$

在 $0 \leq t \leq T$ 一致成立.

(2) 稳定性. 离散格式是稳定的, 如果存在一个常数 K , 使得 $\|C(\Delta t)^k\| \leq K$, K 对 Δt 和 k 是一致的, $k\Delta t \leq T$.

(3) 收敛性. 离散格式是收敛的, 如果 $C(\Delta t)^k \rightarrow E(t)$ ($\Delta t \rightarrow 0$ 且 $k\Delta t \rightarrow t$) 在 $\mathcal{B}$ 上是点点成立的.

定理 1 ^[4] (Lax-Richtmyer 的等价定理) 令问题的设定及相容性和稳定性的定义分别如上. 假设离散格式 $C(\Delta t)$ 是相容的, 则该格式是收敛的, 当且仅当它是稳定的.

注 2 A 可视为算子半群 $E(t)$ 的无穷小生成元, 所以, 相容性实际是一个离散半群的生成元对一个连续半群的生成元的逼近性质, 而收敛性即为一个离散半群算子族对一个连续算子半群的逼近性质.

3 数值格式的相容性、稳定性和收敛性

我们考虑这样的定解问题. 令 U 和 F 为两个 Banach 空间, L 为从 U 映向 F 的可逆有界线性算子. 定解问题 (连续问题) 为

$$\text{给定 } f \in F, \quad \text{求 } u \in U, \quad \text{满足 } Lu = f. \quad (3.1)$$

我们将其记为问题 (U, F, L) , 称 u 为问题 (U, F, L) 的解, 而 f 为问题 (U, F, L) 的数据.

为了近似连续问题 (3.1), 我们引入一族离散问题

$$L_h u_h = R_h f, \quad (3.2)$$

其中 $u_h \in U_h \subset U$, $f_h \in F_h$, U_h 和 F_h 是有限维空间, R_h 是由 F 到 F_h 的算子, 而 L_h 是 U_h 到 F_h 的双射. 数值求解边值问题时, 下标 h 通常表示与网格剖分的对应关系. 类似地, 将这个问题记为问题 (U_h, F_h, L_h) , 称 u_h 为问题 (U_h, F_h, L_h) 的解, 而 f_h 为问题 (U_h, F_h, L_h) 的数据. 称 R_h 为 (U_h, F_h, L_h) 和 (U, F, L) 的联系算子. 下面称 $\langle \{(U_h, F_h, L_h)\}, \{R_h\}, (U, F, L) \rangle$ 为一个离散, 如果以系列问题 $L_h u_h = R_h f$ 的解为 (U, F, L) 的解的逼近.

在实际计算中, 通常用一系列离散问题近似原始的定义问题和用这些离散问题的解近似原问题的精确解, 并且要求原问题的精确解是系列离散问题的解的某种极限, 而且其逼近精度是可以控制和改进的. 这样的特征就是所说的离散方法的收敛性. 本节将给出收敛性的刻画和一个判断条件.

3.1 稳定性、相容性和收敛性

令 $\langle \{(U_h, F_h, L_h)\}, \{R_h\}, (U, F, L) \rangle$ 为一个离散. 令 u 和 f 是 (U, F, L) 的解和数据, 而 u_h 和 $R_h f$ 是 (U_h, F_h, L_h) 的解和数据. 相应于每个指标 h , 引入如下记法:

(1) 误差

$$\text{err}_h(u) := \|u - u_h\|_U;$$

(2) 稳定性常数

$$C_h^{\text{stab}} := \|L_h^{-1}\|_{\mathcal{L}(F_h, U_h)} = \sup_{f_h \in F_h} \frac{\|L_h^{-1} f_h\|_U}{\|f_h\|_{F_h}};$$

(3) 相容性误差

$$E_h^c(u) := \inf_{v_h \in U_h} (\|u - v_h\|_U + \|L_h v_h - R_h f\|_{F_h}).$$

定义 3 令 $\langle \{(U_h, F_h, L_h)\}, \{R_h\}, (U, F, L) \rangle$ 为一个离散, 则

(1) 称离散是一致稳定的, 如果 $C^{\text{stab}} := \sup_h C_h^{\text{stab}} < \infty$;

(2) 称离散关于 (U, F, L) 的解 u 是相容的, 如果 $\lim_{h \rightarrow 0} E_h^c(u) = 0$, 称离散是相容的, 如果离散关于 (U, F, L) 的任意解 u 都是相容的;

(3) 称离散关于 (U, F, L) 的解 u 是收敛的, 如果 $\lim_{h \rightarrow 0} \text{err}_h(u) = 0$, 称离散是收敛的, 如果离散关于 (U, F, L) 的任意解 u 都是收敛的.

