论 文

压缩感知非凸优化超宽带信道估计方法研究

王沙飞^{①*}, 杨俊安^②, 温志津^①^① 中国北方电子设备研究所, 北京 100191^② 电子工程学院, 合肥 230037

* 通信作者. E-mail: 787274527@qq.com

收稿日期: 2014-09-08; 接受日期: 2014-09-30

摘要 超宽带信号由于传输路径较复杂且功率谱密度较低, 准确的信道估计十分重要. 但是由于其带宽较宽, 难以直接采样. 压缩感知理论提供了一种可行的低速采样方法. 目前的压缩感知超宽带信道估计方法一般采用 l_1 范数约束的凸优化形式或无稀疏性的 l_2 范数约束形式, 对目标向量的稀疏性约束不强, 而拥有最强稀疏性的 l_0 范数又缺少有效的重构算法. 针对上述问题, 本文设计一种基于非凸优化算法的压缩感知超宽带信道估计方法. 首先将目标函数设置成 l_p 范数约束的非凸优化形式, 然后利用凸函数较易求得极值的性质, 将原非凸函数组合成为凸函数形式的目标函数, 并通过每步迭代凸函数对非凸函数的逼近来求解目标函数, 进而估计出原信道. 由于 l_p 范数更接近于 l_0 范数, 所以对目标向量稀疏性的约束更强. 实验结果表明, 所提方法相对于现有的压缩感知超宽带信道估计方法能够有效降低重构误差.

关键词 超宽带 信道估计 压缩感知 非凸优化 l_p 范数

1 引言

超宽带 (ultra wideband, UWB) 通信技术是一种崭新的无线通信技术, 拥有诸多优点和潜力, 在民用和军事无线通信领域都有着广泛的应用前景, 尤其在卫星通信与干扰方面的应用前景不可估量.

UWB 信号的时域波形一般为极窄脉冲, 对应至少 500 MHz 的带宽, 再加上发射信号极低的功率谱密度, 要想从复杂电磁环境中准确检测出 UWB 通信信号并实现发送信息的正确解调, 对 UWB 通信信道的估计十分重要^[1]. 利用得到的信道估计参数包括多径的时延和增益可以确定 RAKE 接收机的抽头系数或产生参考模板信号, 从而更好地检测接收 UWB 信号, 实现信息解调. 但是由于 UWB 信号带宽较宽, 如果严格按照 Nyquist 采样定律进行采样, 目前的硬件水平难以实现. 压缩感知理论^[2]指出, 只要原信号满足一定条件^[3], 就可以从远小于原信号维度的投影值中高概率恢复出原信号. 利用 UWB 信道冲激响应在时域中的稀疏性^[4], 文献 [5~7] 分别使用不同的压缩感知重构算法进行了 UWB 信道估计, 研究结果表明, 使用压缩感知理论进行 UWB 信道估计可以大大降低采样速率, 便于硬件实现.

目前用于 UWB 信道估计的压缩感知重构算法主要有匹配追踪 (matching pursuit, MP)、正交匹配追踪 (orthogonal matching pursuit, OMP) 和基追踪 (basis pursuit, BP) 算法^[8] 等等. 不同算法采

引用格式: 王沙飞, 杨俊安, 温志津. 压缩感知非凸优化超宽带信道估计方法研究. 中国科学: 信息科学, 2014, 44: 1628–1638, doi: 10.1360/N112014-00250

用了不同的目标函数, 在求解过程中对目标值的重构有着不同的要求. 目标函数对重构值的稀疏性约束越强, 最终的重构效果越好. BP 算法由于对重构向量采用了 ℓ_1 范数的凸优化约束形式, 所以重构效果优于采用 ℓ_2 范数约束的 OMP 算法和无约束的 MP 算法.

实际上, ℓ_1 范数对重构值稀疏性的约束并不如 ℓ_0 范数, ℓ_0 范数对稀疏性的约束是最强的. 但是由于最小化 ℓ_0 范数是一个非凸优化 (non-convex optimization) 问题, 要遍历所有可能的解, 是一个 NP-hard 问题, 目前还没有较为有效的算法. 而尽管没有理论上全局最优解唯一性的保证, 实践中很多非凸的重构模型在低采样率下都优于 ℓ_1 范数重构模型 [9,10]. 文献 [11] 提出了一种 ℓ_p 范数重构算法, 称之为凸函数逼近最小化凹函数 (minimizing a concave function via a convex function approximation) 算法. 由于 ℓ_p 范数是一个非凸函数, 所以重构过程是一个非凸优化问题. 但可以用凸函数逼近的形式, 通过迭代逐步最小化原非凸函数, 完成重构. 本文将凸函数逼近最小化凹函数算法引入到压缩感知 UWB 信道估计中, 通过对信道向量采用稀疏性更强的 ℓ_p 范数约束, 将最小化目标函数转化为对信道向量的重构. 仿真结果表明该方法相对于现有的压缩感知 UWB 信道估计方法能够有效提升重构性能.

