关于 Donaldson-Floer 理论的代数几何构造

献给胡和生教授 90 华诞

李骏^{1,2}

1. 上海数学中心, 复旦大学, 上海 200433;

2. Department of Mathematics, Stanford University, Stanford, CA 94305, USA

E-mail: lijun2210@fudan.edu.cn

收稿日期: 2017-12-25; 接受日期: 2018-03-13; 网络出版日期: 2018-04-20

摘要 本文概述了相对 Donaldson 不变量的一个代数构造, 同时猜测这一代数相对 Donaldson 不变量可以配对给出代数的 Donaldson 不变量, 从而构成代数 Donaldson-Floer 理论.

关键词 Donaldson 不变量 代数曲面 Floer 理论

MSC (2010) 主题分类 14N35, 57R57

1 引言

早在 20 世纪 80 年代作者攻读硕士学位时, 胡和生先生就指导我学习四维流形上的规范场理论, 并希望我能推广她的一个关于非紧空间上一类规范场的唯一性的结果. 当时由于本人分析功底的欠缺, 在这个问题上没有取得进展. 在以后几十年的数学研究生涯中, 规范场一直是我科研主攻方向之一, 这不能不说是胡先生当年指点和影响的结果. 在此, 我将简短地介绍一下我最近在规范场理论研究中的一些进展, 庆祝胡和生先生 90 华诞.

研究四维流形的光滑结构一直是数学家关心的问题. 四维流形多项式不变量是 Donaldson 发现的紧致四维流形的光滑结构不变量. 自 20 世纪 90 年代起, 计算并刻画这些不变量成为许多数学家工作的焦点. Donaldson-Floer 理论正是为了解决这一问题而形成.

简单来说, 对一个定向的、紧致的四维流形 M , 如果找一个三维子空间 $\Sigma \subset M$ 使得它把 M 分成两个带边的四维流形 M_1 和 M_2 , 那么当我们把 M_1 和 M_2 沿它们的边界 ∂M_1 和 ∂M_2 粘贴起来之后, 我们又重新得到了初始的四维流形 M . Donaldson-Floer 理论就是希望通过研究 $(M_1, \partial M_1)$ 和 $(M_2, \partial M_2)$ 的相对 Donaldson 多项式不变量来得到四维流形 M 的多项式不变量.

对一个带边的四维流形 N , 记它的边界为 $\Sigma = \partial N$, 则它的相对 Donaldson 多项式不变量是一个取值于 Floer 同调群 $FH_*(\Sigma)$ 的多重线性映照

$$\mathcal{D}_N^{\text{rel}} : \text{Sym}^\bullet H^2(N) \rightarrow FH_*(\Sigma).$$

英文引用格式: Li J. Toward an algebraic Donaldson-Floer theory (survey) (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 785–790, doi: 10.1360/N012017-00267

前面提到的 Donaldson-Floer 理论将四维流形 M 的 Donaldson 多项式不变量 $\mathcal{D}_M : \text{Sym}^\bullet H^2(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ 与 $(M_1, \partial M_1)$ 和 $(M_2, \partial M_2)$ 的相对 Donaldson 多项式不变量, 通过以下的配对等同起来:

$$\mathcal{D}_M = \langle \mathcal{D}_{M_1, \partial M_1}^{\text{rel}}, \mathcal{D}_{M_2, \partial M_2}^{\text{rel}} \rangle. \quad (1.1)$$

这是将拓扑中的“剪开和拼接”的想法推广到了规范场中. 这一想法在 20 世纪 90 年代得到了相当的关注及发展, 从而形成了 Donaldson-Floer 理论. Braam 和 Donaldson, 以及 Taubes、Morgan、Mrowka 和 Ruberman 都对这一理论的发展做出了重要的工作 (参见文献 [1–5]).

以上提到的 Donaldson-Floer 理论是在微分几何的构架下发展起来的. 在文献 [6] 中, Donaldson 前瞻性地提出, 如果 M 是一个代数曲面, 并且用代数的方法把 M 切割成两个代数曲面, 那么应该有一个相应的代数理论, 把代数的 Donaldson 多项式不变量转变成相应的两个分割后的代数曲面代数的相对 Donaldson 多项式不变量的配对. 在该文献中, Donaldson 对他的想法进行了展开, 并成功地用这一新的方法, 计算了一类 $K3$ 曲面的 Donaldson 多项式不变量.

