论文

混凝土材料三维统一硬化/软化弹塑性本构模型

路德春, 王国盛, 杜修力*

北京工业大学城市与工程安全减灾教育部重点实验室, 北京 100124

* E-mail: duxiuli@bjut.edu.cn

收稿日期: 2016-01-28; 接受日期: 2016-05-07

国家自然科学基金(批准号: 51522802, 51278012, 51421005, 51538001)和北京市自然科学基金重点项目(批准号: 8161001)资助

摘要 混凝土材料的弹塑性本构模型通常采用剪切型屈服面, 剪切型屈服面包括两种硬化方式, 即黏聚力(c)硬化和摩擦角(φ)硬化. 目前大多数本构模型都采用 c 硬化模式, 无法反映应力诱导各向异性. 本文的屈服函数是由混凝土材料非线性统一强度准则发展而来, 采用 φ 硬化模式. 基于 Sargin 提出的单轴压缩应力应变关系, 提出一个统一硬化/软化参数, 即硬化和软化参数具有相同的表达式. 将提出的硬化/软化参数与屈服函数相结合, 发展了混凝土材料三维统一硬化/软化弹塑性本构模型. 该模型能够统一地描述混凝土的硬化/软化, 避免了循环加载中再加载过程中硬化或软化参数的判断, 从而增加了计算效率. 模型有效地确定了塑性势参数, 使得建立的本构模型能够合理地控制混凝土的剪胀. 建立了峰值应力对应的等效塑性剪应变与围压的关系, 使得建立的模型能够描述混凝土材料的应变软化随围压的变化规律. 通过与普通强度和高强混凝土的双轴和真三轴试验结果比较表明, 建立的模型能够适用于不同类型的混凝土材料, 并且能够合理地描述混凝土材料的变形和强度特性.

关键词 混凝土, 本构模型, 摩擦角硬化模式, 统一硬化/软化参数, 非关联流动法则

1 引言

在复杂应力状态下, 混凝土材料的力学特性包括三维强度特性、静水压力效应、中主应力效应、应变软化行为以及剪胀特性等^[1]. 本构模型是描述材料应力应变关系的数学表达式, 反映材料在任意加载过程的变形和强度特性. 一般地, 混凝土材料的本构模型是基于某个理论框架来建立的, 例如连续损伤理论、弹塑性理论及弹塑性损伤理论等. 其中, 连续损伤

理论适用于描述混凝土刚度退化的性质, 并且通过弹性模量的变化来考虑裂纹的开展. 但是, 该理论不能反映混凝土在变形过程中的永久变形和剪胀^[2-6]. 弹塑性理论能够描述混凝土的剪胀、永久变形和软/硬化行为等, 因此该理论有广泛的适用性^[7-15]. 弹塑性损伤理论, 它是损伤理论和弹塑性理论的结合, 通常用来描述混凝土在循环荷载下塑性应变累积和刚度退化等行为^[16-22]. 本文重点关注混凝土在三维复杂应力作用下的静力弹塑性本构模型.

引用格式: 路德春, 王国盛, 杜修力. 混凝土材料三维统一硬化/软化弹塑性本构模型. 中国科学: 技术科学, 2016, 46: 815-828
Lu D C, Wang G S, Du X L. A 3D unified hardening/softening elastoplastic constitutive model for concrete (in Chinese). Sci Sin Tech, 2016, 46: 815-828, doi: 10.1360/N092016-00048

混凝土的弹塑性本构模型, 一般是通过结合强度准则和硬化/软化参数来建立的. 因此, 能够反映三维非线性强度特性、中主应力效应和静水压力效应的强度准则, 以及记录变形历史的硬化/软化参数是建立本构模型的核心要素. 基于一些经典的强度准则^[23~28], 建立了大量的混凝土弹塑性本构模型, 用来描述混凝土在复杂应力状态下的变形和强度特性. 典型的模型包括 Malvar 等人^[29], Kang 和 Willam^[30], Grassl 等人^[31], Papanikolaou 和 Kappos^[32], Jiang 和 Wu^[33], Poltronieri 等人^[34], Blanco 等人^[35]提出的弹塑性本构模型. 在弹塑性本构模型中, 硬化/软化参数记录塑性变形的历史, 通常是描述屈服面大小和位置的內变量. 常用的硬化/软化参数包括塑性应变矢量的大小^[29,36~39]、塑性体应变^[31,32]、塑性剪应变^[40~42]或塑性功的函数^[43,44]等. 对于塑性应变矢量, 它的值不会减小, 因此整个塑性加载历史就可以表现出来. 对于塑性功, 它表示与塑性变形有关的能量耗散, 所以它的值也是增加的. 目前, 已有的硬化/软化参数大多采用分段的表达式, 即硬化和软化参数分别采用不同的表达式. 例如, Grassl 等人^[31]、Papanikolaou 等人^[32]、Chi 等人^[40]以及 Imran^[45]等人提出的硬化/软化参数. 也有一些学者提出了统一的硬化/软化参数^[46], 其硬化和软化参数采用相同的表达式. 当本构模型中硬化和软化参数采用不同的表达式时, 硬化/软化参数的表达式相对简单, 并且硬化和软化的演化是相互独立的. 然而, 在进行循环加载时, 需要判断再加载过程中选用硬化函数或软化函数, 在数值计算时会影响计算精度和计算效率. 统一硬化/软化参数避免了分段型硬化/软化参数的这一缺陷, 使得本构模型的应用相对简单.

本文首先分析了剪切型屈服面的硬化规律, 包括黏聚力(c)硬化和摩擦角(ϕ)硬化两种模式, 进而分析了两种硬化模式各自的特点. 在 c 硬化过程中, 子午面和偏平面上的屈服曲线均为一系列平行的曲线, 不能考虑应力诱导各向异性; ϕ 硬化过程中, 子午面上屈服曲线开口逐渐变大, 偏平面上屈服曲线逐渐向三角形过渡, 能够考虑应力诱导各向异性. 基于分析的硬化/软化规律, 为了合理地考虑混凝土材料的剪胀特性和应力诱导各向异性, 本文采用 ϕ 硬化的剪切型屈服面, 并且提出一个统一硬化/软化参数. 作者于 2014 年提出的混凝土材料三维弹塑性本构模型^[41,42], 模型中硬化/软化参数采用分段表达式. 将

提出的统一硬化/软化参数与混凝土材料三维弹塑性本构模型相结合, 发展了混凝土材料三维统一硬化/软化弹塑性本构模型. 该模型能够统一地描述混凝土的硬化/软化, 并且能够反映混凝土峰值应力对应的应变随着围压增大的特性. 此外, 本文明确了塑性势参数的确定方法, 使得建立的本构模型能够合理地控制混凝土的体应变. 通过与普通强度和高强混凝土的双轴和三轴试验结果比较表明, 建立的模型能够适用于不同类型的混凝土材料, 并且能够合理地描述混凝土材料的应变软化、随围压增大应变软化减弱的性质, 以及剪胀特性等.

