Banach 空间的逼近紧性的特征

张子厚, 周宇*, 刘春燕

上海工程技术大学基础学院数学教学部, 上海 201620

E-mail: zhz@sues.edu.cn, roczhou-fly@126.com, cyl@sues.edu.cn

收稿日期: 2014-04-18; 接受日期: 2014-12-01; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11271248 和 11401370) 资助项目

摘要 本文首先证明 Banach 空间 X 是逼近紧的当且仅当 X 是近可凹的; 其次给出对偶空间中每个弱* 内点非空的弱* 闭凸子集 A 是逼近紧 (或逼近弱紧的) 的一系列特征刻画. 其证明利用到 Banach 空间几何理论中的一些巧妙的技巧.

关键词 近可凹性 逼近紧性 逼近弱紧性 度量投影 H 性质 很光滑空间 弱* 可凹点

MSC (2010) 主题分类 46B20, 41A65

1 引言

首先, 我们回顾逼近紧性和逼近弱紧性研究的历史沿革. 1961 年, Jefimov 和 Stechkin^[1] 引入集合的逼近紧性, 而逼近弱紧性由 Vlosor^[2] 引入. 这两种逼近紧性都能保证非空闭凸子集的最佳逼近元的存在性. 1984 年, Megginson^[3] 证明了 Banach 空间 X 是中点局部一致凸当且仅当 X 的每个闭球是逼近紧的 Chebyshev 集. 1987 年, Rolewicz^[4] 引入了 Banach 空间 X 的滴性, 其后, Montesinos^[5] 证明了 Banach 空间 X 具有滴性当且仅当 X 是自反的并且具有 H 性质 (H 性质: 对任意的 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset S(X)$, $x \in S(X)$, 如果 $x_n \xrightarrow{w} x$, 则 $x_n \rightarrow x$). 2006 年, Hudzik 等人^[6] 引入了 Banach 空间的逼近紧性, 并证明了 Banach 空间 X 是逼近紧的当且仅当 X 是自反且有 H 性质. 2009 年, Zhang 和 Shi^[7] 引入了 Banach 空间的逼近弱紧性, 并证明了 Banach 空间 X 是逼近弱紧的当且仅当 X 是自反. Panda 和 Kapoor^[8] 定义了 S 性质, 并且证得对偶空间 X^* 具有 S 性质当且仅当 X 是自反并具有 H 性质.

2011 年, Shang 等人^[9] 引入了近可凹空间, 他们证得如下两个主要结论:

定理 A Banach 空间 X 是逼近紧当且仅当 X 是近可凹且是近严格凸.

定理 B 如果 Banach 空间 X 是近可凹, 则对于任意的闭凸子集 $C \subset X$, 度量投影 P_C 是上半连续的.

设 X 为实的 Banach 空间, X^* 为 X 的对偶空间. $S(X)$ 和 $B(X)$ 分别表示 X 的单位球面和单位闭球. 对于任意的 $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in S(X)$, $K_{x,\alpha} = \{x^* \in X^* : x^*(x) \leq \alpha\}$ 表示由 x 和 α 决定的半空间; $B[x, \gamma] = \{y \in X : \|y - x\| \leq \gamma\}$ 表示以 x 为中心、 γ 为半径的闭球; $B(x, \gamma) = \{y \in X : \|y - x\| < \gamma\}$ 表示以 x 为中心、 γ 为半径的开球. 对于任意的 $f \in S(X^*)$, $A_f = \{x \in S(X) : f(x) = 1\}$. 对于任意的子集 $A \subset X^*$, $\bar{A}^{w^*}$ 和 $w^*\text{-int}A$ 分别表示 A 的弱* 闭包和 A 的所有弱* 内点.

对于任意子集 $C \subset X$, 称集值映射 $P_C : X \rightarrow 2^C$,

$$P_C(x) = \left\{ z \in C : \|x - z\| = d(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\| \right\}$$

为度量投影. 如果对于任意的 $x \in X$, $P_C(x) \neq \emptyset$, 则称子集 $C \subset X$ 为近迫的. 如果对于任意的 $x \in X$, $P_C(x)$ 至多含有一个元素, 则称 C 为半 Chebyshev 的; 如果 C 既是近迫的, 又是半 Chebyshev 的, 则称 C 为 Chebyshev 的.