本文结构如下: 第 2 部分简要介绍压缩感知 UWB 信道估计的原理, 并分析现有方法存在的问题. 第 3 部分详细介绍压缩感知非凸优化 UWB 信道估计的数学原理和实现步骤. 第 4 部分通过仿真实验验证本文结论. 第 5 部分总结全文.

2 压缩感知 UWB 信道估计及存在的问题

2.1 压缩感知 UWB 信道估计的基本思路

脉冲幅度调制 UWB 的发送信号 $s(t)$ 为

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_i p(t - iT_P) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{N_s-1} b_{ij} p(t - iT_P - jT_S) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{N_s-1} \sum_{k=0}^{N_f-1} b_{ij} p(t - iT_P - jT_S - kT_f). \end{aligned} \quad (1)$$

式 (1) 中, $p(t)$ 为发送脉冲, 按照 UWB 信号的定义, 其持续时间一般是纳秒或皮秒量级; T_P , T_S , T_f 分别为数据包周期、帧周期和单个脉冲周期; N_s 为一个数据包内的码元个数; b_i 为第 i 个数据包内的所有码元, b_{ij} 为其中的第 j 个码元; N_f 为一帧内的脉冲个数, 即一帧内的所有 N_f 个脉冲信号都用来传送单个码元 b_{ij} ; 信息码元采用双极性全占空码.

$s(t)$ 经过 UWB 信道 $h(t)$ 传输后的接收信号为

$$r(t) = s(t) * h(t) + w(t) = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l s(t - \tau_l) + w(t). \quad (2)$$

式 (2) 中, L 为信道总多径数; α_l 和 τ_l 分别为其中第 l 条多径的增益和时延; $w(t)$ 为加性噪声. 式 (2) 的向量形式为

$$\mathbf{r} = \mathbf{S}\mathbf{h} + \mathbf{w}, \quad (3)$$

式 (3) 中, $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{h}$ 分别为接收信号和信道冲激响应序列; $\mathbf{S}$ 为发送信号 $s(t)$ 扩充成的矩阵; $\mathbf{w}$ 为噪声序列.

压缩感知理论指出, 如果信号在某个变换域中是稀疏的, 最终可以从远小于原信号维度的投影值中高概率重构出原信号. 在 UWB 信道丰富的多径响应中, 大约 $1/10 \sim 1/3$ 的非零多径就占有整个信道冲激响应 80% 以上的能量^[12], 即信道冲激响应 $h(t)$ 具有时域稀疏性. 用 $M \times N$ 维随机矩阵 ($M \ll N$) 作为投影矩阵 Φ 对接收信号进行欠采样, 得到投影值为

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{r} = \Phi \mathbf{S} \mathbf{h} + \Phi \mathbf{w} = \Theta \mathbf{h} + \mathbf{v}, \quad (4)$$

式 (4) 中, 投影值 $\mathbf{y}$ 为 $M \times 1$ 维列向量; $\mathbf{v}$ 是与信号无关的噪声分量.

式 (4) 是压缩感知理论的标准数学模型, 信道估计问题即转化为对信道向量 $\mathbf{h}$ 的重构. 对式 (4) 的求解进一步转化为最小化 ℓ_0 范数问题

$$\min_{\mathbf{h}} \|\mathbf{h}\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y} = \Theta \mathbf{h}. \quad (5)$$

但是, 它需要遍历目标向量 $\mathbf{h}$ 中所有非零项位置的 C_N^K 种可能的线性组合才能得到最优解. 因此, 求解式 (5) 的数值计算极不稳定, 是一个 NP-hard 问题. 文献 [8] 指出, 求解 ℓ_1 范数优化问题可以近似得到相同的解, 即目标函数的约束形式变为

$$\min_{\mathbf{h}} \|\mathbf{h}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y} = \Theta \mathbf{h}. \quad (6)$$

式 (6) 就是 BP 算法的目标函数, 对该目标函数的求解是线性规划 (linear programming, LP) 问题^[13], 可以使用诸如内点法^[14]或单纯形法的 LP 算法进行求解.