用规范场来构造一类代数空间的不变量, 不仅有代数曲面的 Donaldson 多项式不变量, 还有三维 Calabi-Yau 空间上的 Donaldson-Thomas 不变量 (参见文献 [7]). 构造这些不变量相应的相对不变量一直是困扰数学家的难题. 最近, 本文作者在这方面做了一些工作, 构造了相对代数曲面的相对 Donaldson 多项式不变量, 并猜想这一相对 Donaldson 多项式不变量可构成代数的 Donaldson-Floer 理论 (参见文献 [8]).

2 相对稳定层的模空间

在本文中, 相对曲面是由一个光滑代数曲面 Y 和它的一个光滑除子 $D \subset Y$ 组成. 固定一个相对曲面 $D \subset Y$, 及 Y 上面的一个线丛 I , 满足 $\deg I|_D$ 是取奇数值的. 本节将解释怎样构造 (D, Y) 上秩二的、具有行列式线丛 I 的、相对稳定层的模空间.

2.1 相对曲面扩展所组成的栈 (stack)

本小节内容可参见文献 [9–11]. 自一个相对曲面 (D, Y) , 我们将归纳地构造一类在 $\mathbb{C}^n$ 上的相对代数簇 $D[n] \subset Y[n]$ 以及相应的投影映照

$$q : (D[n], Y[n]) \rightarrow (D, Y).$$

我们取 $(D[0], Y[0]) = (D, Y)$ 及 $q : Y[0] \rightarrow Y$ 为恒等映照开始. 假设已经构造了 $(D[n], Y[n], q)$, 我们用以下方法构造 $(D[n+1], Y[n+1], q)$: 令 $Y[n+1]$ 为 $Y[n] \times \mathbb{C}$ 沿着 $D[n] \times 0 \subset Y[n] \times \mathbb{C}$ 的爆破; 令 $D[n+1] \subset Y[n+1]$ 为这一爆破中 $D[n] \times \mathbb{C}$ 的本征变换 (proper transform); 令 $q : Y[n+1] \rightarrow Y$ 为 $Y[n+1] \rightarrow Y[n]$ 和 $q : Y[n] \rightarrow Y$ 的组合; 同时令 $Y[n+1] \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ 为下列映照:

$$Y[n+1] \rightarrow Y[n] \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^{n+1}$$

的组合.

这样构成的相对代数簇 $D[n] \subset Y[n]$ 上有一个自然的 $(\mathbb{C}^*)^n$ 作用. 因为 $Y[1]$ 是 $Y \times \mathbb{C}$ 沿 $D \times 0$ 的爆破, $\mathbb{C}^*$ 在 $\mathbb{C}$ 上的标准作用可以提升为在 $Y[1]$ 上的, 保持 $D[1] \subset Y[1]$ 不变的作用. 一般地, 当我们已有 $(\mathbb{C}^*)^n$ 在 $D[n] \subset Y[n]$ 上的作用以后, 我们有相应的 $(\mathbb{C}^*)^{n+1} = (\mathbb{C}^*)^n \times \mathbb{C}^*$ 在 $D[n] \times \mathbb{C} \subset Y[n] \times \mathbb{C}$

上的作用, 而这一作用可唯一提升为在 $D[n+1] \subset Y[n+1]$ 上的作用. 有一点值得提醒: 从这一构造可以看到, 所构造的在 $Y[n]$ 上的 $(\mathbb{C}^*)^n$ 作用是保持映照 $q: Y[n] \rightarrow \mathbb{C}^n$ 不变的作用.

这样构造出来的 $Y[n] \rightarrow \mathbb{C}^n$ 有如下的几何结构: 记 $\mathbb{C}^n$ 的原点为 $0 \in \mathbb{C}^n$, 这样,

$$Y[n]_0 =: Y[n] \times_{\mathbb{C}^n} 0 = Y \cup \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_n$$

是由 Y 和 n 个重复的 Δ 相并组成的. 这里所有的 Δ_i 都同构于 $\Delta = P(N_{D/Y} \oplus 1)$, 是 D 上的一个 P' -丛; Δ_i 和 Δ_{i+1} (设 $\Delta_0 = Y$) 横截相交, 而 $D[n]_0 \subset \Delta_n$.