3.2 等价定理

本节给出本文的主要结果. 首先引入算子稳定右可逆的概念.

定义 4 令 M 和 N 为两个赋范空间. 算子 $A: M \rightarrow N$ 称为稳定右可逆的, 如果存在一个常数 C , 使得任取 $g \in N$, 都存在 $f \in M$, 满足 $Af = g$ 及 $\|f\|_M \leq C\|g\|_N$.

本文的主要结果是下面的等价定理.

定理 5 令 $\langle \{(U_h, F_h, L_h)\}, \{R_h\}, (U, F, L) \rangle$ 为一个离散.

(1) 如果离散是收敛的, 那么,

(i) 离散是相容的;

(ii) 如果 $\{R_h\}$ 是一致稳定右可逆的, 那么离散是一致稳定的.

(2) 如果离散是一致稳定的和相容的, 那么离散是收敛的.

证明 (1) 取 $u \in U$, 则有

$$\|u - u_h\|_U = \inf_{v_h \in U_h} (\|u - v_h\|_U + \|v_h - u_h\|_U), \quad (3.3)$$

即

$$\|u - u_h\|_U = \inf_{v_h \in U_h} (\|u - v_h\|_U + \|L_h^{-1}(L_h v_h - R_h f)\|_U). \quad (3.4)$$

根据相容性误差定义和离散的提法, 易得

$$E_h^c(u) \leq \text{err}_h(u) \leq (1 + \|L_h^{-1}\|_{\mathcal{L}(F_h, U_h)}) E_h^c(u). \quad (3.5)$$

由此即得收敛的离散是相容的.

下面假设离散是收敛的, 且 $\{R_h\}$ 是一致稳定右可逆的, 即对任意 $f_h \in F_h$, 存在 $f = R_h^+ f_h \in F$, 满足

$$R_h f = f_h, \quad \|R_h^+ f_h\|_F \leq C_F \|f_h\|_{F_h}. \quad (3.6)$$

由于任取 $f \in F$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|L_h^{-1} R_h f - L^{-1} f\|_U = 0,$$

同时 L^{-1} 是有界算子, 我们得到 $\{L_h^{-1} R_h\}$ 在 F 上是逐点有界的. 从而根据一致有界原理, 存在常数 C_D , 使得 $\|L_h^{-1} R_h\|_{\mathcal{L}(F \rightarrow U_h)} \leq C_D$,

$$\|L_h^{-1} f_h\|_{U_h} = \|L_h^{-1} R_h R_h^+ f_h\|_{U_h} \leq C_D \|R_h^+ f_h\|_F \leq C_D C_F \|f_h\|_{F_h},$$

从而, $\|L_h^{-1}\|_{\mathcal{L}(F_h \rightarrow U_h)} \leq C_D C_F$, 即一致稳定性成立.

(2) 由于离散是一致稳定的, 由 (3.5) 即可得到相容的离散是收敛的.

等价定理得证. $\square$

注 6 定理 5 指出, 一个离散的相容性、稳定性和收敛性三者中任意两者可以推出第三者.

4 变分问题的内逼近

实际应用中, 很多模型问题是以变分问题的形式建立的. 本节将定理 3.2 应用于 Petrov-Galerkin 形式的变分问题离散格式的分析, 推导其具体形式.