2.2 现有方法存在的问题

对目标向量的重构效果主要是由其稀疏约束的形式决定的, 但是现有方法在稀疏约束模型方面存在一些问题.

从式 (5) 到式 (6) 的转化要求投影矩阵 Φ 与稀疏变换矩阵 $\mathbf{S}$ 的乘积矩阵 Θ 满足所谓受限等距特性 (restricted isometry principle, RIP) 准则. 但在实际应用中, 关于矩阵是否满足 RIP 准则的条件较难验证^[15], 所以一般采用要求投影矩阵与稀疏变换矩阵严格不相关作为 RIP 准则的等价条件.

文献 [16] 进一步指出, 不相关是指两者之间的互相关度满足

$$\|\mathbf{h}\|_0 < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\mu\{\Phi \mathbf{S}\}} \right), \quad (7)$$

式 (7) 中, 互相关度为

$$\mu\{\Phi \mathbf{S}\} = \mu\{\Theta\} = \max_{1 \leq i, j \leq N, i \neq j} \frac{|\boldsymbol{\theta}_i^T \boldsymbol{\theta}_j|}{\|\boldsymbol{\theta}_i\| \cdot \|\boldsymbol{\theta}_j\|}. \quad (8)$$

其数学意义是矩阵 Θ 中两个不同原子相似程度的最大值. 虽然目前最常用的投影矩阵即随机高斯矩阵与绝大多数固定正交基都不相关, 但是由于 UWB 信道稀疏变换矩阵 $\mathbf{S}$ 是由 UWB 导频信号扩充成的, 为了利用 UWB 信道的时域稀疏性, 该矩阵只被设计成最简单的单参数波形库即时移, 在冗余度等方面远不能和 Gabor 变换或 Chirplet 变换^[17]所构成的多参数波形库相提并论^[18], 与随机高斯矩阵的互相关度也无法满足式 (7) 中精确重构的要求, 这也影响了 BP 算法的重构性能.

而 OMP 算法的目标函数约束形式为

$$\min_{\mathbf{h}} \left\| \mathbf{y} - \Theta \hat{\mathbf{h}} \right\|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y} = \Theta \mathbf{h} + \mathbf{v}, \quad (9)$$

式 (9) 中, $\hat{\mathbf{h}}$ 为信道估计值. 这种形式实际上借鉴了基追踪去噪 (basis pursuit de-noising, BPDN) 算法^[8] 中对重构误差的约束, 但是忽略了对目标向量稀疏性的约束. 并且 ℓ_2 范数无法体现信号的稀疏性. 所以 OMP 算法的重构效果要逊于 BP 算法. MP 算法则直接选择原子库中与当前迭代残差最匹配的原子进行重构, 对目标向量稀疏性和重构误差都没有约束, 所以重构效果更差.

UWB 信道稀疏变换矩阵与随机投影矩阵并非严格不相关, 由此影响 ℓ_1 范数的求解效果, 且 ℓ_2 范数无法体现信号的稀疏性, 同时 ℓ_0 范数不便于求解, 因此考虑对压缩感知 UWB 信道估计采用 ℓ_p 范数约束形式进行求解, 以期进一步降低重构误差.

3 基于压缩感知非凸优化的 UWB 信道估计

3.1 数学原理

凸优化问题具有这样的性质: 设 R 为凸集, $f(x)$ 为凸函数, 则规划问题

$$\begin{cases} \min f(x), \\ x \in R, \end{cases} \quad (10)$$

的任意局部最优解均为全局最优解, 且该最优解必惟一^[19]. 由此可见, 如果将压缩感知 UWB 信道估计定义为凸优化问题, 则重构向量是最优且惟一的.

ℓ_p 范数的定义如下:

$$\|\mathbf{a}\|_p = \left(\sum_{i=1}^N |\mathbf{a}_i|^p \right)^{1/p}, \quad (11)$$

式 (11) 中, $0 < p < 1$. 当 $p = 0$ 时, ℓ_p 范数即 ℓ_0 范数实际上表示目标向量 $\mathbf{a}$ 中非零项的个数, 所以 ℓ_0 范数对稀疏性的约束性最强. 但是由于当 $0 < p < 1$ 时, 目标函数不再是凸优化形式, 给求解带来了很大问题.