现在构造相对曲面 $D \subset Y$ 的相对扩展的栈. 对任何一个概型 S , 令 $\mathcal{Y}(S)$ 为满足以下条件的所有 S -平坦的相对代数簇 $\mathcal{D} \subset \mathcal{Y}$ 及映照 $q: \mathcal{Y} \rightarrow Y$; 存在 S 的一个覆盖 $S = \bigcup_i S_i$ 及映照 $S_i \rightarrow \mathbb{C}^{n_i}$ 使得

$$(\mathcal{D} \subset \mathcal{Y}) \times_S S_i \cong (D[n_i] \subset Y[n_i]) \times_{\mathbb{C}^{n_i}} S_i, \quad (2.1)$$

并且使得在等式 (2.1) 下, $\mathcal{Y}$ 及 $Y[n_i]$ 到 Y 的投影映照是相容的.

给定两个概型 S 和 T 及它们之间的一个映照 $\rho: S \rightarrow T$, 从 $(\mathcal{D} \subset \mathcal{Y}, q) \in \mathcal{Y}(S)$ 到 $(\mathcal{D}' \subset \mathcal{Y}', q') \in \mathcal{Y}(T)$ 的一个箭头 $(\mathcal{D} \subset \mathcal{Y}, q) \rightarrow (\mathcal{D}' \subset \mathcal{Y}', q')$ 是由以下两个同构组成的:

$$(\mathcal{D} \subset \mathcal{Y}) \cong (\mathcal{D}' \subset \mathcal{Y}') \times_T S \quad \text{和} \quad q = q' \times_T S.$$

如在文献 [9] 所证明的, 这样组成的 $\mathcal{Y}(S)$ 及所定义的箭头组成了一个栈. 记这一个栈为 $\mathcal{Y}$, 并把它称作 $D \subset Y$ 的相对扩张的栈. 由之前所提到的在 $D[n] \subset Y[n]$ 上的 $(\mathbb{C}^*)^n$ 作用可知, 对

$$\xi = (D[n]_0 \subset Y[n]_0, q) \in \mathcal{Y}(\mathbb{C}),$$

我们有 $\text{Aut}_{\mathcal{Y}}(\xi) = (\mathbb{C}^*)^n$.

在构造相对凝聚层的模空间时, 我们需考虑在 $Y[n]_0$ 上的凝聚层. 因为对不同的 n 相关的 $Y[n]_0$ 也不同, 这样就产生了怎样将在不同的 $Y[n]_0$ 上的凝聚层放在同一个代数簇中的困扰. 本文作者的解决方法是把所有的 $D[n]_0 \subset Y[n]_0$ 放在一起构成一个 Artin 栈. 下一步, $D[n]_0 \subset Y[n]_0$ 配上稳定层组成相对稳定层的模空间. 虽然这一空间最初看似仍为一个 Artin 栈, 然而稳定性使得它一定是一个 Deligne-Mumford 栈. 这是下一小节所要叙述的.

2.2 相对稳定层的模空间

以下的内容取自文献 [8], 本小节中多数命题证明的基本思想都已包含在文献 [9, 12] 中. 在以下的讨论中, 固定一个 Y 上的丰沛线丛 H , 同时假定 H 满足如下定义的 FNA 条件:

条件 1 (FNA 条件) 在 Y 上不存在一个线丛 A 使得 $2(A \cdot H) = I \cdot H$.

注意到, 如果 H 满足 FNA 条件, 那么一个秩二的 Gieseker 稳定层一定同时是 μ -稳定层.

为了讨论在 $Y[n]_0$ 上的稳定层, 我们需要在 $Y[n]_0$ 上选取丰沛线丛. 当 $n = 0$ 时, 因 $Y[0] = Y$, 我们就取 H 为 $Y[0]$ 上的丰沛线丛. 对正的 n , 引进记号 $\Delta_{\geq i} = \Delta_i + \cdots + \Delta_n$. 对足够小的、正的、有理的 ϵ 和 $\delta_1, \dots, \delta_n, \delta_{n+1}$, 引进 $H_{\epsilon, \delta} := q^*H(\epsilon\delta_1\Delta_{\geq 1} + \epsilon\delta_2\Delta_{\geq 2} + \cdots + \epsilon\delta_n\Delta_n + \epsilon\delta_{n+1}D[n]_0)$. 这是一个在 $Y[n]_0$ 上的 $\mathbb{Q}$ -线丛. 当取 $\delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_{n+1}$ 具有一定的增长幅度, 同时 ϵ 和 δ_i 充分小时, $H_{\epsilon, \delta}$ 是 $\mathbb{Q}$ -丰沛的. 约定当我们看到 $H_{\epsilon, \delta}$ 时, $\epsilon, \delta_1, \dots, \delta_{n+1}$ 一定取得使它为丰沛的.