2 屈服函数

材料受到荷载作用后, 由弹性状态过渡到塑性状态, 而限定材料从弹性到塑性变化的状态面称为屈服面, 确定屈服面的函数称为屈服函数. 岩土类材料的屈服面一般包含 3 种, 第一种为压缩型屈服面, 材料屈服过程中的体变只有压缩没有膨胀, 当应力达到剪切破坏面上时, 体积就不在变化; 第二种为剪切型屈服面, 材料的体变只有膨胀没有压缩, 当达到破坏面时, 体积不再增大; 第三种为压缩屈服面与剪切屈服面的结合, 材料在屈服过程中的体变先压缩后膨胀. 为了描述混凝土材料的剪胀特性, 通常采用剪切型屈服面作为混凝土材料的屈服面.

本文采用与混凝土材料三维弹塑性本构模型^[41,42]相同的剪切型屈服函数, 即将混凝土材料非线性统一强度准则^[47~49]发展为屈服函数. 该准则适用于描述不同类型混凝土的三维强度特性, 在主应力空间的偏平面上, 强度曲线从下限 Matsuoka-Nakai 准则到上限 Mises 准则的强度曲线之间变化, 子午面上为幂函数曲线. 该准则包含 4 个强度参数, 均具有明确的物理意义, 分别为参考应力 p_r 处的破坏应力比 M_f 、三轴抗压强度比 α 、三向拉伸强度 σ_0 和静水压力效应指数 n . 混凝土材料非线性统一强度准则的表达式为

$$q_s^* = M_f \bar{p}, \quad (1)$$

式中, $\bar{p} = (\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3)/3$ 为过渡应力空间中的平均应力或静水压力, q_s^* 为过渡应力空间中的广义剪应力, 其表达式如下:

$$q_s^* = \alpha \sqrt{\bar{I}_1^2 - 3\bar{I}_2} + \frac{2(1-\alpha)\bar{I}_1}{3\sqrt{(\bar{I}_1\bar{I}_2 - \bar{I}_3)/(\bar{I}_1\bar{I}_2 - 9\bar{I}_3)} - 1}, \quad (2)$$

式中, $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$ 和 $\bar{I}_3$ 为过渡应力空间中的应力不变量, 表达式分别为

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3, \\ \bar{I}_2 = \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3 + \bar{\sigma}_3\bar{\sigma}_1, \\ \bar{I}_3 = \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3. \end{cases} \quad (3)$$

过渡应力空间的应力张量为

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \left[p_r \left(\frac{p + \sigma_0}{p_r} \right)^n - p \right] \delta_{ij}, \quad (4)$$

式中, σ_{ij} 为原始应力空间的应力张量; $p = \sigma_{ii}/3$ 为平均应力或静水压力; δ_{ij} 为 Kronecher 符号.

通过将广义非线性强度理论与混凝土硬化/软化参数相结合, 可得到混凝土材料的屈服函数, 并且屈服面的演化规律依赖于硬化/软化规律, 本文采用各向同性硬化. 屈服函数的表达式如下:

$$f(\sigma_{ij}, H) = 0, \quad (5)$$

式中, H 为硬化/软化参数.

3 硬化/软化参数

3.1 剪切型屈服面的硬化方式

对于剪切型屈服面, 其通用表达式为

$$f(\sigma_{ij}, c, \varphi) = 0. \quad (6)$$

式(6)的剪切型屈服面包括 3 种硬化模式, 分别为黏聚力(c)硬化、摩擦角(φ)硬化以及 c 和 φ 共同硬化. 对于只有 c 硬化的屈服函数, 式(6)中 c 通常表示为塑性应变 ε_{ij}^p 的函数, φ 保持为常数, 屈服面演化规律如图 1 所示. 从图中可以发现, 随着材料的硬化, 内变量 c (或 σ_0) 逐渐增大, 主应力空间的子午面和偏平面上强度曲线均向外扩张, 并且是一系列互相平行的曲线. 图 1(b)也表明, c 硬化无法反映应力诱导的屈服面各向异性. 当只有 φ 硬化时, 硬化参数 φ 通常表示为塑性应变 ε_{ij}^p 的函数, c 保持不变. 对于无黏聚强度的材料, 屈服面是通过坐标原点的, 即 $c=0$; 对于有黏聚强度的材料($c>0$), 屈服面交于静水压力轴的负方向, 交点为 σ_0 . 图 2 为无黏聚强度材料 φ 硬化的屈服面演化规律, 对于有黏聚强度的材料, 其屈服面可通过无黏聚强度的平移得到. 从图 2 中可以发现, 随着材料的硬化, 内变量 φ 逐渐增大, 主应力空间的子午面上屈服曲线开口逐渐增大, 与静水压力轴交点 σ_0

图 1 c 硬化的屈服面演化规律

(a) 子午面的屈服曲线; (b) 偏平面的屈服曲线

图 2 φ 硬化的屈服面演化规律

(a) 子午面的屈服曲线; (b) 偏平面的屈服曲线

的大小不变; 图 2(b)表明, 主应力空间的偏平面上强度曲线向外扩张, 并且随着 ϕ 值增加, 强度曲线逐渐向三角形过渡, 能够很好地反映屈服面在硬化过程中应力诱导的各向异性. 对于 c 和 ϕ 共同硬化的屈服函数, c 和 ϕ 均为塑性应变的函数, 这种硬化方式的屈服函数相对复杂. 为了反映应力诱导屈服面的各向异性, 以及简单起见, 本文采用 ϕ 硬化.

