Hilbert 空间中的 K -Riesz 框架及其稳定性

黄永东*, 化定丽

北方民族大学数学与信息科学学院, 银川 750021

E-mail: huang_yongdong@163.com, huadingli4284@163.com

收稿日期: 2015-10-21; 接受日期: 2015-12-21; 网络出版日期: 2016-08-03; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 61261043 和 10961001) 资助项目

摘要 K -框架是 Hilbert 空间框架的一种推广. 本文融合 K -框架和 Riesz 框架的思想, 提出了 K -Riesz 框架和 K -Riesz 基的概念, 分别得到了 K -Riesz 基和 K -Riesz 框架的等价刻画, 并给出 K -Riesz 框架异于 Riesz 框架的一个性质. 最后, 借助框架理论的方法和技巧, 给出了 Hilbert 空间中 K -Riesz 框架和 K -Riesz 基的若干个稳定性结论.

关键词 K -Riesz 框架 Riesz 框架 K -Riesz 基 稳定性

MSC (2010) 主题分类 42C15, 42C40

1 引言

Hilbert 空间框架作为基的推广, 最早由 Duffin 和 Schaeffer^[1] 在 1952 年研究非调和 Fourier 分析时提出. 1986 年, Daubechies 等^[2] 再次提出了框架的概念. 如今框架理论已被广泛应用于许多领域, 如滤波器理论^[3]、图像处理^[4] 和其他领域, 有关 Hilbert 空间框架理论及其应用可参见文献 [5–12].

随着对 Hilbert 空间中框架理论及其应用的研究不断深入, 出现了框架的不同推广. Sun^[13] 引入了 g -Riesz 基和 g -框架的概念. Abdollahpour^[14] 提出了拟 g -Riesz 基的概念, 并给出了拟 g -Riesz 基相应的一些结论. Zhu 等^[15] 研究了 Hilbert 空间中的 g -Riesz 框架. 2011 年, Găvruta^[16] 在研究原子分解系统时引入了 K -框架, 它是框架的另一种推广, 也成为近几年框架研究的热点领域之一. 相对于一般框架, K -框架是限制在一个给定的有界线性算子值域上研究的, 这在实际应用中比一般框架更具有灵活性, 从而具有重要研究价值. Găvruta^[16–18] 得到了 K -框架的一些结论和性质. Asgari 等^[19] 得到了 K - g -框架的性质与刻画. Ding 等^[20] 得到了紧 K -框架的性质与刻画. 本文结合 K -框架与 Riesz 框架各自优势, 首先提出了 K -Riesz 框架和 K -Riesz 基的定义, K -Riesz 框架能够继承 Riesz 框架大多数性质. 其次给出 K -Riesz 基的一个等价刻画, 并得到每一个 K -Riesz 框架不一定包含一个 K -Riesz 基, 但一定包含一个恰当 K -框架的重要性质. 这个性质是异于 Riesz 框架的. 接着给出 Hilbert 空间中极小完备的定义, 在此基础上得到 K -Riesz 框架的一个等价刻画. 最后讨论了 K -Riesz 框架和 K -Riesz 基在扰动下的稳定性.

在本文, H 是一个可分的 Hilbert 空间, I 是 H 的恒等算子. $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{C}$ 分别为自然数集和复数集. 设

英文引用格式: Huang Y D, Hua D L. K -Riesz frames and the stability of K -Riesz frames for Hilbert spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 383–396, doi: 10.1360/N012015-00325

H_1 和 H_2 是两个 Hilbert 空间, $L(H_1, H_2)$ 表示从 H_1 到 H_2 所有有界线性算子的全体. 特别地, $L(H)$ 表示从 H 到 H 的所有有界线性算子的集合. 对任意 $T \in L(H_1, H_2)$, $R(T)$ 和 $N(T)$ 分别表示 T 的值域和核, T^* 表示 T 的伴随算子. l^2 表示满足 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty$ 的复数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体构成的一个无穷维复 Hilbert 空间, 规定其内积如下:

$$\langle a, b \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{b}_n,$$

其中 $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$.

2 预备知识

序列 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$ 称为 H 的框架, 如果存在常数 $0 < A \leq B < \infty$, 使得

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, f_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in H. \quad (2.1)$$

A 和 B 分别称为框架的下界和上界. 如果只有右边的不等式成立, 则称 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为 H 的 Bessel 序列. 若 $A = B$, 则称 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为紧框架. 若去掉任意一个元素后不再是 H 的框架, 则称 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为 H 的恰当框架.

对于 H 的 Bessel 序列 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$, 定义有界线性算子 $T: l^2 \rightarrow H$ 如下:

$$T: \{a_j\}_{j=1}^{\infty} \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j f_j, \quad \forall \{a_j\}_{j=1}^{\infty} \in l^2, \quad (2.2)$$

称 T 为预框架算子 (或合成算子). 其伴随算子 $T^*: H \rightarrow l^2$ 定义如下:

$$T^* f = \{\langle f, f_j \rangle\}_{j=1}^{\infty}, \quad \forall f \in H, \quad (2.3)$$

称 T^* 为 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ 的分析算子. Bessel 序列 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ 的框架算子 S 定义如下:

$$S: H \rightarrow H, \quad Sf = TT^* f = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, f_j \rangle f_j, \quad \forall f \in H. \quad (2.4)$$

定义 2.1 ^[5] 设 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 H 的一个框架, 我们称 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为 H 的 Riesz 框架, 如果它的每一个子列都是 H 的一个框架序列, 并且它们具有公共的框架下界. 序列 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ 称为 H 的 Riesz 基, 若 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ 在 H 中是完备的, 即 $\{f \in H: \langle f, f_j \rangle = 0\} = \{0\}$, 且存在常数 $A, B > 0$, 使得对每一个有限的标量序列 $\{c_j\}$, 都有

$$A \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j f_j \right\|^2 \leq B \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \quad (2.5)$$

成立.

定义 2.2 ^[16] 设 $K \in L(H)$, 序列 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ 称为 Hilbert 空间 H 的 K -框架, 如果存在常数 $0 < A \leq B < \infty$, 使得对任意的 $f \in H$, 有

$$A\|K^* f\|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, f_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (2.6)$$

成立, A 和 B 分别称为 K - 框架的下界和上界. 若去掉任意一个元素后不再是 H 的 K - 框架, 则称 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 为 H 的恰当 K - 框架.

注 2.3 K - 框架必为 Bessel 序列. 当有界线性算子 $K = I$ 时, K - 框架即为通常意义下的框架.

下面融合 Riesz 框架和 K - 框架的思想, 给出 K -Riesz 框架和 K -Riesz 基的定义.

定义 2.4 序列 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 称为 H 的 K -Riesz 框架, 如果存在常数 $A > 0$, 使得其任意子列 $\{f_j\}_{j \in J}$ ($J \subset \mathbb{N}$) 都为 $\overline{\text{span}}\{f_j\}_{j \in J}$ 的 K - 框架, 并且具有公共的框架下界 A .