我们同时固定一个关于 m 的多项式

$$p_c(m) = \chi(I \otimes H^{\otimes m}) + \chi(\mathcal{O}_Y(H^{\otimes m})) - c. \quad (2.2)$$

在此, $\chi(H)$ 是线丛 H 的 Euler 示性数.

命题 1 假设 (Y, I, H) 满足 FNA 条件, 那么对一个 $Y[n]_0$ 上的具有纯秩二及 Poincaré 多项式 $p_c(m)$ 的凝聚层 $\mathcal{E}$, 如果 $\mathcal{E}$ 是 $H_{\epsilon, \delta}$ Gieseker- 平稳的 (Gieseker-stable), 那么对任意的足够小的 ϵ' 和 $\delta'_1, \dots, \delta'_{n+1}$, $\mathcal{E}$ 也是 $H_{\epsilon', \delta'}$ Gieseker- 平稳的.

这个命题告诉我们, 如果选取 ϵ 和 δ 的目的是用于在 $Y[n]_0$ 上研究 $H_{\epsilon, \delta}$ 稳定性, 那么只需选取 ϵ 和 δ 足够小, 任何具有固定 Poincaré 多项式的凝聚层的 $H_{\epsilon, \delta}$ - 稳定性与具体 ϵ 和 δ 的选取无关. 这样可以相对自由地讨论 $H_{\epsilon, \delta}$ - 稳定性.

对于 $Y[n]_0$ 上具有纯秩二及 Poincaré 多项式 $p_c(m)$ 的凝聚层 $\mathcal{E}$, 如果对足够小的 ϵ 和 δ_i , 它是 $H_{\epsilon, \delta}$ - 稳定的, 那么可以证明当 $\mathcal{E}$ 限制在 $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ 上后, $\mathcal{E}|_{\Delta_1}, \dots, \mathcal{E}|_{\Delta_n}$ 都是 O 型的. 在这里, 我们说 $\mathcal{E}|_{\Delta_i}$ 是 O 型的, 如果对一般的 $\xi \in D$ 及在 ξ 上的纤维 $\mathbf{P}_\xi^1 \subset \Delta_i$, $\mathcal{E}|_{\mathbf{P}_\xi^1} \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}_\xi^1}^{\oplus 2}$ (注意, 在此用到了投影映照 $\Delta_i \rightarrow D$).

我们引入 $D[n]_0 \subset Y[n]_0$ 上良好层的概念. $Y[n]_0$ 是由 $n+1$ 个分块 $Y, \Delta_1, \dots, \Delta_n$ 组成, 它的奇异部分为 $\Sigma_0 = Y \cap \Delta_1, \Sigma_1 = \Delta_1 \cap \Delta_2, \dots, \Sigma_{n-1} = \Delta_{n-1} \cap \Delta_n$. 我们同时把 $D[n]_0 \subset \Delta_n$ 记为 Σ_n .

定义 1 一个 $Y[n]_0$ 上的凝聚层 $\mathcal{E}$, 如果沿着 $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ 都是局部自由的, 那么就把 $\mathcal{E}$ 叫成良好的.

有了这些准备知识, 我们就可以构造相对曲面 $D \subset Y$ 上的、具有行列式线丛 I 的、有 Poincaré 多项式 $p_c(m)$ 的、纯秩二的 $H_{\epsilon, \delta}$ - 稳定凝聚丛的模空间. 固定 I, H 和 c , 假定 (Y, I, H) 满足 FNA 条件.

定义 2 我们如下构造一个群胚 $\widetilde{\mathcal{M}}_{Y,D}^{I,c,\text{pre}}$: 对任何一个概型 S , 取 $\widetilde{\mathcal{M}}_{Y,D}^{I,c,\text{pre}}(S)$ 为如下所有的 $(\mathcal{E}, \mathcal{D} \subset \mathcal{Y})$, 其中 $(\mathcal{D} \subset \mathcal{Y}) \in \mathcal{Y}(S)$, $\mathcal{E}$ 是一个 S - 平坦的 $\mathcal{Y}$ 上的凝聚层并使得对每一个闭点 $s \in S$, $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}|_{\mathcal{Y}_s}$ 是一个纯秩二的、有 Poincaré 多项式 $p_c(m)$ 的、行列式线丛 I 的、良好的层.