定义 1 ^[1,2] 设 $C \subset X$. 如果对于任意的 $x \in X$ 和任意的序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset C$ 满足 $\|x - x_n\| \rightarrow d(x, C)$, 都存在 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的一个收敛的子列 (相应地, 弱收敛的子列), 则称 C 为逼近紧的 (相应地, 逼近弱紧的). 如果 X 的每个非空的闭凸子集都是逼近紧的 (相应地, 逼近弱紧的), 则称 X 为逼近紧的 (相应地, 逼近弱紧的).

定义 2 ^[9] 如果对于任意的 $f \in S(X^*)$, $A_f = \{x \in S(X), f(x) = 1\} \neq \emptyset$, 并且对于任意的包含 A_f 的开集 $U_{A_f} \supset A_f$, $A_f \cap \overline{\text{co}}(B(X) \setminus U_{A_f}) = \emptyset$, 则称 Banach 空间 X 是近可凹的.

显然, 由 James 定理, 近可凹空间是自反的.

定义 3 如果对于任意的 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty \subset S(X^*)$, 任意的 $x \in S(X)$ 且满足 $x_n^*(x) \rightarrow 1$, 都有 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 收敛 (相应地, 弱收敛、相对紧、相对弱紧), 则称 Banach 空间 X 为强光滑 (相应地, 很光滑、具有 S 性质、具有 WS 性质).

显然, X 是很光滑 (相应地, 强光滑) 当且仅当 X 为光滑的并且有 WS 性质 (相应地, 有 S 性质).

定义 4 ^[10] 如果对于任意的 $x^* \in S(X^*)$, 对于任意的网 $\{x_\alpha^*, \alpha \in D\} \subset B(X^*)$, $x_\alpha^* \xrightarrow{w^*} x^*$, 则 $x_\alpha^* \xrightarrow{w} x^*$ (相应地, $x_\alpha^* \rightarrow x^*$), 则称 x^* 为 $B(X^*)$ 的 (w^*-w) 连续点 (相应地, (w^*-n) 连续点), 其中 w^* , w 和 n 分别表示弱* 拓扑、弱拓扑和范数拓扑.

定义 5 ^[11] 设 $C^* \subset X^*$, $x^* \in C^*$, 如果对于任意的 $\epsilon > 0$, 有 $x^* \notin \overline{\text{co}}^{w^*}(C^* \setminus B(x^*, \epsilon))$, 则称 x^* 为 C^* 的弱* 可凹点.

本文首先证明 Banach 空间的逼近紧性与近可凹性是等价的, 因此, 我们去掉了定理 A 中的近严格凸的条件. 其次, 利用很光滑性和 (w^*-w) 连续点, 我们得到两个使得每个弱* 内点非空的弱* 闭凸子集为逼近弱紧的特征刻画. 最后, 借助强光滑性、 (w^*-n) 连续点和弱* 可凹性, 我们证明了三个使得每个弱* 内点非空的弱* 闭凸子集为逼近紧的 Chebyshev 集的充分必要条件.

2 逼近紧性与近可凹性

为了证明本节中的主要结论, 我们先给出下面引理, 它是由 Hudizk 等人^[6] 给出的.

引理 2.1 ^[6] Banach 空间 X 是逼近紧的当且仅当 X 是自反并且具有 H 性质.

定理 2.2 Banach 空间 X 是逼近紧的当且仅当 X 是近可凹的.

证明 充分性. 由于近可凹性蕴含着自反性, 根据引理 2.1, 我们只需证明近可凹性蕴含 H 性质. 设 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset S(X)$, $x \in S(X)$ 满足 $x_n \xrightarrow{w} x$, 我们的目标是去证明 $x_n \rightarrow x$. 选取 $f \in S(X^*)$ 使得 $f(x) = 1$. 不失一般性, 余下的证明分三种情形讨论.

情形 I $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset S(X) \setminus A_f$, 并且 $x_n \xrightarrow{w} x$. 假设 $x_n \not\rightarrow x$, 由 $x_n \xrightarrow{w} x$ 可知, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的每个收敛的子列都必将收敛到 x . 因此, A_f 不包含 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的任何聚点. 从而, 对于任意的 $y \in A_f$, 存在 $\varepsilon_y > 0$, 使得 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \cap \{z \in X, \|z - y\| < \varepsilon_y\} = \emptyset$. 我们定义开集 $U_{A_f} = \bigcup_{y \in A_f} \{z \in X : \|z - y\| < \varepsilon_y\}$.