令 V 和 Q 为两个 Hilbert 空间, 而 F 为 Q 的对偶空间. 令 $b(\cdot, \cdot)$ 为 $V \times Q$ 上的有界双线性形式, 满足 $b(u, q) \leq M \|u\|_V \|q\|_Q$, 并满足下面的 inf-sup 条件:

$$\inf_{u \in V} \sup_{q \in Q} \frac{b(u, q)}{\|u\|_V \|q\|_Q} = \inf_{q \in Q} \sup_{u \in V} \frac{b(u, q)}{\|u\|_V \|q\|_Q} = \beta > 0. \quad (4.1)$$

于是存在一个同构 $L: V \rightarrow F$, 使得

$$b(u, q) = \langle Lu, q \rangle_{Q' \times Q}, \quad \forall u \in V, \quad q \in Q. \quad (4.2)$$

考虑变分问题: 给定 $f \in F$, 求 $u \in V$, 使得

$$b(u, q) = \langle f, q \rangle, \quad \forall q \in Q. \quad (4.3)$$

或写成算子方程形式为

$$Lu = f, \quad f \in F. \quad (4.4)$$

取 $V_h \subset V$ 和 $Q_h \subset Q$ 为两个有限维子空间. 考虑下面的变分问题: 求 $u_h \in V_h$, 使得

$$b(u_h, q_h) = \langle f, q_h \rangle, \quad \forall q_h \in Q_h. \quad (4.5)$$

定义 $F_h = Q'_h$ 以及 $R_h : F \rightarrow F_h$ 满足

$$\langle R_h f, q_h \rangle_{Q'_h \times Q_h} = \langle f, q_h \rangle_{Q' \times Q}.$$

定义算子 $L_h : V_h \rightarrow Q'_h$ 如 $b(u_h, q_h) = \langle L_h u_h, q_h \rangle_{Q'_h \times Q_h}$ 对 $u_h \in V_h$ 及 $q_h \in Q_h$ 成立, 则问题 (4.5) 可等价地写为

$$L_h u_h = R_h f. \quad (4.6)$$

为应用定理 5, 我们需要验证下面的右可逆性质.

引理 7 算子 $\{R_h\}$ 是一致稳定右可逆的.

证明 由于 Q_h 是 Q 的一个闭子空间, Hilbert 空间 Q 可以正交分解为

$$Q = Q_h \oplus Q_h^\perp.$$

定义算子 $R_h^+ : F_h \rightarrow F$ 使之满足 $\langle R_h^+ f_h, v \rangle = \langle f_h, v \rangle$, 如果 $v \in Q_h$, $\langle R_h^+ f_h, v \rangle = 0$, $v \in Q_h^\perp$, 则易得 $\|R_h^+ f_h\|_F = \|f_h\|_{F_h}$. 事实上, 任取 $v \in Q$, 存在分解 $v = v_1 + v_2$, 使得 $v_1 \in Q_h$, $v_2 \in Q_h^\perp$. 这样的分解是唯一的, 并且 $\|v\|_Q^2 = \|v_1\|_Q^2 + \|v_2\|_Q^2$. 于是,

$$\|R_h^+ f_h\|_F = \sup_{v \in Q} \frac{\langle R_h^+ f_h, v \rangle}{\|v\|_Q} = \sup_{v \in Q} \frac{\langle f_h, v_1 \rangle}{\|v\|_Q} \leq \sup_{v \in Q} \frac{\langle f_h, v_1 \rangle}{\|v_1\|_Q} = \sup_{v_h \in Q_h} \frac{\langle f_h, v_h \rangle}{\|v_h\|_Q} = \|f_h\|_{F_h},$$

即 $\|R_h^+ f_h\|_F \leq \|f_h\|_{F_h}$. 另一方面,

$$\|f_h\|_{F_h} = \sup_{v_h \in Q_h} \frac{\langle f_h, v_h \rangle}{\|v_h\|_Q} = \sup_{v_h \in Q_h} \frac{\langle R_h^+ f_h, v_h \rangle}{\|v_h\|_Q} \leq \sup_{v \in Q} \frac{\langle R_h^+ f_h, v \rangle}{\|v\|_Q} = \|R_h^+ f_h\|_F,$$

即 $\|f_h\|_{F_h} \leq \|R_h^+ f_h\|_F$, 从而 $\|f_h\|_{F_h} = \|R_h^+ f_h\|_F$. 这验证了一致稳定右可逆的条件. 证毕. $\square$

如熟知, 根据 Babuska 理论, 问题 (4.5) 是良定的当且仅当下面的离散 inf-sup 条件成立:

$$\inf_{u_h \in V_h} \sup_{v_h \in Q_h} \frac{b(u_h, v_h)}{\|u_h\|_V \|v_h\|_Q} = \inf_{v_h \in Q_h} \sup_{u_h \in V_h} \frac{b(u_h, v_h)}{\|u_h\|_V \|v_h\|_Q} = \beta_h > 0. \quad (4.7)$$

进一步地, 问题 (4.5) 是一致稳定的, 如果 (4.7) 一致成立.