2.2 统一硬化/软化参数

混凝土材料的三维硬化/软化可以通过屈服面形状和大小的变化来描述, 并且控制变化规律的变量称为硬化/软化参数. 图 3 为任意加载路径下, 采用各向同性硬化法则时, 主应力空间中屈服面的演化规律, 与图 3 相对应的偏平面上屈服曲线的演化规律如图 4 和 5 所示. 图 4 将两个不同静水压力处的偏平面画在一起, 从图中可以看出, 在任意加载路径下, 当前应力点 B 和峰值应力点 D 在三轴压缩处的剪应力分别为 q_B^* 和 q_{DS}^* . 图 5 为三轴压缩子午面上的强度曲线, 图中 q_B^* 和 q_{BS}^* 分别为相同静水压力处, 当前应力点 B 在三轴压缩处的剪应力和峰值剪应力. q_{DS}^* 为峰值应力点 D 在三轴处的峰值剪应力. 从图 5 中可以发现, 点 B_S^* 与点 D^* 在同一峰值强度面上, 即只要知道 q_{BS}^* 的大小, 通过某一强度准则就可以求得 q_{DS}^* 的大小. q_{BS}^* 的大小又可以通过 q_B^* 与硬化/软化参数 H 确定. 硬化/软化参数 H 必须满足, 当加载到峰值强度面时, 屈服函数与强度函数表达式相同. 根据这个条件, 定义硬化/软化参数 H 表达式如下:

$$H = \frac{q^*}{q_s^*}, \quad (7)$$

式中, q^* 为当前剪应力, q_s^* 为与 q^* 相同静水压力处的峰值剪应力. 由式(7)可知, q_s^* 可通过 H 和 q^* 确定, 并且当 $H=1$ 时, $q^* = q_s^*$.

将式(7)带入式(1), 得到混凝土材料的屈服函数, 其表达式为

$$q^* = M_f \bar{p} H. \quad (8)$$

硬化/软化参数通常为塑性应变的函数, 本文的屈服面为剪切型屈服面, 因此采用等效塑性剪应变的函数作为硬化/软化参数, 可表示为

$$H = H(\varepsilon_d^p), \quad (9)$$

图 3 主应力空间中屈服面的演化规律

图 4 偏平面上屈服曲线的演化规律

图 5 三轴压缩子午面上的强度曲线

式中, ε_d^p 为等效塑性剪应变, 其表达式为

$$\varepsilon_d^p = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij}^p e_{ij}^p} = \sqrt{\frac{2}{3} \left(\varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{3} \varepsilon_v^p \delta_{ij} \right) \left(\varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{3} \varepsilon_v^p \delta_{ij} \right)}, \quad (10)$$

式中, e_{ij}^p 为塑性偏应变张量, ε_v^p 为塑性体应变. 式(9)的函数必须满足, 当等效塑性剪应变达到峰值应力对应的应变时, 硬化/软化参数 $H=1$, 此时的屈服面即为峰值强度面. 同时, H 的取值范围需满足 $0 \leq H \leq 1$.

混凝土材料硬化/软化参数 H 的表达式一般可通过单轴压缩应力应变关系来确定. 目前, 使用较多的单轴压缩应力应变关系包括, Sargin^[50]提出的有理函数; Hogenestad^[51]提出的分段函数表达式; 过镇海等人^[52]提出的分段式; Sahlin 等提出的指数式和 Okayama 提出的三角函数表达式等^[53]. 本文将参考 Sargin^[50]提出的应力应变关系式来确定混凝土材料的硬化/软化规律, 如图 6 为 Sargin 提出的单轴压缩应力应变曲线, 其表达式如下:

$$y_1 = \frac{Ax_1 + (D-1)x_1^2}{1 + (A-2)x_1 + Dx_1^2}, \quad (11)$$

式中, $y_1 = \sigma_1/f_c$, $x_1 = \varepsilon_1/\varepsilon_{1p}$, $A = E_0/E_p$, E_0 为初始弹性模量, $E_p = f_c/\varepsilon_{1p}$ 为应力达到单轴抗压强度 f_c 时的割线模量, ε_{1p} 为峰值应力对应的应变, 一般 $1.5 \leq A \leq 3$; D 为曲线的形状参数, 并且 $D \geq 0$.

为了描述多轴应力状态, 并且除去弹性应变, 只考虑塑性应变与屈服应力的关系, 将 Sargin^[50]提出的单轴压缩应力应变关系进行修正, 使其适用于多轴硬化/软化条件. 这里采用剪应力和峰值剪应力的比值与等效塑性剪应变的关系, 表达式如下:

$$y = \frac{A^3x + (D-1)x^2}{1 + (A^3-2)x + Dx^2}, \quad (12)$$

式中, $y = q^*/q_s^*$, $x = \varepsilon_d^p/\varepsilon_{d0}^p$.

如图 7 所示, 通过整理已发表的试验数据^[54-56], 可以发现参数 ε_{d0}^p 是与应力状态相关的. 这里通过对多种混凝土材料试验结果的分析, 可利用线性关系描述参数 ε_{d0}^p 与应力状态的关系, 表达式如下:

图 6 Sargin 提出的单轴压缩应力应变关系

图 7 参数 ε_{d0}^p 与应力状态之间的关系

$$\frac{\varepsilon_{d0}^p}{\varepsilon_{1,d0}^p} = 28.12 \frac{\sigma_3 + \sigma_0}{f_c + \sigma_0} - 1.56, \quad (13)$$

式中, σ_3 为小主应力, $\varepsilon_{1,d0}^p$ 为单轴压缩条件下峰值应力所对应的等效塑性剪应变.

式(12)将单轴压缩应力应变关系扩展到了一般应力状态, 并表示为剪应力与剪应变的关系. 联立式(7)和(12), 得:

$$H = \frac{A^3x + (D-1)x^2}{1 + (A^3-2)x + Dx^2}. \quad (14)$$

式(14)是混凝土的硬化/软化函数, 对于不同的混凝土, 参数 A 和 D 的值也是不同的. 图 8 为保持 A 为恒定值, 参数 D 对硬化/软化参数的影响规律. 从图中可以发现, 随着 D 值的增加, 曲线逐渐变得平缓, 并且前期 D 值较小时对硬化/软化规律的影响较大, 当 D 值较大时, 曲线的变化幅度减小, 并且当 $D \rightarrow \infty$ 时, 曲线变为水平直线, 此时表示理想塑性状态, 即没有软化发生.