显然, $A_f \subset U_{A_f}$ 并且 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \cap U_{A_f} = \emptyset$. 因为 X 是近可凹空间, 故 X 是自反的, 并且

$$A_f \cap \overline{\text{co}}(B(X) \setminus U_{A_f}) = \emptyset.$$

因此, 由 A_f 的弱紧性和局部凸空间的强分离定理, 存在 $x^* \in X^* = (X, w)^*$ 以及 $\gamma > 0$ 使得

$$\inf\{x^*(z) : z \in A_f\} - \gamma > \sup\{x^*(z) : z \in \overline{\text{co}}(B(X) \setminus U_{A_f})\}. \quad (2.1)$$

因为 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \cap U_{A_f} = \emptyset$, 所以, $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \overline{\text{co}}(B(X) \setminus U_{A_f})$. 注意到 $x \in A_f$, 由不等式 (2.1) 可得

$$x^*(x) - \gamma > \sup\{x^*(z) : z \in \{x_n\}_{n=1}^\infty\}.$$

这意味着 x_n 不是弱收敛于 x , 此与假设矛盾.

情形 II $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A_f$ 并且 $x_n \xrightarrow{w} x$. 令 $y_n = (1 - 1/n)x_n$. 由 $x_n \xrightarrow{w} x$ 可得 $y_n \xrightarrow{w} x$. 类似于情形 I 的证明, 我们可以得到 $y_n \rightarrow x$. 因此,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - 1/n} \left\| y_n - \left(1 - \frac{1}{n}\right)x \right\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|x_n\| = 0. \end{aligned}$$

这说明 $x_n \rightarrow x$.

情形 III 当 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 有无穷多项在 $S(X) \setminus A_f$ 中, 或 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 有无穷多项在 A_f 中时, 可按情形 I 和 II 的方法类似证明.

总之, X 具有 H 性质. 由引理 2.1, X 是逼近紧的.

必要性. 通过适当地修改文献 [9, 定理 2.1] 的证明, 我们可以在不需要 X 是近严格凸的条件下证明此必要性. 为了完整起见, 我们给出其证明.

我们首先断言, 存在 $\alpha > 0$ 使得对于任意的 $y \in B(X) \setminus U_{A_f}$, 有 $1 > f(y) + \alpha$. 若不然, 存在序列 $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset B(X) \setminus U_{A_f}$ 使得 $f(z_n) \rightarrow 1$. 由 X 的自反性, 超平面 $H = \{x \in X : f(x) = 1\}$ 为近迫的. 因此存在序列 $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset H$, 使得

$$\|z_n - y_n\| = d(z_n, H) = |f(z_n) - 1| \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

由 $\|y_n\| \leq \|z_n\| + \|z_n - y_n\| \rightarrow 1 = d(0, H)$ 和 $f(y_n) = 1$ 可知,

$$\|0 - y_n\| = \|y_n\| \rightarrow 1 = d(0, H).$$

根据 X 的逼近紧性, $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ 具有收敛的子列, 由 (2.2) 可知, $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ 也有收敛的子列. 不失一般性, 设 $z_n \rightarrow z_0$. 因为 $f(z_n) \rightarrow 1$, 所以, $f(z_0) = 1$. 因此, $z_0 \in A_f$, 从而, $d(z_n, A_f) \rightarrow 0$. 但是, 我们将证明如下结论: 存在 $\alpha > 0$, 使得对于任意的 $x \in B(X) \setminus U_{A_f}$, 都有 $d(x, A_f) > \alpha > 0$. 事实上, 如果上述结论不真, 则存在 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset B(X) \setminus U_{A_f}$ 使得 $d(x_n, A_f) \rightarrow 0$. 选取序列 $\{w_n\}_{n=1}^\infty \subset A_f$ 使得 $\|x_n - w_n\| = d(x_n, A_f) \rightarrow 0$, 因为 X 是自反, 且有 H 性质, 所以, A_f 为紧凸子集. 不失一般性, 设 $w_n \rightarrow w_0$, 显然, $w_0 \in A_f$. 因此存在 $c > 0$ 使得 $B(w_0, c) \subset U_{A_f}$. 由于 $\|x_n - w_0\| \leq \|x_n - w_n\| + \|w_n - w_0\| \rightarrow 0$, 对于充分大的 $n \in N$, $x_n \in B(w_0, c) \subset U_{A_f}$, 此与 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset B(X) \setminus U_{A_f}$ 矛盾.