利用定理 5, Petrov-Galerkin 格式的误差分析有如下具体形式.

定理 8 令 (4.5) 为问题 (4.3) 的一个离散, 并对相同的 f , 令 u 和 u_h 分别为问题 (4.3) 和 (4.5) 的解, 则

(1) 如果离散的 inf-sup 条件 (4.7) 一致成立, 即 $\beta_h > \beta_0 > 0$, 且离散是相容的, 则离散是收敛的,

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\beta_0} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V; \quad (4.8)$$

(2) 如果离散是收敛的, 则离散是相容的, 即 $\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \rightarrow 0$, 随 $h \rightarrow 0$, 且离散的 inf-sup 条件 (4.7) 一致成立, 即存在常数 $\beta_0 > 0$, 使得 $\beta_h > \beta_0$.

证明 (1) 由于离散的 inf-sup 条件 (4.7) 一致成立, 故离散是一致稳定的, 利用定理 3.2, 可由离散的相容性得到离散的收敛性. 下面证明 (4.8). 定义 $P_h: V \mapsto V_h$ 如 $b(P_h u, q_h) = b(u, q_h), \forall q_h \in Q_h$. 易知 $P_h^2 = P_h$, 且 (参见文献 [11, 12])

$$\|P_h\|_{\mathcal{L}(V,V)} = \|I - P_h\|_{\mathcal{L}(V,V)}. \quad (4.9)$$

根据假设,

$$\beta_h \|P_h u\|_V \leq \sup_{q_h \in Q_h} \frac{b(P_h u, q_h)}{\|q_h\|_Q} = \sup_{q_h \in Q_h} \frac{b(u, q_h)}{\|q_h\|_Q}.$$

于是, $\|P_h u\|_V \leq \frac{M}{\beta_h} \|u\|_V, \forall u \in V$, 即 $\|P_h\| \leq M/\beta_h$. 这样, 对任意 $v_h \in V_h$ 和任意 h , 都成立

$$\|u - u_h\|_V = \|u - P_h u\|_V = \|(I - P_h)(u - v_h)\| \leq \|I - P_h\| \|u - v_h\|_V \leq \frac{M}{\beta_h} \|u - v_h\|_V.$$

从而 (4.8) 得证.

(2) 由于离散是收敛的, 由定理 3.2 可得离散是相容的. 注意到 $V_h \subset V$ 和 $Q_h \subset Q$, 此处的相容性误差即为函数空间 V_h 对 V 的逼近性误差 $\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$, 从而得到 $\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \rightarrow 0$, 随 $h \rightarrow 0$. 由引理 7 知, $\{R_h\}$ 是一致稳定右可逆的, 所以, 由定理 3.2, 离散是一致稳定的, 即算子 $\{L_h\}$ 是一致下有界的, 从而, 离散的 inf-sup 条件 (4.7) 一致成立, 即存在常数 $\beta_0 > 0$, 使得 $\beta_h > \beta_0$.

从而离散的稳定性、相容性和收敛性的等价关系得证. $\square$

注 9 本处所述结果与原始形式的 Babuska 理论结果微有不同, 后者形为

$$\|u - u_h\|_V \leq \left(1 + \frac{M}{\beta_0}\right) \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

此估计式中的常数 1 是由 Xu 和 Zikatanov^[12] 首次去掉的.

5 Poisson 方程有限元格式分析

本节以 Poisson 方程边值问题及其典型离散格式为例, 阐明前述一般估计理论的应用形式. 在本文余下部分, 同于构造离散问题的一般过程, 我们首先剖分计算区域形成网格 $\mathcal{T}_h$, 再在网格上离散边值问题成离散问题. 我们用 h 表示网格的尺寸, 并用做离散问题的指标参数. 对于 $\mathcal{T}_h$, 用 $\mathcal{N}_h$ 表示其节点集合, 用 $\mathcal{N}_h^i$ 表示其内部节点集合.