2.3 单轴压缩条件下的屈服面演化规律

下面以单轴压缩为例来分析屈服面与塑性应变的关系. 图 9 为硬化/软化参数与塑性应变的关系, 分别取硬化段 $H=0.3$ (B 点)、 $H=0.7$ (C 点) 和 $H=1$ (D 点), 来分析屈服面的演化规律. 图 10 和 11 分别为屈服面在子午面上和偏平面上的演化规律. 图 9 表明, 硬化/软化参数 H 随着塑性应变是非线性变化的, 也就是比值 q^*/q_s^* 是非线性变化的. 在图 10 的单轴压缩加载过程中, 混凝土的屈服面逐渐扩张, 最终达到峰值

强度面. 在当前应力点 B 处, 混凝土的硬化参数 $H = q_B^*/q_{BS}^* = 0.3$, 对应于主应力空间的偏平面上, 屈服曲线如图 11(a)所示. 对于后继屈服点 C , 硬化参数 $H = q_C^*/q_{CS}^* = 0.7$, 对应的主应力空间的偏平面屈服曲线如图 11(b)所示. 比较图 11(a)和(b)发现, 随着加载应力的增大, 偏平面上的屈服曲线逐渐向三角形过渡, 能够反映应力诱导的屈服面各向异性.

对于软化段屈服面的演化规律, 如图 9 中的 C' 到 B' , 随着塑性变形的增加, 参数 H 是减小的, 这就表明在软化段加载过程中, 屈服面是缩小的, 并且缩小的规律与硬化段扩大的规律类似. 主应力空间中的子午面上屈服曲线的演化规律如图 10 中从应力点 C 到应力点 B 的加载, 主应力空间的偏平面上屈服曲线的软化规律如图 11 从(b)到(a)的变化过程.

3 非关联流动规律

为了合理地描述混凝土的剪胀特性, 通常采用

图 8 参数 D 对硬化规律的影响

图 9 单轴压缩下硬化/软化参数与塑性应变的关系

图 10 子午面上屈服曲线的演化规律

图 11 偏平面上屈服曲线的演化规律

(a) 当前屈服点的偏平面曲线; (b) 后继屈服点的偏平面曲线

非关联流动法则, 即塑性势函数与屈服函数采用不同的表达式. 在塑性理论中, 塑性势函数用来控制塑性应变矢量的方向, 其方向垂直于塑性势面. 当塑性应变矢量方向不同时, 塑性应变矢量产生的塑性体积应变大小是不同的, 因此, 可以通过塑性势函数来合理地控制混凝土材料的体积变形, 也就是可以合理地描述混凝土的剪胀特性. 由于塑性势面只是用

来控制塑性应变的方向, 很多学者都采用最简单的 Drucker-Prager 型塑性势面^[8,44]. 为了反映高静水压力下混凝土的变形规律, 即塑性体应变随静水压力的变化规律, 大量的学者采用了非线性类型的塑性势函数^[31,32,57,58]. 本文同样将广义非线性强度理论发展为塑性势函数, 其表达式与屈服函数类似:

$$g(\sigma_{ij}, H) = \alpha \sqrt{\bar{I}_1^2 - 3\bar{I}_2} + \frac{2(1-\alpha)\bar{I}_1}{3\sqrt{(\bar{I}_1\bar{I}_2 - \bar{I}_3)/(\bar{I}_1\bar{I}_2 - 9\bar{I}_3)} - 1} - M_g \bar{p}H, \quad (15)$$

式中, M_g 为塑性势参数, 确定方法见第 5 节.

图 12 为本文屈服曲线和塑性势线在子午面的形状. 当采用相关流动法则时, $g=f$, 图中黑线的塑性应变矢量所产生的塑性体应变和塑性剪应变分量分别是图中水平和竖直黑线. 当采用非关联流动法则时, $g \neq f$, 图中红线的塑性应变矢量所产生的塑性体应变和塑性剪应变分量分别是图中水平和竖直红线. 从图中可以发现, 非关联流动与相关流动相比, 相同大小的塑性应变矢量所产生的塑性体应变和塑性剪应变分量的大小分别是不同的. 当采用相关流动法则时, 将过大的计算混凝土的剪胀, 而采用非关联流动时, 可以通过改变塑性应变矢量的方向使得混凝土的三维变形与实际变形相符, 即能够合理地控制混凝土材料的剪胀特性.

4 加/卸载准则

Drucker 公设和 Ilyushin 公设是塑性力学的基础, 它们给出了塑性应变发生的条件. Drucker 公设是在应力空间中发展的, 只适用于稳定材料, 即没有软化发生的材料. Ilyushin 公设是在应变空间发展的, 既

图 12 相关和非关联流动规律

适用于稳定材料, 又适用于不稳定材料. 本文建立的本构模型能够描述混凝土的软化行为, 因此采用 Ilyushin 公设来判断加卸载. 在应变空间中加载函数采用如下表达式:

$$f(\sigma_{ij}, H) = f(C_{ijkl}^e (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p), H) = F(\varepsilon_{kl}, \varepsilon_{kl}^p, H), \quad (16)$$

式中, C_{ijkl}^e 为弹性刚度矩阵, 表达式见附录 1 的式(1).

对式(16)的应变张量 ε_{ij} 求偏微分, 得:

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} C_{ijkl}^e. \quad (17)$$

通过应力和应变的转化, 本文在应力空间建立了加卸载准则, 表达式如式(18)~(20)所示, 其物理意义如图 13 所示.

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^e, \quad d\varepsilon_{kl} > 0, \text{ 加载}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^e, \quad d\varepsilon_{kl} = 0, \text{ 中性变载}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^e, \quad d\varepsilon_{kl} < 0, \text{ 卸载}. \quad (20)$$

5 应力应变关系

本构模型增量形式的应力应变关系为

$$\{d\sigma\} = [C]_{ep} \{d\varepsilon\}, \quad (21)$$

式中, $[C]_{ep}$ 为弹塑性刚度矩阵. 将总应变增量分解成弹性应变增量与塑性应变增量之和, 即:

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^e\} + \{d\varepsilon^p\}. \quad (22)$$

总应力也可以写成弹性刚度矩阵与弹性应变的

图 13 加卸载准则

乘积, 即胡克定律:

$$\{\mathbf{d}\sigma\} = [\mathbf{C}]_e \{\mathbf{d}\varepsilon^e\}, \quad (23)$$

式中, $[\mathbf{C}]_e$ 为弹性刚度矩阵, 表达式见附录 1. 将式 (22) 代入式 (23), 得:

$$\{\mathbf{d}\sigma\} = [\mathbf{C}]_e (\{\mathbf{d}\varepsilon\} - \{\mathbf{d}\varepsilon^p\}). \quad (24)$$