下面证明 X 是近可凹的. 因为对于任意的 $y \in B(X) \setminus U_{A_f}$, $1 > f(y) + \alpha$, 我们导出对于任意的 $x \in A_f$,

$$\begin{aligned} f(x) - \alpha &\geq \sup\{f(y) : y \in B(X) \setminus U_{A_f}\} \\ &= \sup\{f(y) : y \in \text{co}(B(X) \setminus U_{A_f})\} \\ &= \sup\{f(y) : y \in \overline{\text{co}}(B(X) \setminus U_{A_f})\}. \end{aligned}$$

这说明 $x \notin \overline{\text{co}}(B(X) \setminus U_{A_f})$. 因此, $A_f \cap \overline{\text{co}}(B(X) \setminus U_{A_f}) = \emptyset$, 即 X 是近可凹的. $\square$

由文献 [1] 可知, 如果 Banach 空间 X 是逼近紧的, 则对于任意的闭凸子集 $C \subset X$, 度量投影 P_C 是上半连续的. 由定理 2.2, 我们马上可得到下面推论 2.3, 即本文中的定理 B.

推论 2.3 如果 Banach 空间 X 是近可凹的, 则对于任意的闭凸子集 $C \subset X$, 度量投影 P_C 是上半连续的.

另外, 由滴性和 S 性质与自反性和 H 性质的关系^[5,8], 我们还可以得到下面的推论 2.4.

推论 2.4 设 X 为 Banach 空间, 则下列论述等价:

- (1) X 是近可凹的;
- (2) X 具有滴性;
- (3) X^* 具有性质 S.

3 弱 * 闭凸集的逼近弱紧性

最近, Zhang 和 Liu^[12] 证明了如下的距离公式, 此距离公式对我们的证明非常有帮助.

引理 3.1 设 X 为 Banach 空间, $x_0 \in X \setminus \{0\}$ 并且 $\alpha \in \mathbb{R}$, 则对于任意的 $x^* \in X^* \setminus K_{x_0, \alpha}$,

$$d(x^*, K_{x_0, \alpha}) = \frac{|x^*(x_0) - \alpha|}{\|x_0\|}.$$

定理 3.2 设 X 为 Banach 空间, 则如下论述等价:

- (1) 对于任意的弱 * 内点非空的弱 * 闭凸子集 $A^* \subset X^*$, A^* 是逼近弱紧的 Chebyshev 集;
- (2) X 为很光滑的;
- (3) 对于任意的范数可达泛函 $x^* \in S(X^*)$, x^* 是 $B(X^*)$ 的端点和 (w^*-w) 连续点.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty \subset S(X^*)$, $x \in S(X)$ 且满足 $x_n^*(x) \rightarrow 1$. 令

$$K_{x, -1} = \{x^* \in X^*, x^*(x) \leq -1\},$$

则 $K_{x, -1}$ 为弱 * 内点非空的弱 * 闭凸子集. 由 (1) 可知, $K_{x, -1}$ 为逼近弱紧的, 从而是近迫的. 因此存在 $\{z_n^*\}_{n=1}^\infty \subset K_{x, -1}$ 使得 $\|x_n^* - z_n^*\| = d(x_n^*, K_{x, -1})$. 由引理 3.1,

$$\|x_n^* - z_n^*\| = d(x_n^*, K_{x, -1}) = |x_n^*(x) - 1| \rightarrow 0,$$

所以,

$$\|z_n^*\| \leq \|x_n^*\| + \|x_n^* - z_n^*\| \rightarrow 1 = d(0, K_{x, -1}).$$

因为 $\|z_n^*\| \geq 1$, 所以, $\|z_n^* - 0\| \rightarrow d(0, K_{x, -1})$. 又由 (1), $K_{x, -1}$ 是逼近弱紧的, 所以, $\{z_n^*\}_{n=1}^\infty$ 为相对弱紧的. 从而, $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 也是相对弱紧的. 这表明 X 具有 WS 性质. 假如 X 不是光滑的, 则存在

$x_0 \in S(X)$, $x_1^*, x_2^* \in S(X^*)$ 满足 $x_1^* \neq x_2^*$ 使得 $x_1^*(x_0) = x_2^*(x_0) = 1$. 由引理 3.1,

$$d(0, K_{x_0, -1}) = 1 = \|x_1^*\| = \|x_2^*\|.$$

注意到 $x_1^*, x_2^* \in K_{x_0, -1}$, 这与 $K_{x_0, -1}$ 为 Chebyshev 集矛盾, 因此, X 是光滑的.