引用一般的方法, 可以证明群胚 $\widetilde{\mathcal{M}}_{Y,D}^{I,c,\text{pre}}$ 是一个 Artin 栈.

定义 3 现构造一个开子栈 $\widetilde{\mathcal{M}}_{Y,D}^{I,c} \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{Y,D}^{I,c,\text{pre}}$. 对任何一个概型 S , 令 $\widetilde{\mathcal{M}}_{Y,D}^{I,c}(S)$ 为 $\widetilde{\mathcal{M}}_{Y,D}^{I,c,\text{pre}}(S)$ 中所有满足如下条件的 S - 簇 $(\mathcal{E}, \mathcal{D} \subset \mathcal{Y})$: 对任意一个闭点 $s \in S$, $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}|_{\mathcal{Y}_s}$ 是 $H_{\epsilon, \delta}$ - 稳定的凝聚丛.

最后对 $\widetilde{\mathcal{M}}_{Y,D}^{I,c}$ 作如下的固定化 (rigidification), 因为任何一个在 $\widetilde{\mathcal{M}}_{Y,D}^{I,c}$ 中的 S - 簇都存在着自同构 $\mathbb{C}^*$, 把这些共有的 $\mathbb{C}^*$ 消除后, 我们得到了一个新的栈, 记为 $\mathcal{M}_{Y,D}^{I,c}$.

定理 1 [8] $\mathcal{M}_{Y,D}^{I,c}$ 是一个分离的、紧致的、有限型的 DM (Deligne-Mumford) 栈.

2.3 相对 Donaldson 多项式不变量

本小节将构造相对 Donaldson 不变量 $\mathcal{D}_{Y,D}^I : \text{Sym}^\bullet H^2(Y) \rightarrow H^2(M_D)$, 其中 M_D 是所有秩二的具有行列式线丛 $I|_D$ 的稳定向量丛的模空间. 因为已假设 $\deg I|_D$ 是奇的, 所以, M_D 是光滑的射影簇.

首先定义 Donaldson 的 μ - 映照 (参见文献 [13–15]). 固定一个 $c \in \mathbb{Z}$, 假定 $\mathcal{M}_{Y,D}^{I,c}$ 上有一个普遍簇 (universal family), 记为 $\mathcal{E}$, 是 $\mathcal{Y}$ 上的一个层, 在此 $\pi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{M}_{Y,D}^{I,c}$ 是相应的曲面簇, 则 μ - 映照是由 $\Delta(\mathcal{E}) = c_2(\mathcal{E}) - \frac{1}{4}c_1^2(\mathcal{E})$ 按以下的规则定义的:

$$\mu(\omega^{\otimes l}) = (\pi_*(\Delta(\mathcal{E}) \cup q^*\omega))^l \cap [\mathcal{M}_{Y,D}^{I,c}]^{\text{virt}} \in H_{2d(c)-2l}(\mathcal{M}_{Y,D}^{I,c}). \quad (2.3)$$

在此把以上记号作简短介绍. 因为 $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{M}_{Y,D}^{I,c}$ 是相应于 $\mathcal{E}$ 的相对曲面簇, 所以, 它有自带的投射映照 $q : \mathcal{Y} \rightarrow Y$, 而 $\pi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{M}_{Y,D}^{I,c}$ 是 $\mathcal{Y}$ 自带的另一个投影映照. 对任意 $\omega \in H^2(Y)$, $q^*\omega \in H^2(\mathcal{Y})$, 因为 $\Delta(\mathcal{E}) \in H^4(\mathcal{Y})$, 故有 $(\pi_*(\Delta(\mathcal{E}) \cup q^*\omega))^l \in H^{2l}(\mathcal{M}_{Y,D}^{I,c})$. 因为模空间 $\mathcal{M}_{Y,D}^{I,c}$ 有一个完美的阻碍理论, 它有一个相应的虚拟闭链 (virtual cycle) $[\mathcal{M}_{Y,D}^{I,c}]^{\text{virt}} \in H_{2d(c)}(\mathcal{M}_{Y,D}^{I,c})$. 这两个上下同调元素相配, 我们就得到了在 (2.3) 中的 $\mu(\omega^{\otimes l})$ (参见文献 [16, 17]).