图 1 为凸优化与非凸优化问题的差异, 其中 $f(x)$ 为凸函数, $g(x)$ 为非凸函数, R 为凸集. 可以看出凸函数的局部最优解 x_0 就是惟一的全局最优解. 非凸优化的全局最优解虽然也只有一个 x_0 , 但是有很多局部最优解, 并且 p 值越接近于 0, 局部最优解越多, ℓ_0 范数就有 $C_N^K - 1$ 个局部最优解. 当目标函数维度很大时遍历这些解在时间上是近似无穷的, 是一个 NP-hard 问题.

由于凸函数相比非凸函数较易取得最优解, 因此考虑利用凸优化方法来求解非凸优化问题^[20]. 假设在 $x \geq 0$ 上有单调递减的凹函数 $g(x)$, 令

$$f(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) - \frac{g''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2. \quad (12)$$

由于 $g(x)$ 为凹函数, 所以在 $x \geq 0$ 内有 $g''(x_0) > 0$. 考虑到 $f''(x) = -g''(x_0)$, 所以在 $x \geq 0$ 内 $f''(x) < 0$, 即 $f(x)$ 凸. 由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 处切线的斜率同为 $g'(x_0)$, 而 $g(x)$ 是单调递减的, 则 $g(x)$ 的切线斜率为负. 因此 $f(x)$ 在 $x \geq 0$ 上也单调递减. 由此可见, 如果能够找到点 $x = x_1$ 使 $g(x_0) > g(x_1)$, 那么也可以得到 $f(x_0) > f(x_1)$. 所以最小化凹函数 $g(x)$ 就转化为最小化凸函数 $f(x)$.

综上, 求点 $x = x_1$ 使 $g(x_0) > g(x_1)$ 的非凸优化问题就转化为如下的凸优化问题:

$$x_1 = \arg \min_x f(x) = \arg \min_x g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) - \frac{g''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2. \quad (13)$$

图 1 凸优化与非凸优化的差别

Figure 1 Difference between convex and non-convex optimization. (a) Convex; (b) non-convex

3.2 实现步骤

令 $g_p(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\|_p^p$, 则基于压缩感知非凸优化 UWB 信道估计的目标函数为

$$\min_{\mathbf{h}} g_p(\mathbf{h}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y} = \boldsymbol{\Theta} \mathbf{h}, \quad (14)$$

由于 $g_p(\mathbf{h})$ 为非凸函数, 参照式 (13) 的形式, 目标函数可以转化为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{h}}_{k+1} = \arg \min_{\mathbf{h}} g_p(\hat{\mathbf{h}}_k) + (\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}_k)^T \nabla g_p(\hat{\mathbf{h}}_k) \\ - (\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}_k)^T \frac{\nabla^2 g_p(\hat{\mathbf{h}}_k)}{2!} (\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}_k) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y} = \boldsymbol{\Theta} \mathbf{h} + \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (15)$$

式 (15) 中, $\hat{\mathbf{h}}_k$ 为当前迭代信道向量 $\mathbf{h}$ 的重构值; $\hat{\mathbf{h}}_{k+1}$ 为下一步迭代的重构向量. 利用 Lagrangian 乘数法构造辅助函数为

$$\mathbf{L}(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = g_p(\hat{\mathbf{h}}_k) + (\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}_k)^T \nabla g_p(\hat{\mathbf{h}}_k) - (\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}_k)^T \frac{\nabla^2 g_p(\hat{\mathbf{h}}_k)}{2!} (\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}_k) + \boldsymbol{\lambda}^T (\boldsymbol{\Theta} \mathbf{h} - \mathbf{y}). \quad (16)$$

式 (16) 中, $\boldsymbol{\lambda}$ 是一个与投影向量 $\mathbf{y}$ 同维度的 Lagrangian 乘数向量. 假定 $\mathbf{L}(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ 在更新后的重构向量 $\hat{\mathbf{h}}_{k+1}$ 和乘数 $\boldsymbol{\lambda}_{k+1}$ 向量上取得最小值, 那么将 $\mathbf{L}(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ 分别对 $\mathbf{h}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 求偏导得

$$\left. \frac{\partial \mathbf{L}(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{h}} \right|_{\substack{\mathbf{h}=\hat{\mathbf{h}}_{k+1} \\ \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_{k+1}}} = \nabla g_p(\hat{\mathbf{h}}_k) - \nabla^2 g_p(\hat{\mathbf{h}}_k)(\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}_k) + \boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1} = 0, \quad (17)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{L}(\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right|_{\substack{\mathbf{h}=\hat{\mathbf{h}}_{k+1} \\ \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_{k+1}}} = \boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1} - \mathbf{y} = 0. \quad (18)$$