(2) $\Rightarrow$ (1). 设 A^* 为弱*内点非空的弱*闭凸子集. 不失一般性, 设 $x = 0 \notin A^*$. 令 $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty \subset A^*$ 使得 $\|0 - y_n^*\| \rightarrow d(0, A^*) = \gamma$. 取 $y_0^* \in P_{A^*}(0)$, 则 $\|y_0^*\| = \gamma$. 因为 $B[0, \gamma] \cap w^*\text{-int} A^* = \emptyset$, 根据局部凸空间的分离定理以及 $(X^*, w^*)^* = X$, 存在 $x \in S(X)$ 使得

$$\sup\{x(y^*) : y^* \in A^*\} \leq \inf\{x(y^*) : y^* \in B[0, \gamma]\} = -\|x\|\gamma = -\|x\|\|y_0^*\|.$$

由于 $y_0^* \in P_{A^*}(0)$,

$$-\|x\|\|y_0^*\| \leq x(y_0^*) \leq \sup\{x(y^*) : y^* \in A^*\} \leq \inf\{x(y^*) : y^* \in B[0, \gamma]\} = -\|x\|\|y_0^*\|.$$

因此, $x(y_0^*) \geq x(y_n^*)$. 从而,

$$\|0 - y_0^*\| = x(0 - y_0^*) \leq x(0 - y_n^*) \leq \|0 - y_n^*\| \rightarrow d(0, A^*) = \|y_0^*\|.$$

我们得到 $x(\frac{y_n^*}{\|y_n^*\|}) \rightarrow 1$. 因为 $\|y_n^*\| \rightarrow \|y_0^*\| = d(0, A^*)$, 所以, $x(\frac{y_n^*}{\|y_n^*\|}) \rightarrow 1$. 由 X 是很光滑的, $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ 是弱收敛的. 这意味着 A^* 是逼近弱紧的.

假如 A^* 不是 Chebyshev 集, 则存在 $x^* \in X^*$, $y_1^*, y_2^* \in A^*$ 使得 $\|x^* - y_1^*\| = \|x^* - y_2^*\| = d(x^*, A^*)$. 不失一般性, 设 $x^* = 0$, $d(0, A^*) = 1$. 显然, $B(X^*) \cap w^*\text{-int} A^* = \emptyset$. 则根据局部凸空间的分离定理以及 $(X^*, w^*)^* = X$, 存在 $x \in S(X)$ 使得

$$\sup\{x(x^*) : x^* \in B(X^*)\} \leq \inf\{x(x^*) : x^* \in A^*\},$$

所以, 对于任意的 $i = 1, 2$,

$$x(y_i^*) \leq \sup\{x(x^*) : x^* \in B(X^*)\} = 1 \leq \inf\{x(x^*) : x^* \in A^*\} \leq x(y_i^*).$$

因此, $x(y_i^*) = 1$, $i = 1, 2$, 这与 X 的光滑性矛盾.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 $x^* \in S(X^*)$, 且在 $x \in S(X)$ 处达到范数, $\{x_\alpha^* : \alpha \in D\} \subset B(X^*)$ 为一网使得 $x_\alpha^* \xrightarrow{w^*} x^*$. 显然, $x_\alpha^*(x) \rightarrow 1$. 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 选取 α_n 使得 $x_{\alpha_n}^*(x) > 1 - 1/n$. 不失一般性, 我们假设 $\alpha_1 \preceq \alpha_2 \preceq \alpha_3 \preceq \dots$. 选取子网 $\{x_\alpha^*, \alpha \in D'\} \subset \{x_\alpha^*, \alpha \in D\}$, 其中 D 和 D' 是共尾的, 则 $x_\alpha^* \xrightarrow{w^*} x^*$, $\alpha \in D'$. 下面分两种情形进行讨论.

情形 I 如果存在 α_0 使得 $\alpha_0 \succeq \alpha_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立, 则对于任意的 $\alpha \succeq \alpha_0$, $\alpha \in D'$, $x_\alpha^*(x) = 1$. 因为 X 为很光滑的, 对于任意的 $\alpha \succeq \alpha_0$, $\alpha \in D'$, 我们有 $x_\alpha^* = x^*$. 这表明 $\{x_\alpha^*, \alpha \succeq \alpha_0, \alpha \in D'\}$ 为相对弱紧的.