塑性应变增量根据流动法则确定为

$$\{\mathbf{d}\varepsilon^p\} = d\lambda \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\}. \quad (25)$$

将式 (24) 代入式 (25), 得:

$$\{\mathbf{d}\sigma\} = [\mathbf{C}]_e \left(\{\mathbf{d}\varepsilon\} - d\lambda \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\} \right). \quad (26)$$

根据一致性条件, 得:

$$df = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{\mathbf{d}\sigma\} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \varepsilon^p} \right\} \{\mathbf{d}\varepsilon^p\} = 0. \quad (27)$$

将式 (25) 和 (26) 代入式 (27), 得:

$$d\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [\mathbf{C}]_e \{\mathbf{d}\varepsilon\}}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [\mathbf{C}]_e \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\}}. \quad (28)$$

将式 (28) 代入式 (26), 得:

$$\{\mathbf{d}\sigma\} = \left[[\mathbf{C}]_e - \frac{[\mathbf{C}]_e \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T [\mathbf{C}]_e}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [\mathbf{C}]_e \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\}} \right] \{\mathbf{d}\varepsilon\}, \quad (29)$$

式中, $\{\partial g / \partial \sigma\}$, $\{\partial f / \partial \sigma\}$ 和 $\{\partial f / \partial \varepsilon_p\}$ 的向量表达式见附录 1.

所建立的混凝土材料统一弹塑性本构模型共有 10 个材料参数, 分别为混凝土材料的弹性杨氏模量 E 和泊松比 ν ; 广义非线性强度准则的强度参数 M_f , σ_0 , n 和 α ; 塑性势函数参数 M_g ; 单轴压缩条件下的峰值应力对应的塑性剪应变 $\varepsilon_{1,d0}^p$, 以及硬化/软化函数中的参数 A 和 D .

6 模型参数及确定方法

混凝土材料统一硬化/软化弹塑性本构模型中的 10 个材料参数, 都可以通过混凝土的单轴和双轴试验确定. 其中, 弹性模量 E 、泊松比 ν 和单轴压缩下峰

值塑性剪应变 $\varepsilon_{1,d0}^p$ 是混凝土材料最基本的参数, 可通过单轴压缩试验确定.

6.1 非线性统一强度准则的参数

对于混凝土材料非线性统一强度准则的强度参数 M_f , σ_0 , n 和 α 分别可以通过如下表达式确定^[59]:

$$\sigma_0 = \frac{2f_c^m f_{bt} + f_c f_{bt}^m}{3(f_c^m - f_{bt}^m)}, \quad (30)$$

$$M_f = \frac{3f_c(f_c^m - f_{bt}^m)}{f_c^m(f_c + 2f_{bt})}, \quad (31)$$

$$n = \frac{\ln f_{bc} - \ln f_t}{\ln(3\sigma_0 + f_{bc}) - \ln(3\sigma_0 - f_t)}, \quad (32)$$

$\alpha =$

$$\frac{(3 + M_f)f_t p_r \left(\frac{-f_t/3 + \sigma_0}{p_r} \right)^n - 3M_f p_r^2 \left(\frac{-f_t/3 + \sigma_0}{p_r} \right)^{2n}}{f_t^2}, \quad (33)$$

式中, f_c , f_t , f_{bc} 和 f_{bt} 分别为混凝土的单轴压缩强度、单轴拉伸强度、双轴压缩强度和双轴拉伸强度, 都可以通过试验确定. 当缺少典型试验数据时, σ_0 可通过文献[60]的方法或经验关系得到:

$$\sigma_0 = 0.1f_c. \quad (34)$$

M_f 可通过其物理几何意义得到, 即:

$$M_f = \frac{3f_c}{f_c + 3\sigma_0}. \quad (35)$$

6.2 塑性势参数

在弹塑性本构模型中, 根据流动法则, 塑性势函数的偏导数为塑性应变增量的方向. 不同塑性应变方向在相同应变增量下, 产生的塑性体应变分量大小是不同的. 通过塑性势参数 M_g , 可以合理地控制塑性体积变形. 本文通过单轴压缩条件下体积变形来确定参数 M_g 的大小. 以 Kupfer 的试验结果^[56]为例, 取参数 M_g 分别为 $M_g = M_f$, $M_g = M_f/2$, $M_g = M_f/3$, $M_g = M_f/4$ 和 $M_g = M_f/5$. 图 14 为不同 M_g 的体应变随应力的关系曲线与试验结果的对比, 从图中可以看出, 当 $M_g = M_f/4$ 时, 计算曲线与试验结果吻合较好, 并且当 $M_g \leq M_f/4$ 时, 理论计算曲线变化很小. 因此, 文章中参数 M_g 统一取为 $M_g = M_f/4$.

图14 不同 M_g 的体积应变计算曲线与试验结果^[55]的比较

6.3 硬化/软化函数中的参数

对于硬化/软化函数中的参数 A , 可通过下式确定:

$$A = \frac{E}{E_p}, \quad (36)$$

式中, E 为初始弹性模量, $E_p = f_c / \epsilon_p$ 为应力达到峰值应力时的割线模量. 根据试验规律, E_p 随着应力状态的变化是不同的, 因此参数 A 也是随着应力状态变化的, 如图 15 中的试验结果所示. 根据试验数据^[54,55,60], 利用线性如下的线性关系表示参数 A 与应力状态之间的关系:

$$A = 10.997 \frac{\sigma_3 + \sigma_0}{f_c + \sigma_0} + A_0 - 1, \quad (37)$$

式中, A_0 为单轴压缩下的初始弹性模量与峰值割线模

图15 参数 A 与应力状态之间的关系

量的比值.

参数 D 为形状参数, 可通过单轴压缩应力应变试验曲线的形状确定, 并且 $D \geq 0$.

7 本构模型的试验验证

混凝土材料在复杂应力条件下的力学特性试验, 是混凝土本构理论研究的一个重要方面. 多年来, 无论在试验设备的研制、试验技术的研发等方面都得到迅速发展. 本文利用研究者已取得的高强和普通混凝土材料的双轴、三轴试验结果, 验证修正的混凝土材料三维弹塑性本构模型.