5.1 Poisson 方程及其稳定性

令 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为一个有界区域, 我们考虑二阶椭圆边值问题

$$-\Delta u = f, \quad x \in \Omega, \quad u = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (5.1)$$

关于该算子 $-\Delta$ 的定解问题是适定和稳定的. 具体地, 取 $U = H_0^1(\Omega)$, $F = H^{-1}(\Omega)$. 这样, Poisson 方程 (5.1) 可写成变分形式: 给定 $f \in H^{-1}(\Omega)$, 求 $u \in H_0^1(\Omega)$ 满足

$$(\nabla u, \nabla v) = \langle f, v \rangle, \quad v \in H_0^1(\Omega). \quad (5.2)$$

在这种情形下, $L = -\Delta: U \mapsto F$ 是一个同构算子 (在弱意义下或分布意义下), 并且

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \lesssim \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

下面将此问题记为 $(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega), -\Delta)$.

5.2 Poisson 方程的协调有限元方法

为用有限元方法离散边值问题, 我们需用到 Poisson 方程的变分形式, 其提法如 (5.2). 这时 $-\Delta$ 是从 $U = H_0^1(\Omega)$ 向 $F = H^{-1}(\Omega)$ 的一个同构.

取有限元空间 $U_h \subset U$, 它是定义在给定网格 $\mathcal{T}_h$ 上的连续分片多项式空间. 有限元问题的提法是

$$\text{求 } u_h \in U_h, \text{ 使得 } (\nabla u_h, \nabla v_h) = \langle f, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in U_h. \quad (5.3)$$

自然地, 在 U_h 上赋予与 U 相同的范数. 同时选取 $F_h = U_h'$, 并赋予离散 H^{-1} 范数

$$\|f_h\|_{-1,h} = \sup_{v_h \in U_h} \frac{(f_h, v_h)}{\|v_h\|_U}.$$

这样, 我们定义离散算子 $L_h : U_h \mapsto F_h$ 为

$$(L_h u_h, v_h) = (\nabla u_h, \nabla v_h), \quad \forall v_h \in U_h,$$

以及转移算子 $R_h : F \mapsto F_h$ 为

$$(R_h f, v_h) = \langle f, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in U_h.$$

从实际计算来看, R_h 与 L^2 投影可视为等效的. 利用这些记号, 我们将有限元问题记为

$$L_h u_h = f_h = R_h f. \quad (5.4)$$

将这个变分问题视为特殊的 Petrov-Galerkin 形式, 其误差分析由第 4 节的讨论直接得到.

5.3 线性元格式的超相容性与超接近性质

Poisson 方程的线性元是最低阶的有限元格式. 该单元在有限元方法的发展历史上占有重要的地位, 并因其简单易行, 在实际计算问题中获得非常广泛的应用. 线性元以节点处的取值为自由度, 可以自然地看成一种差分格式; 在每个节点 x 处, 其对应的模版 (stencil) 为

$$\frac{1}{h^2} (\nabla u_h, \nabla \phi_x) = \frac{1}{h^2} (f, \phi_x), \quad (5.5)$$

这里 ϕ_x 为对应于该节点的节点基函数, 而上式导出了关于各节点处函数值的一个方程组. 本节举例说明, 根据差分方法的传统概念, 即使在有限元逼近精度可以较好保证的网格上, 该格式也可能是不相容的, 即一般而言,

$$\max_{x \in \mathcal{N}_h} \frac{1}{h^2} [(\nabla u_I, \nabla \phi_x) - (f, \phi_x)] \rightarrow 0, \quad \text{当 } h \rightarrow 0 \quad (5.6)$$

是不成立的, 这里 u_I 是真解向线性元空间的插值; 进而证明, 如果这样的相容性是成立的, 则会存在一些超接近 (supercloseness) 现象.