情形 II 如果对于任意的 $\alpha \in D'$, 总存在 $\alpha_n \in D$ 使得 $\alpha_n \succeq \alpha$, 则 $\{x_{\alpha_n}^*, n \in \mathbb{N}\}$ 为 $\{x_\alpha^*, \alpha \in D'\}$ 的一个子网. 由 α_n 的选取方法, 我们有 $x_{\alpha_n}^*(x) \rightarrow 1$. 因为 X 是很光滑的, 且 $x_\alpha^* \xrightarrow{w^*} x^*$, 我们有 $x_{\alpha_n}^* \xrightarrow{w} x^*$. 因此, $\{x_\alpha^* : \alpha \in D\}$ 是相对弱紧集.

综上所述, x^* 是 $\{x_\alpha^*, \alpha \in D\}$ 的唯一的弱聚点. 这说明 $x_\alpha^* \xrightarrow{w} x^*$. 因此, x^* 是 $B(X^*)$ 的 (w^*-w) 连续点.

假如 x^* 不是 $B(X^*)$ 的端点, 则存在 $x_1^*, x_2^* \in B(X^*)$ 使得 $x^* = \frac{x_1^* + x_2^*}{2}$, 其中 $x_1^* \neq x_2^*$. 显然, $x_1^*(x) = x_2^*(x) = 1$, 而这与 X 是光滑空间矛盾.

(3) $\Rightarrow$ (2). 设 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty \subset S(X^*)$, $x \in S(X)$ 使得 $x_n^*(x) \rightarrow 1$. 因为 $B(X^*)$ 为弱 * 紧的, 存在 x^* 以及 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 的子网 $\{x_\alpha^*, \alpha \in D\}$ 使得 $x_\alpha^* \xrightarrow{w^*} x^*$. 因为 $x_\alpha^*(x) \rightarrow 1$, 所以, $x^*(x) = 1$. 由 (3) 可得 $x_\alpha^* \xrightarrow{w} x^*$. 这说明 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 为相对弱紧的, 即 X 具有 WS 性质. 对于任意的 $x \in S(X)$, $x_1^*, x_2^* \in S(X^*)$ 使得 $x_1^*(x) = x_2^*(x) = 1$. 记 $x^* = \frac{x_1^* + x_2^*}{2}$, 则 $x^*(x) = 1$. 由 (3), x^* 是 $B(X^*)$ 的一个端点, 因此, $x_1^* = x_2^*$. 这表明 X 是光滑的. $\square$

类似地, 我们可以证明如下定理.

定理 3.3 设 X 为 Banach 空间, 则下列论述等价:

- (1) 对于任意的弱 * 内点非空的弱 * 闭凸子集 $A^* \subset X^*$, A^* 是逼近弱紧的;
- (2) X 具有 WS 性质;
- (3) 对于任意的可达泛函 $x^* \in S(X^*)$, x^* 是 $B(X^*)$ 的 (w^*-w) 连续点.

4 弱 * 闭凸子集的逼近紧性

类似于定理 3.2 的证明, 我们可以得到下面结论.

定理 4.1 设 X 为 Banach 空间, 则下列论述等价:

- (1) 对于任意的弱 * 内点非空的弱 * 闭凸子集 $A^* \subset X^*$, A^* 为逼近紧的;
- (2) X 具有 S 性质;
- (3) 对于任意的范数可达泛函 $x^* \in S(X^*)$, x^* 为 $B(X^*)$ 的 (w^*-n) 连续点.

定理 4.2 设 X 为 Banach 空间, 则下列论述等价:

- (1) 对于任意的弱 * 内点非空的弱 * 闭凸子集 $A^* \subset X^*$, A^* 为逼近紧的 Chebyshev 集;
- (2) X 是强光滑的;
- (3) 对于任意的范数可达泛函 $x^* \in S(X^*)$, x^* 为 $B(X^*)$ 的端点和 (w^*-n) 连续点;
- (4) 对于任意的范数可达泛函 $x^* \in S(X^*)$, x^* 为 $B(X^*)$ 的弱 * 可凹点.

证明 (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) 的证明类似于定理 3.2 的证明, 我们只需证明 (1) $\Rightarrow$ (4) 和 (4) $\Rightarrow$ (3).