7.1 双轴试验验证

Kupfer 等人^[56]进行了 C30 混凝土的双轴拉压试验, 混凝土试样的强度分别为 $f_c=32.8$ MPa, $f_{bc}=38.0$ MPa, $f_t=3.0$ MPa 和 $f_{bt}=2.6$ MPa. 双轴拉压试验过程中, 中主应力设定为 0, 大主应力和小主应力的比值分别为 $1/-0.052$, $1/-0.103$ 和 $1/-0.204$, 试验结果如图 16 所示. 模型计算所需参数取值如表 1 所示. 图 16 的理论曲线均与试验结果均吻合良好. 上述试验条件下的中主应力系数分别为 $b=0$, $b=0.05$ 和 $b=0.09$, 其值相差不大, 并且都接近 $b=0$. 但是从图中可以看出, 应力应变曲线有明显的不同, 这主要是由于静水压力效应所导致的.

Hussein^[61]进行了 C90 高强混凝土的双轴压压试验, 试样强度分别为 $f_c=96.5$ MPa, $f_{bc}=106$ MPa, $f_t=4.8$ MPa 和 $f_{bt}=5.2$ MPa. 加载过程中, 小主应力设定为 0, 大主应力和中主应力的比值分别为 $1/0.2$, $1/0.5$ 和 $1/1$, 试验结果如图 17 所示, 模型计算所需参数取值如表 1 所示. 并且试验理论曲线与试验结果吻合良好, 说明该模型可以适用于不同类型的混凝土材料.

7.2 三轴试验验证

Candappa 等人^[54]进行了 C60 混凝土的三轴试验, 试样的直径和高度分别为 98 和 200 mm, 并且单轴压缩强度 $f_c=60.6$ MPa. 在加载过程中, 围压分别取 0, 4, 8 和 12 MPa, 然后施加竖向荷载使混凝土试样破坏. 试验结果和模型预测结果的比较如图 18 所示, 模型计算所需参数取值如表 1 所示. 从图中可以发现, 随着围压的增大, 破坏应力和峰值应变都不断的增大, 并且理论曲线与试验点吻合较好.

图 16 双轴拉压下理论曲线与试验结果的比较

(a) $\sigma_1/\sigma_2=1/-0.052$; (b) $\sigma_1/\sigma_2=1/-0.103$; (c) $\sigma_1/\sigma_2=1/-0.204$

图 17 双轴压压下理论曲线与试验结果的比较

(a) $\sigma_1/\sigma_2=1/0.2$; (b) $\sigma_1/\sigma_2=1/0.5$; (c) $\sigma_1/\sigma_2=1/1$

图 18 三轴压缩下理论曲线与试验结果的比较

Xie 等人^[62]也进行了 C120 高强混凝土的三轴试验, 试样的直径和高度分别为 100 和 200 mm, 并且单轴压缩强度 $f_c=119.0$ MPa, 加载装置采用 2700 kN 的液压伺服试验机. 在加载过程中, 围压分别取 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 48 和 60 MPa, 然后施加竖向荷载使混凝土试样破坏. 试验结果和模型预测结果的比较如图 19 所示, 模型计算所需参数取值如表 1 所示. 从图中可以发现, 随着围压的增大, 破坏应力和峰值应变变同样不断的增大, 并且随着围压的增加, 下降段的应力应变曲线逐渐变的平缓, 特别当围压等于 60 MPa 时, 混凝土基本不发生软化现象. 图 19 也表明, 由于考虑了峰值应力对应等效塑性剪应变随应力状态的变化规律, 提出的本构模型可以很好地描述混凝土剪胀随围压变化的性质.

通过与两种混凝土材料, 即正常强度和高强混凝土在三轴和双轴条件下的试验比较表明, 建立的本构模型能够很好地描述不同混凝土材料在复杂应力条件下的变形和强度特性. 对比图 18 和 19 发现, 在高围压下, 混凝土材料试验结果均表现出软化行为减弱, 甚至不再发生软化. 但是, 在低围压下, 不同试验结果相差较大, 图 18 中围压为 4 MPa 时的试

图 19 三轴压缩下理论曲线与试验结果的比较

验结果软化现象显著, 但图 19 中围压为 6 MPa 时, 试验结果开始软化明显, 后期达到平缓. 因此, 建立的本构模型无法精确描述每种混凝土材料在低围压下的软化行为, 但可以合理地反映混凝土软化行为随围压变化的规律.

8 结论

作者于 2014 年初步建立了一个混凝土材料三维弹塑性本构模型, 屈服函数和塑性势函数均由广义非线性强度准则发展而来, 硬化/软化参数采用等效塑性剪应变的函数, 并且通过单轴压缩应力应变关系确定硬化/软化参数的表达式. 该模型可以适用于不同类型的混凝土, 并且能够反映混凝土的三维强度特性、中主应力效应、静水压力效应、软化行为和剪胀特性等. 本文探讨了混凝土材料的硬化和软化规律, 提出一个新的硬化/软化参数, 通过与混凝土材料三维弹塑性本构模型相结合, 发展了混凝土材料三维统一硬化/软化本构模型.

1) 分析了剪切型屈服面 c 硬化和 ϕ 硬化的特点, 即 ϕ 硬化能够反映应力诱导屈服面的各向异性, 而 c 硬化无法考虑. 通过分析三维应力状态下混凝土材

表 1 双轴和三轴下混凝土材料参数

混凝土	E (GPa)	ν	σ_0 (GPa)	n	M_f	α	M_g	A_0	D	$\varepsilon_{1,00}^p$
C30	30	0.15	2.42	0.85	2.44	0.41	0.59	2.47	1.00	0.0024
C60	36.0	0.15	6.06	0.72	2.31	0.5	0.58	2.35	1.00	0.0035
C90	48	0.15	9.6	0.50	2.3	0.6	0.58	1.60	9.00	0.0024
C120	68	0.15	11.5	0.70	2.31	0.3	0.58	1.5	0.10	0.0032

料的屈服面在主应力空间、偏平面和子午面上的演化规律, 并结合 Sargin 提出单轴压缩应力应变关系, 提出一个统一硬化/软化参数. 以单轴压缩条件为例, 分别分析了混凝土材料硬化和软化时子午面和偏平面屈服曲线的演化规律, 对于硬化段, 屈服面时扩张的, 对于软化段, 屈服面是缩小的, 二者扩大和缩小的规律类似.

2) 给出了本构模型中材料参数的确定方法, 其中一些参数在前期的研究中已经给出了确定方法.

剩余的参数, 例如塑性势参数 M_g 是通过分析混凝土材料单轴压缩下的体应变规律给出, 参数 A 是根据混凝土割线模量随应力状态的变化关系给出的.