5.3.1 一个 (5.6) 不成立的例子

我们考虑单位正方形区域, 并在上面做一致十字交错网格, 其中将每边均匀分成 n 段. 得到的网格由等腰直角三角形组成, 其边长分别为 $h \equiv (\sqrt{2}n)^{-1}$ 和 $\sqrt{2}h$. 图 1 例示了一个 $n = 2$ 的网格剖分. 我们考虑这个网格上的线性元离散及相应的有限差分形式. 事实上, 这个三角形网格的诸节点恰好重合于一个正方形网格剖分的节点, 若令 A_h 和 Δ_h 分别为该三角形网格线性元刚度矩阵和正方形网格五点差分格式的模版矩阵, 则 $A_h = h^2 \Delta_h$.

图 1 一个剖分实例, $n = 2$

在这样的网格上, 所有的节点可以分成两类, 一类节点各有 8 个相邻单元, 如图 2 中的点 (i, j) , 另一类单元各有 4 个相邻单元, 如图 2 中的点 $(i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2})$. 我们分别针对这两类点, 计算每个节点处的模版相容性误差.

直接计算可得, 在点 (x_i, y_j) 处,

$$\begin{aligned} (\nabla u_I, \nabla \phi_{i,j}) &= 4u_{i,j} - (u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) \\ &= h^2(u_{xx}(x_i, y_j) + u_{yy}(x_i, y_j)) + \mathcal{O}(h^4), \end{aligned} \quad (5.7)$$

并且

$$(f, \phi_{i,j}) = f_{i,j}(1, \phi_{i,j}) + \mathcal{O}(h^4)(f_{xx} + f_{yy} + f_{xy}) = \frac{4}{3}h^2 f_{i,j} + \mathcal{O}(h^4)(f_{xx} + f_{yy} + f_{xy}). \quad (5.8)$$

而在点 $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}})$ 处,

$$\begin{aligned} (\nabla u_I, \nabla \phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) &= 4u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) \\ &= h^2(u_{xx}(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}) + u_{yy}(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}})) + \mathcal{O}(h^4), \end{aligned} \quad (5.9)$$

图 2 两种不同点

以及

$$\begin{aligned} (f, \phi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}) &= f_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}(1, \phi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(h^4)(f_{xx} + f_{yy} + f_{xy})_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{3}h^2 f_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(h^4)(f_{xx} + f_{yy} + f_{xy})_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

于是可得

$$\frac{1}{h^2}((\nabla u_I, \nabla \phi_{i,j}) - (f, \phi_{i,j})) = \frac{1}{3}f(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h^2),$$

以及

$$\frac{1}{h^2}((\nabla u_I, \nabla \phi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}) - (f, \phi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}})) = -\frac{1}{3}f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(h^2).$$

可以看出, 对非平凡的 f , 差分格式 (5.5) 在传统意义下是不相容的.

5.3.2 超相容性与超接近性质

下面证明, 如果有限元格式具有类似于差分格式的相容性, 那么, 该方法具有一定的超接近性质, 此处考虑凸区域和拟一致网格剖分.

定理 10 令 u 和 u_h 分别为 (5.2) 和 (5.3) 的解, u_I 为 u 向线性元空间的插值. 如果

$$\frac{1}{h^2} \max_{x \in \mathcal{N}_h^I} ((\nabla u_I, \nabla \phi_x) - (f, \phi_x)) = O(h^\delta), \quad \delta > 0, \quad (5.11)$$

那么,

$$\|\nabla(u_h - u_I)\| = O(h^{1+\delta/2}).$$

证明 记 $e_h = u_h - u_I$, 则任取 $v_h \in U_h$,

$$\begin{aligned} a(e_h, v_h) &= \sum_{x \in \mathcal{N}_h^I} v_h(x) a(e_h, \phi_x) = \sum_{x \in \mathcal{N}_h^I} v_h(x) ((f, \phi_x) - a(u_I, \phi_x)) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{N}_h^I} v_h(x) O(h^4) = O(h^\delta) \sum_{x \in \mathcal{N}_h^I} h^2 |v_h(x)| \leq O(h^\delta) \|v_h\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

取 $v_h = e_h$, 即得

$$\|\nabla(u_h - u_I)\| = O(h^{1+\delta/2}).$$

证毕. □

注 11 本例指出, 变分形式的离散格式不一定具有逐点意义下的相容性质; 而如果变分离散格式具有如 (5.11) 形式的 (正数阶) 相容误差, 则可伴有超收敛现象.