下一个需要的映照是通过边界限制所定义的 $r_* : H_*(\mathcal{M}_{Y,D}^{I,c}) \rightarrow H_*(M_D)$. 一般来讲, 通过边界限制所得到的映照都是直接可以构造的. 我们用 $\mathcal{M}_{Y,D}^{I,c}$ 的在 $\mathcal{Y}$ 上的普遍簇 $\mathcal{E}$, 取 $\mathcal{D} \subset \mathcal{Y}$ 为 $\mathcal{Y}$ 自带的边界除子. 因为 $\mathcal{E}$ 是一个良好的簇, 所以, $\mathcal{E}|_{\mathcal{D}}$ 是一个秩二的向量丛. 用同构 $\mathcal{D} \cong D \times \mathcal{M}_{Y,D}^{I,c}$, 我们得到了一个由 $\mathcal{M}_{Y,D}^{I,c}$ 参数化的 D 上的秩二的具有行列式 $I|_D$ 的向量丛

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{D}} \cong \mathcal{E}|_{D \times \mathcal{M}_{Y,D}^{I,c}}. \quad (2.4)$$

这还不够构造映照 r , 原因在于这样得到的由 $\mathcal{M}_{Y,D}^{I,c}$ 参数化的 D 上的向量丛 (2.4) 不一定是稳定的.

我们用以下方法来解决这一困难. 如果记 $\mathcal{A}_D$ 为 D 上所有行列式线丛为 $I|_D$ 、秩二的向量丛的群胚, 那么, 向量丛簇 (2.4) 就诱导了一个映照

$$\mathcal{M}_{Y,D}^{I,c} \rightarrow \mathcal{A}_D. \quad (2.5)$$

文献 [8] 引进了 $\mathcal{A}_D$ 的一类同调群构造. 这一构造使得 (2.5) 直接诱导一个它们同调群之间的映照. 本文作者构造的 $\mathcal{A}_D$ 上的这一类同调群之后被 Kiem 和作者证明是自然同构于 M_D 的同调群. 把这两个结果相结合, 我们就得到了一个同胚 $r_* : H_*(\mathcal{M}_{Y,D}^{I,c}) \rightarrow H_*(M_D)$.

与 Donaldson μ -映照相结合, 我们得到了我们所期望的相对 Donaldson 多项式不变量:

$$\mathcal{D}_{Y,D}^{I,c} : \text{Sym}^\bullet H^2(Y) \rightarrow H_*(M_D).$$

如果把所有 $\mathcal{D}_{Y,D}^{I,c}$ 按 $c \in \mathbb{Z}$ 相加起来, 就得到我们想要构造的相对 Donaldson 多项式不变量

$$\mathcal{D}_{Y,D}^I = \sum_{c \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_{Y,D}^{I,c} : \text{Sym}^\bullet H^2(Y) \rightarrow H_*(M_D).$$

2.4 代数的 Donaldson-Floer 理论

我们研究简化的曲面退化. 在此, 称 $X \rightarrow C$ 为一个简化的曲面退化, 如果以下几个要素成立:

- (1) 映照 $X \rightarrow C$ 为一簇 C -平坦的射影曲面;
- (2) C 上有一点 $0 \in C$ 使得 X 在 $t \neq 0 \in C$ 上的纤维空间 $X_t = X \times_C t$ 是光滑曲面;
- (3) 中间的纤维空间 X_0 是由两片光滑的曲面 Y_+ 和 Y_- 沿着一个光滑的除子 $D \subset Y_+$ 及 $D \subset Y_-$ 横截相交粘接起来的.

这里作一个简短的注解. 作为可定向的四维流形, 一个简化的曲面退化 $X \rightarrow C$ 可以看成是把四维流形 X_t 沿一个三维子流形切割成两个带边的四维流型 $Y_+ \setminus D^\epsilon$ 和 $Y_- \setminus D^\epsilon$. 在此, D^ϵ 是 D 在 Y_- 和 Y_+ 内的 ϵ -管状邻域.

为简化讨论, 进一步假设 $0 \in C$ 是拓扑同胚于 $\mathbb{C}$ 中的一个圆. 这样, 就有

$$H^2(X_t) = H^2(X) = H^2(X_0). \quad (2.6)$$

记 $\iota_\pm : Y_\pm \rightarrow X_0$ 为自然的嵌入映照. 对 $\alpha \in H^2(X_0)$, 用 (2.6), α 也可看成是 $H^2(X_t)$ 的元素, 记 $\alpha_\pm = \iota_\pm^* \alpha$.