定义 2.5 设 $K \in L(H)$, 称序列 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 在 H 中为 $\overline{R(K)}$ - 完备的, 如果满足

$$\{f \in H : \langle f, f_j \rangle = 0\} \subset \overline{R(K)}^\perp = N(K^*).$$

定义 2.6 设 $K \in L(H)$, 序列 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 称为 H 的 K -Riesz 基, 若 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 在 H 中是 $\overline{R(K)}$ - 完备的, 且存在常数 $A, B > 0$, 使得对每一个有限的标量序列 $\{c_j\}$, 有

$$A \sum_{j=1}^\infty |c_j|^2 \leq \left\| \sum_{j=1}^\infty c_j f_j \right\|^2 \leq B \sum_{j=1}^\infty |c_j|^2. \quad (2.7)$$

注 2.7 当 $K = I$ 时, K -Riesz 框架和 K -Riesz 基分别对应于 Riesz 框架和 Riesz 基.

下面介绍一些必要的命题和引理.

命题 2.8 ^[5] 设 U 为复 Hilbert 空间. 若有界线性算子 $S : H \rightarrow U$ 具有闭值域 $R(S)$, 则存在唯一的有界线性算子 $S^\dagger : U \rightarrow H$ 满足

$$N(S^\dagger) = R(S)^\perp, \quad R(S^\dagger) = N(S)^\perp, \quad SS^\dagger f = f, \quad f \in R(S), \quad (2.8)$$

其中 $S^\dagger$ 为 S 的伪逆算子.

命题 2.9 ^[18] 设 $K \in L(H)$. 若 $R(K)$ 是闭的, 则存在 K 的伪逆算子 $K^\dagger$ 使得 $KK^\dagger f = f, \forall f \in R(K)$, 即有 $KK^\dagger|_{R(K)} = I|_{R(K)}$.

由命题 2.9 知, 对任意的 $f \in R(K)$, 有

$$\|f\| = \|(K^\dagger|_{R(K)})^* K^* f\| \leq \|K^\dagger\| \|K^* f\|,$$

即 $\|K^* f\|^2 \geq \|K^\dagger\|^{-2} \|f\|^2$. 结合 (2.6), 有 $\langle Sf, f \rangle \geq A \|K^* f\|^2 \geq A \|K^\dagger\|^{-2} \|f\|^2$. 再根据 K - 框架的定义知,

$$A \|K^\dagger\|^{-2} \|f\| \leq \|Sf\| \leq B \|f\|, \quad \forall f \in R(K). \quad (2.9)$$

引理 2.10 ^[5] 设 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的一个序列, 则 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是以 B 为界的 Bessel 序列当且仅当

$$T : l^2 \rightarrow H, \quad T\{c_j\}_{j=1}^\infty = \sum_{j=1}^\infty c_j f_j \quad (2.10)$$

是良好定义的, 且 $\|T\| \leq \sqrt{B}$.

引理 2.11 ^[5, 21] 令 T 是 H 上的线性算子, 假设存在常数 $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1)$, 使得

$$\|Tx - x\| \leq \lambda_1 \|x\| + \lambda_2 \|Tx\|, \quad \forall x \in H, \quad (2.11)$$

则 $T \in L(H)$, T 可逆且

$$\frac{1 - \lambda_1}{1 + \lambda_2} \|x\| \leq \|Tx\| \leq \frac{1 + \lambda_1}{1 - \lambda_2} \|x\|, \quad \frac{1 - \lambda_2}{1 + \lambda_1} \|x\| \leq \|T^{-1}x\| \leq \frac{1 + \lambda_2}{1 - \lambda_1} \|x\|, \quad \forall x \in H. \quad (2.12)$$

引理 2.12 ^[22] 设 $T_1 \in L(H_1, H)$, $T_2 \in L(H_2, H)$, 则下列陈述等价:

- (1) $R(T_1) \subset R(T_2)$;
- (2) 存在 $\lambda > 0$, 使得 $T_1 T_1^* \leq \lambda T_2 T_2^*$;
- (3) 存在有界线性算子 $X \in L(H_1, H_2)$, 使得 $T_1 = T_2 X$.

引理 2.13 ^[18] 令 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的一个 Bessel 序列, 则 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的一个 K -框架当且仅当存在常数 $A > 0$, 使得 $S \geq AKK^*$, 其中 S 是 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 的框架算子.

通过引理 2.12 和 2.13, 可以得到如下命题:

命题 2.14 若序列 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的 K -框架, 其中 T 是 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 的预框架算子, 则 $R(K) \subset R(T)$.

3 Hilbert 空间中 K -Riesz 框架的性质

Christensen ^[5] 得到了每个 Riesz 框架都包含一个 Riesz 基的结论, 那么 K -Riesz 框架是否具有类似的性质呢? 下面给出 K -Riesz 基的等价刻画, 并利用此刻画来研究 K -Riesz 框架的性质.

定理 3.1 设 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的一个 K -框架, K 有闭值域, 则 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的一个 K -Riesz 基当且仅当 $R(T)$ 是闭的且 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 l^2 -线性无关的, 其中 T 为预框架算子.

证明 先证必要性. 由于 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的一个 K -Riesz 基, 则存在常数 $A, B > 0$, 对于有界线性算子 T , 当 $\{c_j\}_{j=1}^\infty \in l^2$ 时, 有

$$A\|\{c_j\}_{j=1}^\infty\|^2 \leq \|T\{c_j\}_{j=1}^\infty\|^2 \leq B\|\{c_j\}_{j=1}^\infty\|^2, \quad (3.1)$$

从而 $N(T) = 0$, 即 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 l^2 -线性无关的. 设序列 $\{g_k\}_{k=1}^\infty \subset R(T)$ 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = g \in H$, 则 $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ 是 H 中的 Cauchy 列, 且存在 $c^{(k)} = \{c_j^{(k)}\}_{j=1}^\infty \in l^2$ ($k \in \mathbb{N}$), 使得 $g_k = T(c^{(k)})$. 由 (3.1) 可得, 对任意的 $k, n \in \mathbb{N}$, 有

$$\|c^{(k+n)} - c^{(k)}\|^2 \leq A^{-1}\|T(c^{(k+n)} - c^{(k)})\|^2 = A^{-1}\|g_{k+n} - g_k\|^2, \quad (3.2)$$

由此可以得到 $\{c^{(k)}, k = 1, 2, \dots\}$ 是 l^2 中的 Cauchy 列. 由于 l^2 是一个 Hilbert 空间, 则序列 $\{c^{(k)}, k = 1, 2, \dots\}$ 收敛于 $c \in l^2$. 根据 T 的连续性, 得

$$g = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \lim_{k \rightarrow \infty} T(c^{(k)}) = T(c),$$

所以, $R(T)$ 是 H 的一个闭子空间.