例 12 (一个 (5.11) 成立的例子) 取 Ω 为单位正方形, 并在 Ω 上构造两个网格 $\mathcal{T}_h^1$ 和 $\mathcal{T}_h^2$. $\mathcal{T}_h^1$ 由长度为 h 的一致正方形构成, 将 $\mathcal{T}_h^1$ 用平行线均分各正方形单元成两个等腰直角三角形后得到网格 $\mathcal{T}_h^2$, 见图 3. 我们在 $\mathcal{T}_h^2$ 上构造线性元离散问题. 直接重复第 5.3.1 小节的分析演算, 可以得到

$$\frac{1}{h^2} \max_{x \in \mathcal{N}_h^I} ((\nabla u_I, \nabla \phi_x) - (f, \phi_x)) = O(h^2). \quad (5.12)$$

图 3 (a) 网格剖分 $\mathcal{T}_h^1$; (b) 网格剖分 $\mathcal{T}_h^2$

6 结论

本文讨论了用稳定性、相容性和收敛性来刻画和分析数值离散格式的理论框架和实际应用. 具体地, 对比较广的一类问题及其数值离散, 本文定义了离散的稳定性、相容性和收敛性, 并分析这三者间的包含关系. 本文的理论结果说明了稳定性分析和相容性分析在离散格式收敛性分析中的必要性, 并一般性地指出进行前两种分析的形式和要求. 这套理论框架可以用来分析不同问题和不同离散格式, 而对相同的离散问题, 该框架也可以甄别和容纳不同的相容性和相应的收敛性; 很多经典结果实际上是这个一般结果的某些具体形式. 此外, 我们例证较好的相容性可以对应更好的收敛性或逼近性质, 从而给出改进算法的一个方向.

用稳定性、相容性和收敛性来刻画和分析数值离散格式是数值分析的基础性内容, 本文的工作原则上可以向更一般的问题形式推广. 下一步, 我们将研究如何在更一般的条件设定下建立理论框架和如何针对更一般的数值格式应用该框架进行分析, 并进一步探讨比较一般和抽象的理论研究对具体格式设计的指导机制.

致谢 非常感谢林群老师多年来的指导、关怀与帮助.

参考文献

- 1 Courant R, Friedrichs K, Lewy H. Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen. Physik Math Ann, 1928, 100: 32–74
- 2 Charney J G, Fjortoft R, von Neumann J. Numerical integration of the barotropic vorticity equation. Tellus, 1950, 2: 237–254
- 3 von Neumann J, Goldstine H H. Numerical inverting of matrices of high order. Bull Amer Math Soc, 1947, 53: 1021–1099
- 4 Lax P, Richtmyer R. Survey of the stability of linear finite difference equations. Comm Pure Appl Math, 1956, 9: 267–293
- 5 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义 (上册). 北京: 北京大学出版社, 1987
- 6 Lin Q, Xu J. Linear finite elements with high accuracy. J Comput Math, 1985, 3: 115–133
- 7 朱起定, 林群. 有限元超收敛理论. 长沙: 湖南科技出版社, 1989
- 8 林群, 严宁宁. 高效有限元构造与分析. 保定: 河北大学出版社, 1996
- 9 Lin Q, Lin J F. Finite Element Methods: Accuracy and Improvement. Beijing: Science Press, 2006

- 10 Xu J. Stability, Consistency, Convergence and Superconvergence — some simple observations. In: Finite Element Circus. Syracuse: Syracuse University, 2004
- 11 Kato T. Estimation of iterated matrices with application to von Neumann condition. Numer Math, 1960, 2: 22–29
- 12 Xu J, Zikatanov L. Some observations on Babuška and Brezzi theories. Numer Math, 2003, 94: 195–202

On the stability, consistency and convergence of numerical schemes

XU JinChao

Abstract In this paper, we present a theoretical framework, which describes the numerical schemes with consistency, stability and convergence; moreover, we construct the equivalence among these three ends. Examples are given to show the application of the theory in the analysis of numerical schemes.

Keywords stability, consistency, convergence, equivalence theorem, linear element, supercloseness

MSC(2010) 65G99, 65J05, 65L20, 65M60, 65N30

doi: 10.1360/N012015-00132