3) 通过与高强和普通强度混凝土的双轴试验和三轴试验结果的比较表明, 混凝土材料三维统一硬化/软化本构模型能够适用于不同类型的混凝土材料, 能够反映混凝土材料峰值应力对应的应变随围压增加而增大的特性, 并且能够合理地描述混凝土的应变软化行为以及剪胀特性等.

补充材料

本文的补充材料见网络版 tech.scichina.com. 补充材料为作者提供的原始数据, 作者对其学术质量和内容负责.

参考文献

- 1 Chen W F. Plasticity in Reinforced Concrete. New York: McGraw-Hill Book Company, 1982
- 2 Lubarda V A, Krajcinovic D, Mastilovic S. Damage model for brittle elastic solids with unequal tensile and compressive strengths. Eng Fract Mech, 1994, 49: 681–697
- 3 Comi C, Perego U. Fracture energy based bi-dissipative damage model for concrete. Int J Solids Struct, 2001, 38: 6427–6451
- 4 Liu Y, Teng S, Soh C K. Three-dimensional damage model for concrete. I: Theory. J Eng Mech, ASCE, 2008, 134: 72–81
- 5 Combescure C, Dumontet H, Voltaire F. Homogenised constitutive model coupling damage and debonding for reinforced concrete structures under cyclic solicitations. Int J Solids Struct, 2013, 50: 3861–3874
- 6 Zhai Y, Deng Z, Li N, et al. Study on compressive mechanical capabilities of concrete after high temperature exposure and thermo-damage constitutive model. Constr Build Mater, 2014, 68: 777–782
- 7 Ottosen N S. Constitutive model for short-time loading of concrete. J Eng Mech, ASCE, 1979, 105: 127–141
- 8 Han D J, Chen W F. A nonuniform hardening plasticity model for concrete materials. Mech Mater, 1985, 4: 283–302
- 9 Sankarasubramanian G, Rajasekaran S. Constitutive modeling of concrete using a new failure criterion. Comput Struct, 1996, 58: 1003–1014
- 10 Liu J, Foster S J. A three-dimensional finite element model for confined concrete structures. Comput Struct, 2000, 77: 441–451
- 11 Kwon M, Spacone E. Three-dimensional finite element analyses of reinforced concrete columns. Comput Struct, 2002, 80: 199–212
- 12 Papanikolaou V K, Kappos A J. Confinement-sensitive plasticity constitutive model for concrete in triaxial compression. Int J Solids Struct, 2007, 44: 7021–7048
- 13 Fuina J S, Pitangueira R L S, Penna S S. A comparison of two microplane constitutive models for quasi-brittle materials. Appl Math Model, 2011, 35: 5326–5337
- 14 Poltronieri F, Piccolroaz A, Bigoni D, et al. A simple and robust elastoplastic constitutive model for concrete. Eng Struct, 2014, 60: 81–84
- 15 Li L, Ruan S, Zeng L. Mechanical properties and constitutive equations of concrete containing a low volume of tire rubber particles. Constr Build Mater, 2014, 70: 291–308
- 16 Lubliner J, Oliver J, Oller S, et al. A plastic-damage model for concrete. Int J Solids Struct, 1989, 25: 299–326
- 17 Abu-Lebdeh T M, Voyiadjis G Z. Plasticity-damage model for concrete under cyclic multiaxial loading. J Eng Mech, ASCE, 1993, 119: 1465–1484
- 18 Wu J Y, Li J, Faria R. An energy release rate-based plastic-damage model for concrete. Int J Solids Struct, 2006, 43: 583–612
- 19 Mohamad-Hussein A, Shao J F. Modelling of elastoplastic behaviour with non-local damage in concrete under compression. Comput Struct, 2007, 85: 1757–1768
- 20 Abu Al-Rub R K, Kim S M. Computational applications of a coupled plasticity-damage constitutive model for simulating plain concrete fracture. Eng Fract Mech, 2010, 77: 1577–1603
- 21 Wu J Y, Xu S L. An augmented multirack elastoplastic damage model for tensile cracking. Int J Solids Struct, 2011, 48: 2511–2528
- 22 Grassl P, Xenos D, Nyström U, et al. CDPM2: A damage-plasticity approach to modelling the failure of concrete. Int J Solids Struct, 2013,