再证充分性. 因为 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的一个 K -框架, 设其上、下界分别为 B 和 A . 假设存在 $f \in H$ 且满足 $\langle f, f_j \rangle = 0, \forall j \in \mathbb{N}$, 则由 K -框架的定义得

$$A\|K^*f\|^2 \leq \sum_{j=1}^\infty |\langle f, f_j \rangle|^2 = 0,$$

即 $\|K^*f\| = 0$. 由于 K 有闭值域, 得 $f \in (\overline{R(K)})^\perp$, 即 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 在 H 中是 $\overline{R(K)}$ -完备的. 由注 2.3 和引理 2.10 可知, 对任意的 $\{c_j\}_{j=1}^\infty \in l^2$, 有

$$\|T\{c_j\}_{j=1}^\infty\| = \left\| \sum_{j=1}^\infty c_j f_j \right\|^2 \leq B \sum_{j=1}^\infty |c_j|^2. \quad (3.3)$$

由于 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 l^2 -线性无关的, 则 $N(T) = 0$. 又因为 $R(T)$ 是闭的, 由逆算子定理可知, 存在 $T^{-1}: R(T) \rightarrow l^2$, 使得对任意的 $\{c_j\}_{j=1}^\infty \in l^2$, 有 $T^{-1}T\{c_j\}_{j=1}^\infty = \{c_j\}_{j=1}^\infty$, 那么,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 = \|\{c_j\}_{j=1}^\infty\|^2 = \|T^{-1}T\{c_j\}_{j=1}^\infty\|^2 \leq \|T^{-1}\|^2 \|T\{c_j\}_{j=1}^\infty\|^2 = \|T^{-1}\|^2 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j f_j \right\|^2,$$

从而, $\frac{1}{\|T^{-1}\|^2} \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \leq \|\sum_{j=1}^{\infty} c_j f_j\|^2$. 由定义知, $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的 K -Riesz 基. 定理 3.1 证毕. $\square$

在 Hilbert 空间中, 恰当框架等价于 l^2 -线性无关的框架, 很容易验证恰当 K -框架是 l^2 -线性无关的 K -框架, 那么, l^2 -线性无关的 K -框架是恰当 K -框架吗? 若是, 根据定理 3.1 可知, 恰当 K -框架就等价于 K -Riesz 基, 事实上答案是否定的. 下面举例说明.

例 3.2 设 $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的标准正交基, 令 $f_j = e_j$ ($j \in \mathbb{N}$), 定义正交投影算子如下:

$$K: H \rightarrow H, \quad Kf = \langle f, e_1 \rangle e_1 + \langle f, e_2 \rangle e_2, \quad \forall f \in H, \quad (3.4)$$

则 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 l^2 -线性无关的 K -框架, 但不是恰当 K -框架.

首先证明 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 l^2 -线性无关的 K -框架. 因为 $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的标准正交基, 则 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 l^2 -线性无关的. 由于 K 是正交投影算子, 根据正交投影算子的性质可知, $K^2 = K = K^*$, 则 $K^*f = Kf = \langle f, e_1 \rangle e_1 + \langle f, e_2 \rangle e_2$, $\forall f \in H$. 因为 $f_1 = e_1, f_2 = e_2$, 从而,

$$\|K^*f\|^2 = |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 = |\langle f, f_1 \rangle|^2 + |\langle f, f_2 \rangle|^2.$$

因此, 对任意的 $f \in H$, 有

$$\|K^*f\|^2 = |\langle f, f_1 \rangle|^2 + |\langle f, f_2 \rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2,$$

这样就得到 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 l^2 -线性无关的 K -框架.

其次证明 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 不是恰当 K -框架. 对任意的 $f \in H$, 有

$$\|K^*f\|^2 = |\langle f, e_1 \rangle|^2 + |\langle f, e_2 \rangle|^2 \leq |\langle f, e_1 \rangle|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, e_{2j} \rangle|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, e_j \rangle|^2 = \|f\|^2,$$

则 $\{f_1\} \cup \{f_{2j}\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的 K -框架, 所以, $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 不是 H 的恰当 K -框架.

由例 3.2 得下面结论.

推论 3.3 若 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 Hilbert 空间中的恰当 K -框架, 则 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 l^2 -线性无关的 K -框架. 反之不成立.

由于 Hilbert 空间中 Riesz 基与恰当框架是等价的, 而 K -Riesz 基与恰当 K -框架是不等价的. 但是在 Hilbert 空间中, 任何一个 K -Riesz 框架都包含一个恰当 K -框架.

引理 3.4 ^[23] 设 $\{c_j\}_{j=1}^\infty$ 为非负可加序列, $\sum_{j=1}^{\infty} c_j < \infty$, $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{N}$ 的子集族, 且满足以下两个条件:

- (i) $J_1 \supseteq J_2 \supseteq J_3 \supseteq \cdots$;
- (ii) 存在 $c > 0$, 使得 $c \leq \sum_{j \in J_n} c_j < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

则 $c \leq \sum_{j \in J_n} c_j$.

引理 3.5 若 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 为 H 的 K -框架且 K 有闭值域, K -框架下界为 A , 则 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 在 H 中是 $\overline{R(K)}$ -完备的.

引理 3.6 ^[24] 设 M 是一个偏序集, 若 M 的每一个全序子集在 M 上都有上界, 则 M 至少有一个极大元.

定理 3.7 Hilbert 空间中的任何一个 K -Riesz 框架都包含一个恰当 K - 框架.

证明 设 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 为 H 的一个 K -Riesz 框架且下界为 A , 考虑集合

$$M = \left\{ \{f_j\}_{j \in J} \mid J \subset \mathbb{N}, A\|K^*f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, f_j \rangle|^2, \forall f \in H \right\}. \quad (3.5)$$

由引理 3.5 可知, M 是非空的. 定义 M 上的偏序如下:

$$\{f_j\}_{j \in I} \prec \{f_j\}_{j \in J} \Leftrightarrow J \subset I.$$

设 $\{J_n\}_{n=1}^\infty$ 是满足 $\{f_j\}_{j \in J_n} \in M$ 所构成的自然数的子集族, 且 $J_1 \supseteq J_2 \supseteq J_3 \supseteq \cdots$, 显然知 $\{f_j\}_{j \in J_n}$ 构成 M 的全序子集. 根据 K -Riesz 框架的定义, 对 $\forall f \in H$, 有

$$A\|K^*f\|^2 \leq \sum_{j \in J_n} |\langle f, f_j \rangle|^2.$$

由引理 3.4 可知, 对 $\forall f \in H$, 有

$$A\|K^*f\|^2 \leq \sum_{j \in \cap J_n} |\langle f, f_j \rangle|^2.$$

由此知, $\{f_j\}_{j \in \cap J_n}$ 是 M 中的一个元素, 且为该全序子集的上界. 由引理 3.6 知, M 有一个极大元 $\{f_j\}_{j \in I}$.