分别用 $\mathbf{g}_k$ 和 $\boldsymbol{\Xi}_k$ 来表示当前迭代原非凸函数 $g_p(\mathbf{h})$ 的一阶导向量 (梯度向量) 和二阶导矩阵的逆矩阵 (Hessian 矩阵), 即 $\mathbf{g}_k = \nabla g_p(\hat{\mathbf{h}}_k)$, $\boldsymbol{\Xi}_k = (\nabla^2 g_p(\hat{\mathbf{h}}_k))^{-1}$. 其中的元素分别为

$$\mathbf{g}_k(i) = p \hat{\mathbf{h}}_k(i) |\hat{\mathbf{h}}_k(i)|^{p-2}, \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\Xi}_k(i, i) = \frac{1}{p(p-1)} |\hat{\mathbf{h}}_k(i)|^{2-p}. \quad (20)$$

图 2 非凸优化计算流程

Figure 2 Computational procedure of non-convex optimization

式 (19) 中, $\hat{h}_k(i)$ 表示当前迭代重构向量 $\hat{h}_k$ 中的第 i 个值; $g_k(i)$ 表示梯度向量 g_k 中的第 i 个值; $\Xi_k(i, i)$ 表示 Hessian 矩阵 Ξ_k 中的第 i 个对角元素.

由式 (17) 可得

$$\hat{h}_{k+1} = \hat{h}_k + \Xi_k(g_k + \Theta^T \lambda_{k+1}). \quad (21)$$

将式 (21) 代入式 (18), 可得到更新后的 Lagrangian 乘数向量为

$$\lambda_{k+1} = -(\Theta \Xi_k \Theta^T)^{-1} \Theta \Xi_k g_k. \quad (22)$$

由式 (19) 和 (20) 可知

$$\Xi_k g_k = \frac{1}{p(p-1)} \begin{bmatrix} |\hat{h}_k(1)|^{2-p} & & & \\ & |\hat{h}_k(2)|^{2-p} & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\hat{h}_k(N)|^{2-p} \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} \hat{h}_k(1) |\hat{h}_k(1)|^{p-2} \\ \hat{h}_k(2) |\hat{h}_k(2)|^{p-2} \\ \vdots \\ \hat{h}_k(N) |\hat{h}_k(N)|^{p-2} \end{bmatrix} = \frac{1}{p-1} \hat{h}_k. \quad (23)$$

则将式 (22) 代入式 (21) 得

$$\hat{h}_{k+1} = \frac{p}{p-1} \hat{h}_k - \frac{1}{p-1} \Xi_k \Theta^T (\Theta \Xi_k \Theta^T)^{-1} \Theta \hat{h}_k. \quad (24)$$

根据式 (20) 和 (24), 下一步迭代的重构向量 $\hat{h}_{k+1}$ 完全由当前迭代的重构值 $\hat{h}_k$ 计算得到. 只要在迭代开始前设置一个初始重构值, 算法通过迭代就可以逐步完成对信道向量 h 的精确重构. 其计算流程如图 2 所示.

由此, 基于压缩感知非凸优化的 UWB 信道估计方法具体流程如下:

Step 1: 设定非凸优化的 p 值, 限定 $p \in (0, 1)$; 令初始重构向量 $\hat{h}_0$ 为最小二乘的解, 即 $\hat{h}_0 = \Theta^T (\Theta \Theta^T)^{-1} y$; 令初始调整参数 $q_0 = \frac{p}{p-1}$.

Step 2: 在第 k 步迭代中, 利用式 (20) 计算 Hessian 矩阵 Ξ_k , 并计算

$$\tilde{h}_k = \Xi_k \Theta^T (\Theta \Xi_k \Theta^T)^{-1} y. \quad (25)$$

Step 3: 计算当前迭代的调整参数值, 即求

$$q_k = \arg \min_q g_p [q \hat{h}_k + (1-q) \tilde{h}_k] \text{ s.t. } -1 \leq q \leq 0, \quad (26)$$

其解为

$$q_k = \frac{(\hat{h}_k - \tilde{h}_k)^T g_k + q_{k-1} (\hat{h}_k - \tilde{h}_k)^T \Xi_k (\hat{h}_k - \tilde{h}_k)}{(\hat{h}_k - \tilde{h}_k)^T \Xi_k (\hat{h}_k - \tilde{h}_k)}. \quad (27)$$

图 3 压缩感知非凸优化方法对不同 UWB 信道模型的重构

Figure 3 Reconstruction of different UWB channel model using CSNC. (a) Outdoor LOS; (b) industrial LOS

Step 4: 更新重构向量为

$$\hat{\mathbf{h}}_{k+1} = q_k \hat{\mathbf{h}}_k + (1 - q_k) \tilde{\mathbf{h}}_k. \quad (28)$$

Step 5: 若达到迭代次数要求或 $\|\hat{\mathbf{h}}_{k+1} - \hat{\mathbf{h}}_k\|_2 \leq \varepsilon \|\mathbf{y}\|_2 (\varepsilon > 0)$, 则终止迭代, 输出重构向量为 $\hat{\mathbf{h}}_{k+1}$; 否则转到 Step 2 继续执行.