(1) $\Rightarrow$ (4). 设 $x_0^* \in S(X^*)$, $x_0 \in S(X)$ 满足 $x_0^*(x_0) = 1$. 我们将证明对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\alpha > 0$ 使得

$$x_0^*(x_0) - \alpha > \sup\{x_0^*(y^*) : y^* \in B(X^*) \setminus B(x_0^*, \epsilon)\}.$$

若不然, 则存在 $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty \subset B(X^*) \setminus B(x_0^*, \epsilon)$, 使得 $y_n^*(x_0) \rightarrow x_0^*(x_0) = 1$. 类似于定理 3.2 的 (1) $\Rightarrow$ (2) 的证明, 我们得到 $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ 是相对紧的. 不失一般性, 我们假设 $y_n^* \rightarrow y_0^*$. 显然, $y_0^*(x_0) = 1$. 我们断言 $y_0^* = x_0^*$. 事实上, $y_0^* \in K_{x_0,1}$ 并且 $\|y_0^*\| = \|x_0^*\| = 1 = d(0, K_{x_0,1})$, 因此, $y_0^*, x_0^* \in P_{K_{x_0,1}}(0)$. 因为 $K_{x_0,1}$ 是 Chebyshev 集, 所以, $y_0^* = x_0^*$. 这表明 $y_n^* \rightarrow x_0^*$, 此与 $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty \subset B(X^*) \setminus B(x_0^*, \epsilon)$ 矛盾.

因为

$$\begin{aligned} x_0^*(x_0) - \alpha &> \sup\{y^*(x_0) : y^* \in B(X^*) \setminus B(x_0^*, \epsilon)\} \\ &= \sup\{y^*(x_0) : y^* \in \text{co}(B(X^*) \setminus B(x_0^*, \epsilon))\} \\ &= \sup\{y^*(x_0) : y^* \in \overline{\text{co}}^{w^*}(B(X^*) \setminus B(x_0^*, \epsilon))\}, \end{aligned}$$

所以, $x_0^* \notin \overline{\text{co}}^{w^*}(B(X^*) \setminus B(x_0^*, \epsilon))$. 因此, x_0^* 为 $B(X^*)$ 的弱 * 可凹点.

(4) $\Rightarrow$ (3). 令 $\{x_\alpha^*, \alpha \in D\} \subset S(X^*)$, $x_0^* \in S(X^*)$, $x_0^*(x_0) = 1$, 并且 $x_\alpha^* \xrightarrow{w^*} x_0^*$. 若 $x_\alpha^* \not\rightarrow x_0^*$, 则存在 $\epsilon_0 > 0$, 存在 $\{x_\beta^*, \beta \in D'\}$ 的一个子网 $\{x_\beta^* : \beta \in D'\}$ 使得

$$\|x_\beta^* - x_0^*\| \geq \epsilon_0.$$

显然, $\{x_\beta^* : \beta \in D'\} \cap B(x_0^*, \epsilon_0) = \emptyset$, 因此, $\{x_\beta^* : \beta \in D'\} \subset B(X^*) \setminus B(x_0^*, \epsilon_0)$. 因为 x_0^* 为 $B(X^*)$ 的弱*可凹点, 所以,

$$x_0^* \notin \overline{\text{co}}^{w^*}(B(X^*) \setminus B(x_0^*, \epsilon_0)).$$

由局部凸空间的分离定理, 存在 $y \in X$ 使得

$$y(x_0^*) > \sup\{y(x^*) : x^* \in \overline{\text{co}}^{w^*}(B(X^*) \setminus B(x_0^*, \epsilon_0))\}.$$

因此存在 $\gamma > 0$ 使得

$$y(x_0^*) - \sup\{y(x^*) : x^* \in \overline{\text{co}}^{w^*}(B(X^*) \setminus B(x_0^*, \epsilon_0))\} > \gamma.$$

从而, 对于任意的 β , $y(x_0^*) - y(x_\beta^*) > \gamma$. 这表明在弱*拓扑意义下, $x_\beta^* \not\rightarrow x_0^*$. 此与 $x_\alpha^* \xrightarrow{w^*} x_0^*$ 矛盾. 因此, $x_\alpha^* \rightarrow x_0^*$, 即 x_0^* 为 $B(X^*)$ 的 (w^*-n) 连续点.

若 x_0^* 不是 $B(X^*)$ 的端点, 则存在 $x_1^*, x_2^* \in B(X^*)$, $x_1^* \neq x_2^*$ 使得 $x_0^* = \frac{x_1^* + x_2^*}{2}$. 因为 $(\frac{x_1^* + x_2^*}{2})(x_0) = 1$, $\frac{x_1^* + x_2^*}{2} \in S(X^*)$, 由于 (4), $\frac{x_1^* + x_2^*}{2}$ 为 $B(X^*)$ 的弱*可凹点. 另一方面, 令

$$\epsilon_1 = \left\| x_1^* - \frac{x_1^* + x_2^*}{2} \right\| = \frac{\|x_1^* - x_2^*\|}{2} = \left\| x_2^* - \frac{x_1^* + x_2^*}{2} \right\|,$$