下证 $\{f_j\}_{j \in I}$ 是 H 的一个恰当 K - 框架. 因为 $\{f_j\}_{j \in I}$ 在 H 中是 $\overline{R(K)}$ - 完备的, 即

$$\{f \in H : \langle f, f_j \rangle = 0\} \subset \overline{R(K)}^\perp.$$

根据 K -Riesz 框架的定义知, $\{f_j\}_{j \in I}$ 为 H 的 K - 框架. 又因为 $\forall j_0 \in I$, $\{f_j\}_{j \in I \setminus \{j_0\}}$ 在 H 中为不 $\overline{R(K)}$ - 完备的, 由引理 3.5 可知, $\{f_j\}_{j \in I \setminus \{j_0\}}$ 不是 H 的 K - 框架. 因此, $\{f_j\}_{j \in I}$ 为 H 的恰当 K - 框架. 定理 3.7 证毕. $\square$

下面给出 Hilbert 空间 H 中框架的极小完备定义, 即定义 3.8.

定义 3.8 设 $W = \overline{\text{span}}\{f_j\}_{j \in J}$ 是 H 的闭子空间, $J \subset \mathbb{N}$. 若 $\{f_j\}_{j \in J}$ 在 W 中是完备的且对任意的 $j_0 \in J$, $\{f_j\}_{j \in J, j \neq j_0}$ 在 W 中为不完备的, 则称 $\{f_j\}_{j \in J}$ 在 W 中是极小完备的.

引理 3.9 设序列 $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset H$ 且 J 为 $\mathbb{N}$ 的任意有限非空子集, 则存在一个有限非空子集 $J_0 \subset J$ 使得 $\{f_j\}_{j \in J_0}$ 在 W_{J_0} 中为极小完备的且 $W_J = W_{J_0}$, 其中 $W_{J_0} = \overline{\text{span}}\{f_j\}_{j \in J_0}$, $W_J = \overline{\text{span}}\{f_j\}_{j \in J}$.

证明 分两种情形来证明.

情形 1 若 $\{f_j\}_{j \in J}$ 在 W_J 中为完备的, 且对任意的 $j_0 \in J$, $\{f_j\}_{j \in J, j \neq j_0}$ 在 W_J 中是不完备的, 令 $J_0 = J$, 则命题成立.

情形 2 若存在 $j_0 \in J$ 使得 $\{f_j\}_{j \in J \setminus \{j_0\}}$ 在 W_J 中为完备的, 那么从 J 中去掉 j_0 , 若仍然存在 $j_1 \in J_1 = J \setminus \{j_0\}$ 使得 $\{f_j\}_{j \in J_1 \setminus \{j_1\}}$ 在 W_J 中为完备的, 则同样从 J_1 中去掉 j_1 , 否则停止以上操作. 假设总共从 J 中去掉 $\{j_0, j_1, \dots, j_n\}$. 令 $J_0 = J \setminus \{j_0, j_1, \dots, j_n\}$, 则子集 $J_0 \subset J$ 满足 $\{f_j\}_{j \in J_0}$ 在 W_J 中完备且 $\{f_j\}_{j \in J_0 \setminus \{i_0\}}$ 在 W_{J_0} 中是不完备的, 其中 $i_0 \in J_0$. 显然, J_0 非空且 $W_J = W_{J_0}$. 引理 3.9 证毕. $\square$

基于引理 3.9, 可以得到 Hilbert 空间 H 中 K -Riesz 框架的一个刻画.

定理 3.10 设 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 为 H 中的 K - 框架, 则下列陈述等价:

- (1) $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 为 H 中的 K -Riesz 框架;
 (2) 存在 $A > 0$, 使得对 $\mathbb{N}$ 的任意有限非空子集 J , 若 $\{f_j\}_{j \in J}$ 在 W_J 中为极小完备的, 则

$$A\|K^*f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, f_j \rangle|^2, \quad \forall f \in W_J, \quad (3.6)$$

其中 $W_J = \overline{\text{span}}\{f_j\}_{j \in J}$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 因为 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 为 H 中的 K -Riesz 框架, 由定义可知, 存在 $A > 0$, 对任意有限的非空子集 $J \subset \mathbb{N}$, $\{f_j\}_{j \in J}$ 为 W_J 的 K -框架, 故

$$A\|K^*f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, f_j \rangle|^2, \quad \forall f \in W_J.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) 设 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的 K -框架, K -框架上界为 B , 因此,

$$\sum_{j=1}^\infty |\langle f, f_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2. \quad (3.7)$$

下面分两种情形来证明 $\{f_j\}_{j \in J}$ 为 W_J 的 K -框架, 其中 J 为 $\mathbb{N}$ 的任意非空子集.

情形 1 设 J 为 $\mathbb{N}$ 的任意非空有限子集, 由引理 3.9 可知, 存在一个非空有限子集 $J_0 \subset J$ 使得 $\{f_j\}_{j \in J_0}$ 在 W_{J_0} 中是极小完备的且 $W_J = W_{J_0}$, 由 (3.6) 得 $A\|K^*f\|^2 \leq \sum_{j \in J_0} |\langle f, f_j \rangle|^2, \forall f \in W_{J_0} = W_J$. 结合 (3.7) 得

$$A\|K^*f\|^2 \leq \sum_{j \in J_0} |\langle f, f_j \rangle|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, f_j \rangle|^2 \leq \sum_{j=1}^\infty |\langle f, f_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in W_J.$$

情形 2 设 J 为 $\mathbb{N}$ 的任意无限子集, $f \in W_J$, 则对任意的 $\epsilon_1 > 0$, 存在有限子集 $J_1 \subset J$ 使得 $\|f - \sum_{j \in J_1} c_j f_j\| \leq \epsilon_1$. 令 $W_J = W_{J_1} \oplus W_{J_1}^\perp$, 则存在 $g_0 \in W_{J_1}, h \in W_{J_1}^\perp$ 使得 $f - \sum_{j \in J_1} c_j f_j = g_0 + h$ 且 $\|g_0\|^2 + \|h\|^2 \leq \epsilon_1^2$. 令 $g = \sum_{j \in J_1} c_j f_j + g_0$, 则有 $f = g + h, g \in W_{J_1}$. 由情形 1 可得

$$A\|K^*g\|^2 \leq \sum_{j \in J_1} |\langle g, f_j \rangle|^2, \quad \forall g \in W_{J_1}.$$