4 仿真实验

仿真基本参数设置如下: 选取高斯一阶导函数作为发送脉冲 $p(t)$, 脉冲持续时间为 0.65 ns 并将脉冲能量归一化; UWB 通信系统最大时延设为 100 ns; $N_f = 3$; 信息码元 $b \in \{1, -1\}$ 且先验概率相等. UWB 信道模型为 IEEE 802.15.4a 信道模型 [12].

实验 1 所提方法对 UWB 信道的重构效果.

本实验采用压缩感知非凸优化进行 UWB 信道估计. 压缩感知非凸优化简称为 (compressed sensing non-convex, CSNC), 其 p 值设为 0.9. 算法迭代 100 次. 降维比设置为 0.3. 信噪比为 25 dB. 分别选用户外视距内传播路径 (outdoor LOS) 和工业区视距内传播路径 (industrial LOS) 子信道模型进行重构. 信道重构效果如图 3 所示.

从以上的重构效果图中可以看出, 即使无法准确重构多径分量的增益, 压缩感知非凸优化方法也可以准确重构其时延.

而按照奈奎斯特采样定理的要求, 直接采样脉宽为 0.65 ns 的 UWB 脉冲信号至少需要 3 GHz 的采样速率, 目前的硬件条件根本无法实现. 压缩感知理论使用随机投影矩阵对接收信号进行欠采样, 0.3 的降维比意味着可以将采样速率降到 GHz 量级以下, 真正实现了利用压缩感知理论低速采样 UWB 信号的目的.

实验 2 所提方法与其他算法的重构误差对比.

重构误差定义为

$$e = \left\| \mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}} \right\|_2^2 / \left\| \mathbf{h} \right\|_2^2. \quad (29)$$

表 1 Outdoor LOS 信道环境重构误差对比

Table 1 Comparison of reconstruction error in outdoor LOS scenario

Algorithm	Dimension-reduction ratio			
	0.20	0.25	0.30	0.35
MP	87.62%	53.07%	30.93%	22.66%
OMP	56.24%	25.51%	16.9%	15.12%
BP	37.47%	18.33%	14.38%	12.8%
CSNC	20.49%	11.12%	10.53%	9.05%

表 2 Industrial LOS 信道环境重构误差对比

Table 2 Comparison of reconstruction error in industrial LOS scenario

Algorithm	Dimension-reduction ratio			
	0.20	0.25	0.30	0.35
MP	13%	5.93%	4.62%	2.24%
OMP	6.26%	3.83%	2.94%	2.12%
BP	5.68%	3.73%	2.31%	1.92%
CSNC	4.33%	2.47%	2.13%	1.85%

表 3 使用不同 p 值时压缩感知非凸优化的重构误差对比Table 3 Comparison of reconstruction error using CSNC with different p

p	Dimension-reduction ratio				
	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
0.9	7.75%	2.47%	2.24%	1.99%	1.64%
0.5	10.44%	3.86%	2.52%	2%	1.65%
0.1	17.29%	5.23%	2.94%	2.18%	1.73%

实验在不同的信道环境中, 将压缩感知非凸优化方法与 MP 算法、OMP 算法和 BP 算法进行了重构误差方面的对比. p 值为 0.9. 同一信道环境中又区分不同的降维比 (dimension-reduction ratio) 条件. 迭代次数均为 100 次. 所有实验均进行 10 次并取其平均值. 信噪比为 25 dB. 重构误差以百分比形式表示.

对不同信道环境的重构误差对比分别如表 1 和 2 所示. 通过对比可以发现, 无论在何种信道环境和降维比条件下, 压缩感知非凸优化方法相对于其他三种算法都能显著降低重构误差, 提升重构效果. 这说明 ℓ_p 范数的非凸优化重构效果确实优于无约束的 MP 算法、 ℓ_2 范数约束的 OMP 算法和 ℓ_1 范数约束的 BP 算法.

实验 3 p 值不同时的所提方法重构误差对比.