则 $x_1^*, x_2^* \in B(X^*) \setminus B(\frac{x_1^* + x_2^*}{2}, \epsilon_1)$, 则 $\frac{x_1^* + x_2^*}{2} \in \text{co}(B(X^*) \setminus B(\frac{x_1^* + x_2^*}{2}, \epsilon_1)) \subset \overline{\text{co}}^{w^*}(B(X^*) \setminus B(\frac{x_1^* + x_2^*}{2}, \epsilon_1))$. 这意味着 $\frac{x_1^* + x_2^*}{2}$ 不是 $B(X^*)$ 的弱*可凹点, 矛盾. $\square$

文献 [13] 给出了下面结果.

定理 C 设 X 为 Banach 空间, 则 X 是强光滑的当且仅当对于任意的弱*闭凸子集 $A^* \subset X^*$, A^* 为逼近紧的 Chebyshev 集.

在文献 [13, 第 1222 页] 中, 必要性的证明如下所示: 因为 $B(0, r) \cap A^* = \emptyset$, $B[0, r] \cap A^* = P_{A^*}(0) \neq \emptyset$, 并且 $(X^*, w^*)^* = X$, 由局部凸空间的分离定理, 存在 $x \in S(X)$ 使得

$$\sup\{x(y^*) : y^* \in A^*\} \leq \inf\{x(y^*) : y^* \in B(0, r)\}.$$

我们认为, 上述证明是欠严谨的. 这是因为局部凸空间的分离定理的两个条件都不满足, 即一方面, $B[0, r]$ 不包含任何弱*内点; 另一方面, $B[0, r] \cap A^* \neq \emptyset$. 这就是为什么在本文的定理 3.2、3.3、4.1 和 4.2 中要求 A^* 的弱*内点非空的原因.

参考文献

- 1 Jefimow N W, Stechkin S B. Approximate compactness and Chebyshev sets. *Soviet Math*, 1961, 2: 1226–1228
- 2 Vlosov L R. Approximate property of sets in normed linear spaces. *Russian Math Surveys*, 1973, 28: 1–66
- 3 Megginson R E. *An Introduction to Banach Space Theory*. New York: Springer, 1998
- 4 Rolewicz S. On drop property. *Studia Math*, 1987, 85: 27–35
- 5 Montesinos V. Drop property equals reflexivity. *Studia Math*, 1987, 87: 93–100

- 6 Hudzik H, Kowalewski W, Lewicki G. Approximate compactness and full rotundity in Musielak-Orlicz space and Lorentz-Orlicz space. *Z Anal Anwend*, 2006, 25: 163–192
- 7 Zhang Z H, Shi Z R. Convexities and approximate compactness and continuity of metric projection in Banach spaces. *J Approx Theory*, 2009, 161: 802–812
- 8 Panda B B, Kapoor O P. A generalization of local uniform convexity of the norm. *J Math Anal Appl*, 1995, 52: 300–308
- 9 Shang S Q, Cui Y A, Fu Y Q. Nearly dentability and approximate compactness and continuity of metric projection in Banach spaces (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2011, 41: 815–825
- 10 Bandyopadhyay P, Huang D, Lin B L. Rotund points, nested sequence of ball and smoothness in Banach space. *Comment Math Prace Mat*, 2004, 44: 163–186
- 11 Liu P D. *Martingale and Geometry Theory of Banach Space*. Beijing: Science Press, 2007
- 12 Zhang Z H, Liu C Y. The representations and continuity of the metric projections on two class of half-spaces in Banach spaces. *Abstr Appl Anal*, 2014, 2014: 908676
- 13 Shang S Q, Cui Y A, Fu Y Q. Dentable point and strongly smoothness and approximative compactness in Banach space (in Chinese). *Acta Math Sinica Chin Ser*, 2010, 53: 1217–1224

Characterization of approximative compactness in Banach spaces

ZHANG ZiHou, ZHOU Yu & LIU ChunYan

Abstract In this paper, we first prove that approximative compactness and near dentability are equivalent for a Banach space. Then, we present several characterizations that every weak * closed convex subset with non-empty weak * interior in a dual space is either approximatively compact or weakly approximatively compact. Our proofs are based on some subtle techniques in geometry of Banach spaces.

Keywords near dentability, approximative compactness, approximative weak compactness, metric projection, property H, very smooth space, weak * denting point

MSC(2010) 46B20, 41A65

doi: 10.1360/012015-34