显然, 对每个 $j \in J_1$, 有 $\langle f, f_j \rangle = \langle g, f_j \rangle + \langle h, f_j \rangle = \langle g, f_j \rangle$. 那么, 对任意的 $f \in W_J$, 有

$$\begin{aligned} \sqrt{A}\|K^*f\| &\leq \sqrt{A}\|K^*g\| + \sqrt{A}\|K^*h\| \leq \left(\sum_{j \in J_1} |\langle g, f_j \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{A}\|K\|\epsilon_1 \\ &= \left(\sum_{j \in J_1} |\langle f, f_j \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{A}\|K\|\epsilon_1 \leq \left(\sum_{j \in J} |\langle f, f_j \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{A}\|K\|\epsilon_1 \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^\infty |\langle f, f_j \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{A}\|K\|\epsilon_1 \leq \sqrt{B}\|f\| + \sqrt{A}\|K\|\epsilon_1. \end{aligned}$$

令 $\epsilon_1 \rightarrow 0$, 得

$$\sqrt{A}\|K^*f\| \leq \left(\sum_{j \in J} |\langle f, f_j \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{B}\|f\|, \quad \forall f \in W_J.$$

定理 3.10 证毕. □

4 Hilbert 空间中 K -Riesz 框架与 K -Riesz 基的稳定性

框架是否具有稳定性在构造框架时有很重要的作用, 它决定着能否从一个已知框架构造另外一个框架. 文献 [5, 25] 分别给出了框架、Riesz 框架和 Riesz 基的稳定性结果. 本节将借助于框架理论的方法和第 3 节给出的 K -Riesz 框架与 K -Riesz 基的刻画来研究 Hilbert 空间 H 中 K -Riesz 框架与 K -Riesz 基的稳定性.

定理 4.1 设 $K \in L(H)$ 且 K 有闭值域. 假设 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的一个 K -Riesz 框架, 框架界为 A 和 B . $\{g_j\}_{j=1}^\infty \subset H$, 如果存在常数 $\lambda_1, \lambda_2, \mu \geq 0$, 满足 $\max\{\lambda_1 + \frac{\mu}{\sqrt{A}}, \lambda_2\} < 1$, 且对任意的 $f \in H$, 有

$$\left(\sum_{j \in J} |\langle f, f_j - g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda_1 \left(\sum_{j \in J} |\langle f, f_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \lambda_2 \left(\sum_{j \in J} |\langle f, g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \mu \|K^* f\|, \quad (4.1)$$

其中 J 为 $\mathbb{N}$ 的任意有限子集, 则 $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的一个 K -Riesz 框架, 框架界为

$$A \left(1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\mu}{\sqrt{A}}}{1 + \lambda_2}\right)^2 \quad \text{和} \quad B \left(1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\mu}{\sqrt{A}}}{1 - \lambda_2}\right)^2. \quad (4.2)$$

证明 首先证明 $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的一个 K -框架. 由于 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的 K -框架且上界为 B , 则对任意有限子集 $J \subset \mathbb{N}$, 有

$$\sum_{j \in J} |\langle f, f_j \rangle|^2 \leq \sum_{j=1}^\infty |\langle f, f_j \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad \forall f \in H. \quad (4.3)$$

又根据三角不等式, 得

$$\left(\sum_{j \in J} |\langle f, f_j - g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\sum_{j \in J} |\langle f, g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{j \in J} |\langle f, f_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.4)$$

由 (4.1) 和 (4.4) 得

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j \in J} |\langle f, g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\sum_{j \in J} |\langle f, f_j - g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j \in J} |\langle f, f_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (1 + \lambda_1) \left(\sum_{j \in J} |\langle f, f_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \lambda_2 \left(\sum_{j \in J} |\langle f, g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \mu \|K^* f\| \\ &\leq \left(1 + \lambda_1 + \frac{\mu}{\sqrt{A}}\right) \left(\sum_{j \in J} |\langle f, f_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \lambda_2 \left(\sum_{j \in J} |\langle f, g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

从而有

$$\left(\sum_{j \in J} |\langle f, g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1 + \lambda_1 + \frac{\mu}{\sqrt{A}}}{1 - \lambda_2} \left(\sum_{j \in J} |\langle f, f_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{B} \left(1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\mu}{\sqrt{A}}}{1 - \lambda_2}\right) \|f\|.$$

因此, 级数 $\sum_{j=1}^\infty |\langle f, g_j \rangle|^2$ 收敛. 再利用不等式 (4.1), 可得

$$\left(\sum_{j=1}^\infty |\langle f, f_j - g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda_1 \left(\sum_{j=1}^\infty |\langle f, f_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \lambda_2 \left(\sum_{j=1}^\infty |\langle f, g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \mu \|K^* f\|.$$

根据文献 [19, 推论 3.8] 知, $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的一个 K - 框架, 框架下界和上界分别为

$$A\left(1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\mu}{\sqrt{A}}}{1 + \lambda_2}\right)^2 \quad \text{和} \quad B\left(1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\mu}{\sqrt{A}}}{1 - \lambda_2}\right)^2.$$

其次证明 $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的 K -Riesz 框架. 对任意有限的子集 $J \subset \mathbb{N}$, 根据三角不等式得

$$\left(\sum_{j \in J} |\langle f, g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\sum_{j \in J} |\langle f, f_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{j \in J} |\langle f, f_j - g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.5)$$

由不等式 (4.1) 和 (4.5) 得

$$\left(\sum_{j \in J} |\langle f, g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1 - \lambda_1 - \frac{\mu}{\sqrt{A}}}{1 + \lambda_2} \left(\sum_{j \in J} |\langle f, f_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\mu}{\sqrt{A}}}{1 + \lambda_2}\right) \left(\sum_{j \in J} |\langle f, f_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.6)$$

现记 $W_J = \overline{\text{span}}\{f_j\}_{j \in J}$, $V_J = \overline{\text{span}}\{g_j\}_{j \in J}$. 下面分两种情形证明 $V_J \subset W_J$.

情形 1 若 $\{g_j\}_{j \in J}$ 在 V_J 中为极小完备的, 对任意的 $f \in W_J^\perp$, 由于 $H = V_J \oplus V_J^\perp$, 则存在 $g \in V_J$, $h \in V_J^\perp$ 使得 $f = g + h$. 故对任意的 $j \in J$, 有

$$\langle f, f_j \rangle = 0, \quad \langle f, g_j \rangle = \langle g, g_j \rangle + \langle h, g_j \rangle = \langle g, g_j \rangle.$$

又因为

$$\left(\sum_{j \in J} |\langle f, f_j - g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j \in J} |\overline{\langle f_j - g_j, f \rangle}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j \in J} |\langle f, g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

因此, 由不等式 (4.1) 得

$$\left(\sum_{j \in J} |\langle f, g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\lambda_1 + \frac{\mu}{\sqrt{A}}\right) \left(\sum_{j \in J} |\langle f, f_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \lambda_2 \left(\sum_{j \in J} |\langle f, g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

即

$$\left(\sum_{j \in J} |\langle g, g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda_2 \left(\sum_{j \in J} |\langle g, g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.7)$$

由此可以推出, 对任意的 $j \in J$, 有 $\langle g, g_j \rangle = 0$. 因为 $\{g_j\}_{j \in J}$ 在 V_J 中是完备的, 所以 $g = 0$. 因此 $f = h \in V_J^\perp$. 故 $W_J^\perp \subset V_J^\perp$, 即有 $V_J \subset W_J$.