按照常理来说, p 值越接近于 0, ℓ_p 范数的重构效果应该越好, 因为向量的 ℓ_0 范数拥有最强的稀疏性. 表 3 反映了 p 取不同值时压缩感知非凸优化的重构性能. 区分不同的降维比, 信道模型为 Office LOS. 信噪比为 25 dB.

从表 3 可以看出重构误差并没有随着 p 值接近于 0 而降低, 反而逐渐升高. 这是由于在 p 值接近 0 的过程中, 目标函数的局部最优解越来越多, 对算法重构的影响也越来越大, 可能连续多次迭代都一直停留在局部最优解上而无法找到全局最优解, 导致重构效果变差.

图 4 不同 p 值时重构向量方差的变化Figure 4 Variation of variance of reconstruction vector with different p . (a) $p=0.9$; (b) $p=0.1$

图 4 反映了算法迭代过程中重构向量方差的变化曲线, 作为对比, 分别给出了 p 值为 0.9 和 0.1 时的变化曲线. 可以看出当 $p=0.9$ 时, 重构向量的方差始终在变化, 而当 $p=0.1$ 时, 方差大概在 10 步迭代之后就基本不再变化, 说明算法此后已经陷入了局部最优解而无法跳出. 而且对比两者在 30 步迭代内所能达到的最大方差也可以发现, $p=0.9$ 时的方差要大于 $p=0.1$ 时的方差, 这也说明 p 值较大时重构效果反而更好. 所以在实际求解中, p 值并不是越接近于 0 越好, 接近 ℓ_0 范数一定要更有效地克服局部最优解的影响.

5 结论

目前利用压缩感知理论低速采样超宽带信号以进行信道估计的方法存在着对重构向量稀疏性约束不够严格的问题, 由此引入基于 ℓ_p 范数约束的非凸优化方法来进行压缩感知 UWB 信道估计. 将目标函数的非凸函数通过组合替换为凸函数的形式, 通过该凸函数对目标函数的迭代逼近最终重构出原信道向量, 完成信道估计的任务. 仿真结果表明, ℓ_p 范数对目标向量稀疏性的约束确实强于 BP 算法的 ℓ_1 范数和贪婪迭代算法的 ℓ_2 范数约束, 重构误差有了较大幅度的降低.

但是由于 ℓ_p 范数是非凸函数, 所提方法解决的还是非凸优化问题, 所以不可避免地要受到局部最优解对算法重构的影响. 在 p 值逐渐接近 0 的过程中, 重构误差反而有所升高, 并没有体现出越接近 ℓ_0 范数对稀疏性的约束越强的性质. 所以, 寻找更加有效的求解方法使非凸优化能够摆脱非凸函数局部最优解的影响而找出最终的全局最优解, 达到较为理想的重构效果, 还需要进一步的研究.

参考文献

- 1 Liang Q L. Radar sensor wireless channel modeling in foliage environment: UWB versus narrowband. *IEEE Sens J*, 2011, 11: 1448–1457
- 2 Donoho D L. Compressed sensing. *IEEE Trans Inform Theory*, 2006, 52: 1289–1306
- 3 Candès E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Trans Inform Theory*, 2006, 52: 489–509
- 4 Michelusi N, Mitra U, Molisch A F, et al. UWB sparse/diffuse channels, part II: estimator analysis and practical channels. *IEEE Trans Signal Process*, 2012, 60: 5320–5333