- 50: 3805–3816
- 23 Willam K J, Warnke E P. Constitutive model for the triaxial behavior of concrete. In: Proceedings Seminar on Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses. International Association for Bridge and Structural Engineering, 1974, 19: 1–30
 - 24 Ottosen N S. A failure criterion for concrete. *J Eng Mech, ASCE*, 1977, 103: 527–535
 - 25 Zienkiewicz O C, Pande G N. Some useful forms of isotropic yield surface for soil and rock mechanics. In: Gudehus G, ed. *Finite Elements in Geomechanics*. New York: Wiley, 1977. 179–190
 - 26 Hsieh S S, Ting E C, Chen W F. Applications of a plastic-fracture model to concrete structures. *Comput Struct*, 1988, 28: 373–393
 - 27 Menétrey P H, Willam K J. Triaxial failure criterion for concrete and its generalization. *ACI Struct J*, 1995 92: 311–318
 - 28 Pivonka P, Lackner R, Mang H A. Shapes of loading surfaces of concrete models and their influence on the peak load and failure mode in structural analyses. *Int J Eng Sci*, 2003, 41: 1649–1665
 - 29 Malvar L J, Crawford J E, Wesevich J W, et al. A plasticity concrete material model for DYNA3D. *Int J Impact Eng*, 1997, 19: 847–873
 - 30 Kang H D, Willam K J. Localization characteristics of triaxial concrete model. *J Eng Mech, ASCE*, 1999, 125: 941–950
 - 31 Grassl P, Lundgren K, Gylltoft K. Concrete in compression: A plasticity theory with a novel hardening Law. *Int J Solids Struct*, 2002, 39: 5205–5223
 - 32 Papanikolaou V K, Kappos A J. Confinement-sensitive plasticity constitutive model for concrete in triaxial compression. *Int J Solids Struct*, 2007, 44: 7021–7048
 - 33 Jiang J F, Wu Y F. Identification of material parameters for Drucker-Prager plasticity model for FRP confined circular concrete columns. *Int J Solids Struct*, 2012, 49: 445–456
 - 34 Poltronieri F, Piccolroaz A, Bigoni D, et al. A simple and robust elastoplastic constitutive model for concrete. *Eng Struct*, 2014, 60: 81–84
 - 35 Blanco A, Pujadas P, Cavalaro S, et al. Constitutive model for fibre reinforced concrete based on the Barcelona test. *Cement Concrete Comp*, 2014, 53: 327–340
 - 36 Etse G, Willam K J. Fracture energy formulation for inelastic behavior of plain concrete. *J Eng Mech, ASCE*, 1994, 120: 1983–2011
 - 37 Menétrey P. Numerical analysis of punching failure in reinforced concrete structures. Dissertation of Doctor Degree. Lausanne, Switzerland: Swiss Federal Institute of Technology, 1994
 - 38 Pivonka P, Lackner R, Mang H A. Numerical analyses of concrete subjected to triaxial compressive loading. In: European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2000, Barcelona, 11–14 September 2000
 - 39 Barros M. Elasto-plastic modelling of confined concrete elements following MC90 equations. *Eng Struct*, 2001, 23: 311–318
 - 40 Chi Y, Xu L, Yu H. Constitutive modeling of steel-polypropylene hybrid fiber reinforced concrete using a non-associated plasticity and its numerical implementation. *Compos Struct*, 2014, 111: 497–509
 - 41 路德春, 杜修力, 闫静茹, 等. 混凝土材料三维弹塑性本构模型. *中国科学: 技术科学*, 2014, 44: 847–860
 - 42 Lu D C, Du X L, Wang G S, et al. A three-dimensional elastoplastic constitutive model for concrete. *Comput Struct*, 2016, 163: 41–55
 - 43 Han D J, Chen W F. Constitutive modeling in analysis of concrete structures. *J Eng Mech, ASCE*, 1987, 113: 577–593
 - 44 Ohtani Y, Chen W F. A plastic-softening model for concrete materials. *Comput Struct*, 1989, 33: 1047–1055
 - 45 Imran I, Pantazopoulou S J. Plasticity model for concrete under triaxial compress. *J Eng Mech, ASCE*, 2001, 127: 281–290
 - 46 Borja R I, Sama K M, Sana P F. On the numerical integration of three-invariant elastoplastic constitutive models. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2003, 192: 1227–1258
 - 47 Du X L, Lu D C, Gong Q M, et al. Nonlinear unified strength criterion for concrete under three-dimensional stress states. *J Eng Mech, ASCE* 2010, 136: 51–59
 - 48 Yao Y P, Lu D C, Zhou A N, et al. Generalized non-linear strength theory and transformed stress space. *Sci China Ser E-Tech Sci*, 2004, 47: 691–709
 - 49 路德春. 基于广义非线性强度理论的土的应力路径本构模型. 博士学位论文. 北京: 北京航空航天大学, 2006
 - 50 Sargin M. Stress-strain relationship for concrete and the analysis of structural concrete sections. Report: S.M. Study No 4. Waterloo: University of Waterloo, Solid Mechanics Division, 1971
 - 51 Hogenestad E. Concrete stress distribution in ultimate strength design. *ACI J*, 1955, 52: 455–479
 - 52 过镇海, 张秀琴, 张达成, 等. 混凝土应力-应变全曲线的试验研究. *建筑结构学报*, 1982, 3: 1–12
 - 53 江见鲸, 李杰, 金伟良. 高等混凝土结构理论. 北京: 中国建筑工业出版社, 2006
 - 54 Candappa D C, Sanjayan J G, Setunge S. Complete triaxial stress-strain curves of high-strength concrete. *J Mater Civil Eng*, 2001, 13: 209–215
 - 55 Lu X, Hsu C. Tangent Poisson's ration of high-strength concrete in triaxial compression. *Mag Concrete Res*, 2007, 59: 69–77

- 56 Kupfer H, Hilsdorf H K, Rusch H. Behavior of concrete under biaxial stresses. *ACI Mater J*, 1969, 66: 656–666
- 57 Grassl P, Jirasek M. Damage-plastic model for concrete failure. *Int J Solids Struct*, 2006, 43: 7166–7196
- 58 Cervenka J, Papanikolaou V K. Three dimensional combined fracture-plastic material model for concrete. *Int J Plasticity*, 2008, 24: 2192–2220
- 59 杜修力, 王国盛, 路德春. 混凝土材料非线性多轴动态强度准则. *中国科学: 技术科学*, 2014, 44: 1319–1332
- 60 王国盛, 路德春, 杜修力, 等. 基于 S 准则发展的混凝土动态多轴强度准则. *力学学报*, 2016, 48: 636–652
- 61 Kotsovos M D. A mathematical model of deformational behavior of concrete under generalized stress based on fundamental material properties. *Matériaux et Constructions*, 1980, 13: 289–298
- 62 Hussein A A. Behaviour of high-strength concrete under biaxial loading condition. Dissertation of Doctor Degree. Newfoundland: Memorial University of Newfoundland, 1998
- 63 Xie J, Elwi A E, MacGregor J G. Mechanical properties of three high-strength concretes containing silica fume. *ACI Mater J*, 1995, 92: 135–145

A 3D unified hardening/softening elastoplastic constitutive model for concrete

LU DeChun, WANG GuoSheng & DU XiuLi

Key Laboratory of Urban Security and Disaster Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China

The elastoplastic constitutive model for concrete material often employs the shear yield surface which includes two kinds of hardening modes, namely, cohesion (c) hardening and friction (ϕ) hardening. Most of existing constitutive models employed c hardening mode which is not able to reflect the stress induced anisotropy. The yield surface in this paper is developed by nonlinear unified strength criterion for concrete, and the ϕ hardening mode is used. A unified hardening/softening parameter is proposed on the bases of the uniaxial compressive stress-strain relation proposed by Sargin. Then a 3D unified hardening/softening elastoplastic constitutive model is established by combing the hardening/softening parameter with the yield surface. The developed model is capable of describing the hardening and softening uniformly. Therefore, the computational efficiency of numerical analysis is increased. The model gives the determination of the plastic potential parameter, which makes the dilatancy can be controlled reasonably. Moreover, the relationship between the equivalent plastic shear strain related to the peak stress and confining pressure is supposed by the test results. Thus the model can reasonably describe the change rules of strain softening of concrete with the confining pressure. Comparisons with the biaxial and triaxial tests of high strength and normal strength concrete indicate that the proposed model is suitable for various kinds of concrete materials, and can reasonably describe the 3D deformation and strength properties of concretes.

concrete, constitutive model, friction hardening mode, unified hardening/softening parameter, non-associated flow rule

doi: 10.1360/N092016-00048