情形 2 若 $\{g_j\}_{j \in J}$ 在 V_J 中不是极小完备的, 由引理 2.9 知, 存在 $J_0 \subset J$, 使得 $\{g_j\}_{j \in J_0}$ 在 V_{J_0} 中为极小完备的且 $V_{J_0} = V_J$. 利用情形 1 可得 $V_J \subset W_J$.

对任意的 $f \in V_J \subset W_J$. 因为 $\{f_j\}_{j \in J}$ 是 H 的 K - 框架, K - 框架下界为 A , 则由 (4.6) 得

$$\left(\sum_{j \in J} |\langle f, g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\mu}{\sqrt{A}}}{1 + \lambda_2}\right) \left(\sum_{j \in J} |\langle f, f_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\mu}{\sqrt{A}}}{1 + \lambda_2}\right) \sqrt{A} \|K^* f\|. \quad (4.8)$$

由定理 3.10 得 $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的一个 K -Riesz 框架, 框架界为 $A(1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\mu}{\sqrt{A}}}{1 + \lambda_2})^2$ 和 $B(1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\mu}{\sqrt{A}}}{1 - \lambda_2})^2$. 定理 4.1 证毕. $\square$

推论 4.2 设 $K \in L(H)$ 且 K 有闭值域. 假设 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的一个 K -Riesz 框架, 框架界为 A 和 B . $\{g_j\}_{j=1}^\infty \subset H$, 如果存在常数 $\lambda_1, \lambda_2, \mu \geq 0$, 满足 $(\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} + \frac{\mu}{\sqrt{A}} < 1$, 且对任意的 $f \in H$, 有

$$\left(\sum_{j \in J} |\langle f, f_j - g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda_1 \left(\sum_{j \in J} |\langle f, f_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \lambda_2 \left(\sum_{j \in J} |\langle f, g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \mu \|K^* f\|, \quad (4.9)$$

其中 J 为 $\mathbb{N}$ 的任意有限子集, 则 $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的一个 K -Riesz 框架, 框架界为

$$A \left(1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\mu}{\sqrt{A}}}{1 + \lambda_2}\right)^2 \quad \text{和} \quad B \left(1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\mu}{\sqrt{A}}}{1 - \lambda_2}\right)^2. \quad (4.10)$$

证明 因为 $(\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} + \frac{\mu}{\sqrt{A}} < 1$, 且 A 和 B 为 K -Riesz 框架 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 的框架界, 所以, $\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} \geq 1$, 那么,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\mu}{\sqrt{A}} \leq (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} + \frac{\mu}{\sqrt{A}} < 1,$$

这说明 $(\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} + \frac{\mu}{\sqrt{A}} < 1$ 包含在 $\max\{\lambda_1 + \frac{\mu}{\sqrt{A}}, \lambda_2\} < 1$ 内. 推论 4.2 证毕. $\square$

定理 4.3 设 $K \in L(H)$ 且 K 有闭值域. 序列 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的一个 K -Riesz 基, 界为 A 和 B . $R(T)$ 是 H 的闭子空间, 其中 T 是 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 的预框架算子. 设 $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$, $0 \leq \mu < \frac{1-\lambda_1}{\|T\|}$, 若序列 $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ 满足 $\text{span}\{g_j\}_{j=1}^\infty \subset R(T)$ 且对任意有限数列 $c_1, c_2, \dots, c_n$ ($n \in \mathbb{N}$), 有

$$\left\|\sum_{j=1}^n c_j(f_j - g_j)\right\| \leq \lambda_1 \left\|\sum_{j=1}^n c_j f_j\right\| + \lambda_2 \left\|\sum_{j=1}^n c_j g_j\right\| + \mu \left(\sum_{j=1}^n |c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.11)$$

则 $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的 K -Riesz 基, 界为

$$\left(\frac{(1-\lambda_1)\sqrt{A}-\mu}{1+\lambda_2}\right)^2 \quad \text{和} \quad \left(\frac{(1+\lambda_1)\sqrt{B}+\mu}{1-\lambda_2}\right)^2. \quad (4.12)$$

证明 首先证明 $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的 K -框架. 因为 $R(T)$ 是 H 的闭子空间, 由命题 2.8 可得, 存在 $T^\dagger$, 对任意的 $f \in R(T)$, 使得 $f = TT^\dagger f$. 由于 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的 K -Riesz 基, 显然, $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的 K -框架. 由引理 2.10 得 $\|T\| \leq \sqrt{B}$. 对任意有限标量序列 $c_1, c_2, \dots, c_n$ ($n \in \mathbb{N}$), 由三角不等式得

$$\left\|\sum_{j=1}^n c_j g_j\right\| \leq \left\|\sum_{j=1}^n c_j(g_j - f_j)\right\| + \left\|\sum_{j=1}^n c_j f_j\right\| \leq (1+\lambda_1) \left\|\sum_{j=1}^n c_j f_j\right\| + \lambda_2 \left\|\sum_{j=1}^n c_j g_j\right\| + \mu \left(\sum_{j=1}^n |c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

整理得

$$\left\|\sum_{j=1}^n c_j g_j\right\| \leq \frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_2} \left\|\sum_{j=1}^n c_j f_j\right\| + \frac{\mu}{1-\lambda_2} \left(\sum_{j=1}^n |c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{B}(1+\lambda_1)+\mu}{1-\lambda_2} \left(\sum_{j=1}^n |c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.13)$$

由于有限序列 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 在 l^2 中是稠密的, 则对于 $\{c_j\}_{j=1}^\infty \in l^2$, 也有

$$\left\|\sum_{j=1}^\infty c_j g_j\right\| \leq \frac{(1+\lambda_1)\sqrt{B}+\mu}{1-\lambda_2} \left(\sum_{j=1}^\infty |c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

即 $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的一个 Bessel 序列. 根据引理 2.10 可定义有界线性算子如下:

$$U: l^2 \rightarrow H, \quad Uc = \sum_{j=1}^\infty c_j g_j, \quad c = \{c_j\}_{j=1}^\infty \in l^2. \quad (4.14)$$

对任意的 $f \in R(T)$, $f = TT^\dagger f$ 和 $T^\dagger f \in l^2$, 代入 (4.11) 得

$$\|f - UT^\dagger f\| \leq \lambda_1 \|f\| + \lambda_2 \|UT^\dagger f\| + \mu \|T^\dagger f\| \leq (\lambda_1 + \mu \|T^\dagger\|) \|f\| + \lambda_2 \|UT^\dagger f\|, \quad (4.15)$$