- 5 Paredes J L, Arce G R, Wang Z M. Ultra-wideband compressed sensing: channel estimation. *IEEE J-STSP*, 2007, 1: 383–395
- 6 Liu Y L, Zhang X Y, He J W, et al. A blind channel estimation algorithm for ultra-wideband based on compressive sensing. *J Chongqing Univ*, 2010, 33: 105–108 [刘郁林, 张先玉, 和继威, 等. 压缩感知的 UWB 信道盲估计算法. *重庆大学学报*, 2010, 33: 105–108]
- 7 Zhang X Y, Liu Y L, Wang K. Ultra-wideband channel estimation and signal detection through compressed sensing. *J Xi'an Jiaotong Univ*, 2010, 44: 88–91 [张先玉, 刘郁林, 王开. 超宽带通信压缩感知信道估计与信号检测方法. *西安交通大学学报*, 2010, 44: 88–91]
- 8 Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Rev*, 2001, 43: 129–159
- 9 Jiao L C, Yang S Y, Liu F, et al. Development and prospect of compressive sensing. *Acta Electron Sin*, 2011, 39: 1651–1662 [焦李成, 杨淑媛, 刘芳, 等. 压缩感知回顾与展望. *电子学报*, 2011, 39: 1651–1662]
- 10 Chen L M, Gu Y T. The convergence guarantees of a non-convex approach for sparse recovery. *IEEE Trans Signal Process*, 2014, 62: 3754–3767
- 11 Mourad N, Reilly J P. L_p minimization for sparse vector reconstruction. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP'09, Washington*, 2009. 3345–3348
- 12 Molisch A F, Balakrishnan K, Cassioli D, et al. IEEE 802.15.4a channel model-final report. *IEEE P802*, 2004, 15: 0662
- 13 Taghavi M H, Shokrollahi A, Siegel P H. Efficient implementation of linear programming decoding. *IEEE Trans Inform Theory*, 2011, 57: 5960–5982
- 14 Dekrajangpetch S, Sheblé G B. Interior-point linear programming algorithm for auction methods. *IEEE Trans Power Syst*, 2000, 15: 572–578
- 15 Dai Q H, Fu C J, Ji X Y. Research on compressed sensing. *Chin J Comput*, 2011, 34: 425–434 [戴琼海, 付长军, 季向阳. 压缩感知研究. *计算机学报*, 2011, 34: 425–434]
- 16 Elad M. Optimized projections for compressed sensing. *IEEE Trans Signal Process*, 2007, 55: 5695–5702
- 17 Peng Z K, Meng G, Chu F L, et al. Polynomial chirplet transform with application to instantaneous frequency estimation. *IEEE Trans Instrum Meas*, 2011, 60: 3222–3229
- 18 Yang Y, Zhang W M, Peng Z K, et al. Multicomponent signal analysis based on polynomial chirplet transform. *IEEE Trans Ind Electron*, 2013, 60: 3948–3956
- 19 Wei Q L, Yan H. *Generalized optimal theories and models*. Beijing: Science Press, 2003. 139–140 [魏权龄, 闫洪. 广义最优化理论和模型. 北京: 科学出版社, 2003. 139–140]
- 20 Chen P Y, Selesnick I W. Group-sparse signal denoising: non-convex regularization, convex optimization. *IEEE Trans Signal Process*, 2014, 62: 3464–3478

UWB channel estimation based on non-convex optimization of compressed sensing

WANG ShaFei^{1*}, YANG JunAn² & WEN ZhiJin¹

¹ *Northern Institute of Electric Equipment of China, Beijing 100191, China;*

² *Electronic Engineering Institute, Hefei 230037, China*

*E-mail: 787274527@qq.com

Abstract Considering the complicated transfer propagation and low power spectrum density of ultra-wideband (UWB) signal, accurate estimation of UWB channel is crucial. However, it is difficult to sample UWB signal directly for its band width is ultra wide. Compressed sensing (CS) provides a feasible method for low speed sampling. Existing CS-based UWB channel estimation method generally adopts convex optimization form using l_1 -norm restriction, or non-sparse form using l_2 -norm restriction. These methods have a weak restriction on sparseness of objective vector, and l_0 -norm which is the sparsest lacks of effective reconstruction algorithm. To solve these problems, a CS-based UWB channel estimation method based on non-convex optimization is devised

in this paper. Firstly, objective function is set as non-convex optimization form using l_p -norm restriction; original non-convex function is then combined as convex function form, using the property that convex function obtains extremum easily. Convex function is used to approximate non-convex function at each iteration, for objective vector reconstruction and original channel estimation. Since l_p -norm is closer to l_0 -norm, it has stronger restriction on sparseness of objective vector. Experimental results show that proposed method can effectively lower reconstruction error compared to existing CS-based UWB channel estimation method.

Keywords ultra-wideband, channel estimation, compressed sensing, nonconvex, l_p -norm

WANG ShaFei was born in 1964. He received the M.D. degree from the Beijing Institute of Technology, Beijing, in 1991. Currently, he is a Senior Engineer at Northern Institute of Electric Equipment of China. His research interests include communication and electronic information system.

YANG JunAn was born in 1965. He received the Ph.D. degree from the University of Science and Technology of China, Hefei, in 2003. Currently, he is a Senior Researcher at Electronic Engineering Institute. His research interests include processing of communication signal and intelligent information.

WEN ZhiJin was born in 1971. He received the Ph.D. degree from the Beijing Institute of Technology, Beijing, in 2013. Currently, he is a Senior Engineer at Northern Institute of Electric Equipment of China. His research interests include wireless communication and information system.