猜想 1 (代数 Donaldson-Floer 理论) 存在一串由非负整数 $k \geq 0$ 为下标的仅依赖于 k 、亏格 $g(D)$ 和 $\deg N_{D/Y_+}$ 的函子 $\mathcal{R}_k : H_*(M_D) \rightarrow H_*(M_D)$, $\mathcal{R}_0 = \text{id}$, 使得对任意的 $\alpha \in H^2(X_t)$, 有

$$\mathcal{D}_{X_t, H_t}^{I_t}(\alpha^{\otimes \ell}) = \sum_{0 \leq k \leq \ell} \binom{\ell}{k} \langle \mathcal{R}_a(\mathcal{D}_{Y_-, D}^{I_-}(\alpha_-^{\otimes k})), \mathcal{D}_{Y_+, D}^{I_+}(\alpha_+^{\otimes \ell-k}) \rangle, \quad a = \alpha \cdot D.$$

参考文献

- 1 Braam P, Donaldson S. Floer's work on instanton homology, knots and surgery. In: The Floer Memorial Volume. Basel: Birkhäuser, 1994, 195–256
- 2 Braam P, Donaldson S. Fukaya-Floer homology and gluing formulae for polynomial invariants. In: The Floer Memorial Volume. Basel: Birkhäuser, 1994, 257–281
- 3 Donaldson S. Floer homology and algebraic geometry. In: Vector Bundles in Algebraic Geometry (Durham, 1993). London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 208. Cambridge: Cambridge University Press, 1995, 119–138
- 4 Morgan J, Mrowka T, Ruberman D. The L^2 -Moduli Space and a Vanishing Theorem for Donaldson Polynomial Invariants. Monographs in Geometry and Topology, II. Cambridge: International Press, 1994
- 5 Taubes C. L^2 Moduli Spaces on 4-Manifolds with Cylindrical Ends. Monographs in Geometry and Topology, I. Cambridge: International Press, 1993
- 6 Donaldson S. Gluing techniques in the cohomology of moduli spaces. In: Topological Methods in Modern Mathematics (Stony Brook, NY, 1991). Houston: Publish or Perish, 1993, 137–170
- 7 Thomas R P. A holomorphic Casson invariant for Calabi-Yau 3-folds, and bundles on $K3$ fibrations. J Differential Geom, 2000, 54: 367–438
- 8 Li J. Toward an algebraic Donaldson-Floer theory. To appear in: Modern Geometry: A Celebration of the Work of Simon Donaldson. Providence: Amer Math Soc, 2018
- 9 Li J. Stable morphisms to singular schemes and relative stable morphisms. J Differential Geom, 2001, 57: 509–578
- 10 Li J. Good degenerations of moduli spaces. In: Handbook of Moduli Volume II. Advanced Lectures in Mathematics (ALM), vol. 25. Somerville: International Press, 2013, 299–351
- 11 Li J, Wu B. Good degeneration of Quot-schemes and coherent systems. Comm Anal Geom, 2015, 23: 841–921
- 12 Gieseker D, Li J. Irreducibility of moduli of rank-2 vector bundles on algebraic surfaces. J Differential Geom, 1994, 40: 23–104
- 13 Li J. Algebraic geometric interpretation of Donaldson's polynomial invariants. J Differential Geom, 1993, 37: 417–466
- 14 O'Grady K G. Algebro-geometric analogues of Donaldson's polynomials. Invent Math, 1992, 107: 351–395
- 15 Morgan J W. Comparison of the Donaldson polynomial invariants with their algebro-geometric analogues. Topology, 1993, 32: 449–488
- 16 Behrend K, Fantechi B. The intrinsic normal cone. Invent Math, 1997, 128: 45–88
- 17 Li J, Tian G. Virtual moduli cycles and Gromov-Witten invariants of algebraic varieties. J Amer Math Soc, 1998, 11: 119–174

Toward an algebraic Donaldson-Floer theory (survey)

Jun Li

Abstract We survey the author's recent construction of the relative Donaldson polynomial invariants of pairs of smooth divisors in smooth surfaces, taking values in an operational algebraic Floer homology group. We conjecture that this pair forms an algebraic Donaldson-Floer theory.

Keywords Donaldson invariants, algebraic surfaces, Floer theory

MSC(2010) 14N35, 57R57

doi: 10.1360/N012017-00267