则有界线性算子 $L = UT^\dagger : R(T) \rightarrow R(T)$ 满足

$$\|f - Lf\| \leq (\lambda_1 + \mu \|T^\dagger\|) \|f\| + \lambda_2 \|Lf\|. \quad (4.16)$$

由于 $0 \leq \mu < \frac{1-\lambda_1}{\|T^\dagger\|}$, 则 $\lambda_1 + \mu \|T^\dagger\| \in [0, 1)$. 由引理 2.11 可知, L 可逆且 $\|L^{-1}\| \leq \frac{1+\lambda_2}{1-(\lambda_1+\mu\|T^\dagger\|)}$, 则对任意的 $f \in R(T)$, 有

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \langle LL^{-1}f, f \rangle = \langle L^{-1}f, L^*f \rangle \leq \|L^{-1}\| \|f\| \|L^*f\| = \|L^{-1}\| \|f\| \|(T^\dagger)^* U^* f\| \\ &\leq \frac{1+\lambda_2}{1-(\lambda_1+\mu\|T^\dagger\|)} \|f\| \|T^\dagger\| \|U^* f\|, \end{aligned}$$

从而, $\|U^* f\| \geq \frac{1-(\lambda_1+\mu\|T^\dagger\|)}{(1+\lambda_2)\|T^\dagger\|} \|f\|$. 又因为 $\|K^* f\| \leq \|K^*\| \|f\| = \|K\| \|f\|$, 所以,

$$\|U^* f\| \geq \frac{1-(\lambda_1+\mu\|T^\dagger\|)}{(1+\lambda_2)\|T^\dagger\|\|K\|} \|K^* f\|.$$

对任意的 $g \in H$, $g = f + h$, 其中 $f \in R(T)$, $h \in R(T)^\perp$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |\langle g, g_j \rangle|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f + h, g_j \rangle|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (|\langle f, g_j \rangle|^2 + |\langle h, g_j \rangle|^2 + 2\langle f, \langle g_j, h \rangle g_j \rangle) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (|\langle f, g_j \rangle|^2 + |\langle h, g_j \rangle|^2). \end{aligned}$$

又因为 $\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, g_j \rangle|^2 = \|U^* f\|^2$, 所以, $\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, g_j \rangle|^2 \geq (\frac{1-(\lambda_1+\mu\|T^\dagger\|)}{(1+\lambda_2)\|T^\dagger\|\|K\|} \|K^* f\|)^2$. 序列 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 H 的一个 K -框架, 由命题 2.14 知, $R(K) \subset R(T)$, 则 $h \in R(T)^\perp \subset R(K)^\perp$, $K^* g = K^*(f + h) = K^* f$.

综上所述, 对任意的 $g \in H$, 有

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle g, g_j \rangle|^2 \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, g_j \rangle|^2 \geq \frac{[\|T^\dagger\|^{-1} - (\lambda_1 + \mu)]^2}{\|K\|^2(1 + \lambda_2)^2} \|K^* g\|^2. \quad (4.17)$$

因此, $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 H 的 K -框架, 框架下界和上界分别为

$$\frac{[\|T^\dagger\|^{-1} - (\lambda_1 + \mu)]^2}{\|K\|^2(1 + \lambda_2)^2} \quad \text{和} \quad \frac{[\sqrt{B}(1 + \lambda_1) + \mu]^2}{(1 - \lambda_2)^2}.$$

其次证明 $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 H 的 K -Riesz 基. 由于 $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 H 的 K -框架且 K 有闭值域, 由引理 3.5 得, $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ 在 H 中是 $\overline{R(K)}$ -完备的. 根据 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 H 的一个 K -Riesz 基的定义与 (4.11) 计算可得, 对任意有限序列 $\{c_j\}$ ($j \in \mathbb{N}$), 有

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j \right\| &\leq \frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_2} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j f_j \right\| + \frac{\mu}{1-\lambda_2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{(1+\lambda_1)\sqrt{B} + \mu}{1-\lambda_2} \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j \right\| &\geq \frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_2} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j f_j \right\| - \frac{\mu}{1+\lambda_2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\frac{(1-\lambda_1)\sqrt{A} - \mu}{1+\lambda_2} \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

整理得

$$\left(\frac{(1-\lambda_1)\sqrt{A}-\mu}{1+\lambda_2}\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}|c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\sum_{j=1}^{\infty}c_jg_j\right\| \leq \left(\frac{(1+\lambda_1)\sqrt{B}+\mu}{1-\lambda_2}\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}|c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.18)$$

由 K -Riesz 基的定义和 (4.18) 可知, $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 H 的界为 $(\frac{(1-\lambda_1)\sqrt{A}-\mu}{1+\lambda_2})^2$ 和 $(\frac{(1+\lambda_1)\sqrt{B}+\mu}{1-\lambda_2})^2$ 的 K -Riesz 基. 定理 4.3 证毕. $\square$

推论 4.4 设 $K \in L(H)$ 且 K 有闭值域. 序列 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 H 的一个 K -Riesz 基, 界为 A 和 B . $R(T)$ 是 H 的闭子空间, 其中 T 是 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ 的预框架算子. 若 $\{f_j - g_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为 H 上以 R ($< \|T^\dagger\|^{-1}$) 为界的 Bessel 序列且 $\overline{\text{span}}\{g_j\}_{j=1}^{\infty} \subset R(T)$, 则 $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 H 的 K -Riesz 基, 界为

$$(\sqrt{A} - \sqrt{R})^2 \quad \text{和} \quad (\sqrt{B} + \sqrt{R})^2. \quad (4.19)$$

证明 先证 $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 H 的 K -框架. 因为 $\{f_j - g_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为 H 中界为 R 的 Bessel 序列, 则对任意的 $f \in H$, 有

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, f_j - g_j \rangle|^2 \leq R \|f\|^2. \quad (4.20)$$

对任意有限的子集 $J = \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$, 有

$$\{\langle f, g_j \rangle\}_{j=1}^n = \{\langle f, f_j \rangle\}_{j=1}^n - \{\langle f, f_j - g_j \rangle\}_{j=1}^n, \quad \forall f \in H. \quad (4.21)$$

根据 (4.20) 和 (4.21) 得, 对于任意的 $f \in H$, 有

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, f_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, f_j - g_j \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq (\sqrt{B} + \sqrt{R}) \|f\|.$$

故 $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 H 的 Bessel 序列. 类似于定理 4.3 中的证明, 我们可以得到

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, g_j \rangle|^2 \geq \frac{(\|T^\dagger\|^{-1} - \sqrt{R})^2}{\|K\|^2} \|K^* f\|^2.$$

因此, $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 H 中以 $(\frac{\|T^\dagger\|^{-1} - \sqrt{R}}{\|K\|})^2$ 和 $(\sqrt{B} + \sqrt{R})^2$ 为界的 K -框架.

再证 $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 H 的 K -Riesz 基. 由 $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 H 的 K -框架和引理 3.5 知, $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ 在 H 中是 $\overline{R(K)}$ -完备的. 借助于预框架算子的伴随算子, (4.20) 等价于

$$\left\|\sum_{j=1}^n c_j(f_j - g_j)\right\| \leq \sqrt{R} \left(\sum_{j=1}^n |c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.22)$$

对任意有限序列 $\{c_j\}_j, j \in \mathbb{N}$, 由三角不等式和 (4.22) 可得

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j\right\| \leq \left\|\sum_{j=1}^{\infty} c_j(f_j - g_j)\right\| + \left\|\sum_{j=1}^{\infty} c_j f_j\right\| \leq (\sqrt{B} + \sqrt{R}) \left(\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

同理可证,

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j\right\| \geq (\sqrt{A} - \sqrt{R}) \left(\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

由此可得, $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的 K -Riesz 基. 推论 4.4 证毕. $\square$

推论 4.5 设 $K \in L(H)$ 且 K 有闭值域. 序列 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的一个 K -Riesz 基, 界为 A 和 B . $R(T)$ 是 H 的闭子空间, 其中 T 是 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 的预框架算子. 若 $R = \sum_{j=1}^\infty \|f_j - g_j\|^2 < \|T^\dagger\|^{-1}$, 并且 $\overline{\text{span}}\{g_j\}_{j=1}^\infty \subset R(T)$, 则 $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ 是 H 的 K -Riesz 基, 界为

$$(\sqrt{A} - \sqrt{R})^2 \quad \text{和} \quad (\sqrt{B} + \sqrt{R})^2. \quad (4.23)$$

证明 因为 $R = \sum_{j=1}^\infty \|f_j - g_j\|^2 < \|T^\dagger\|^{-1}$, 所以对任意的 $f \in H$, 有

$$\sum_{j=1}^\infty \|\langle f, f_j - g_j \rangle\|^2 \leq \|f\|^2 \sum_{j=1}^\infty \|f_j - g_j\|^2 = R\|f\|^2. \quad (4.24)$$

这说明, $\{f_j - g_j\}_{j=1}^\infty$ 为 H 中界为 R ($< \|T^\dagger\|^{-1}$) 的 Bessel 序列. 由推论 4.4 可知结论成立. 推论 4.5 证毕. $\square$

致谢 衷心感谢审稿专家提出的宝贵修改意见.

参考文献

- 1 Duffin R J, Schaeffer A C. A class of nonharmonic Fourier series. Trans Amer Math Soc, 1952, 72: 341–366
- 2 Daubechies I, Grossmann A, Meyer Y. Painless nonorthogonal expansions. J Math Phys, 1986, 27: 1271–1283
- 3 BAolskei H, Hlawatsch F, Feichtinger H G. Frame-theoretic analysis of oversampled filter banks. IEEE Trans Signal Process, 1998, 46: 3256–3268
- 4 Candès E J, Donoho D L. New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise C^2 singularities. Comm Pure Appl Math, 2004, 57: 219–266
- 5 Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. Boston: Birkhäuser, 2003
- 6 Casazza P G. The art of frame theory. Taiwanese J Math, 2000, 4: 129–201
- 7 Young R. An Introduction to Nonharmonic Fourier Series. New York: Academic Press, 2001
- 8 施咸亮, 陈芳. Gabor 框架的必要条件. 中国科学: 数学, 2006, 36: 1413–1421
- 9 Xiao X C, Zeng X M. Some equalities and inequalities of g -continuous frames. Sci China Math, 2010, 53: 2621–2632
- 10 鲁大勇, 樊启斌. 多个生成子生成的 Gabor 框架. 中国科学: 数学, 2010, 40: 693–708
- 11 Hua D, Huang Y. The characterization and stability of g -Riesz frames for super Hilbert space. J Funct Spaces, 2015, 2015: 465094
- 12 Huang Y, Hua D. Tight K - g -frame and its novel characterizations via atomic systems. Adv Math Phys, 2016, 2016: 3783456
- 13 Sun W C. G -frames and g -Riesz bases. J Math Anal Appl, 2006, 322: 437–452
- 14 Abdollahpour M R, Najati A. Besselian g -frames and near g -Riesz bases. Appl Anal Discrete Math, 2011, 5: 259–270
- 15 李建振, 朱玉灿. Hilbert 空间中的 g -Riesz 框架. 中国科学: 数学, 2011, 41: 53–68
- 16 Găvruta L. Frames for operators. Appl Comput Harmon Anal, 2012, 32: 139–144
- 17 Găvruta L. Perturbation of K -frames. Bul Ştiinţ Univ Politeh Timiş Ser Mat Fiz, 2011, 56: 48–53
- 18 Xiao X C, Zhu Y C, Găvruta L. Some properties of K -frames in Hilbert spaces. Results Math, 2013, 63: 1243–1255
- 19 Asgari M S, Rahimi H. Generalized frames for operators in Hilbert spaces. Infin Dimens Anal Quantum Probab Relat Top, 2014, 17: 1469–1477
- 20 Ding M L, Xiao X C, Zeng X M. Tight K -frames in Hilbert spaces. Acta Math Sin Engl Ser, 2013, 56: 105–112
- 21 Gasazza P G, Christensen O. Perturbation of operators and applications to frame theory. J Fourier Anal Appl, 1997, 3: 543–557
- 22 Douglas R G. On majorization, factorization and range inclusion of operators on Hilbert space. Amer Math Soc, 1966, 17: 413–415
- 23 Christensen O. Frames containing a Riesz basis and approximation of the frame coefficients using finite-dimensional methods. J Math Anal Appl, 1996, 199: 256–270
- 24 Talor A E, Lay D C. An Introduction to Functional Analysis. New York: Wiley, 1980

25 李登峰, 薛明志. Banach 空间上的基和框架. 北京: 科学出版社, 2007

K -Riesz frames and the stability of K -Riesz frames for Hilbert spaces

HUANG YongDong & HUA DingLi

Abstract K -frames were proposed recently as a generalization of frames. In this paper, fusing the ideas of K -frames and Riesz frames, the definitions of K -Riesz frames and K -Riesz bases for Hilbert space are put forward. Equivalent characterizations of K -Riesz frames and K -Riesz bases are also given. In particular, the K -Riesz frames's property which is different from Riesz frames is obtained. Finally, by means of methods and techniques of frame theory, several results of stability of K -Riesz frames and K -Riesz bases are obtained.

Keywords K -Riesz frames, Riesz frames, K -Riesz bases, stability

MSC(2010) 42C15, 42C40

doi: 10.1360/N012015-00325