随机凸分析 (II): L^0 - 准桶的随机局部凸模中的连续性和次可微性定理

郭铁信^{①*}, 赵世恩^②, 曾小林^③

① 中南大学数学与统计学院, 长沙 410083;

② 首都师范大学初等教育学院, 北京 100048;

③ 重庆工商大学数学与统计学院, 重庆 400067

E-mail: tiexinguo@csu.edu.cn, zsefh@cnu.edu.cn, xlinzeng@163.com

收稿日期: 2015-01-25; 接受日期: 2015-02-17; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11171015, 11401399 和 11301568) 资助项目

摘要 本文继续研究随机凸分析. 首先, 引入 L^0 - 准桶模的概念; 接着, 在赋予局部 L^0 - 凸拓扑的随机局部凸模的框架下, 为了建立随机局部凸模为 L^0 - 准桶模的特征, 本文发展了随机对偶理论, 尤其是证明用于条件风险度量的模途径中的模型空间 $L^p_{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$ 是 L^0 - 准桶的, 这形成本文最困难的部分. 最后, 本文证明 L^0 - 准桶的随机局部凸模上的真下半连续 L^0 - 凸函数的连续性和次可微性定理. 因此, 本文的主要结果可以很好地适用于 L^0 - 凸条件风险度量的连续性和次可微性的研究.

关键词 随机局部凸模 局部 L^0 - 凸拓扑 随机共轭空间 真 L^0 - 凸下半连续函数 连续性 次可微性

MSC (2010) 主题分类 46A08, 46A20, 46H25, 46T20

1 引言

为了给条件风险度量的模途径提供牢固的分析基础, 在文献 [1] 中, 我们开始建立完整的随机凸分析, 文献 [1] 的主要结果涉及随机局部凸模中分离性和 Fenchel-Moreau 对偶的研究. 基于文献 [1], 本文继续研究随机凸分析. 本文主要目的是证明 L^0 - 准桶的随机局部凸模中的连续性和次可微性定理.

经典凸分析中的连续性和次可微性定理如下: 定义在一个桶空间上的真下半连续广义实值凸函数在其有效域的内部是连续和次可微的. 文献 [2] 提出了 L^0 - 桶模的概念, 并为定义在 L^0 - 桶模上的真下半连续 L^0 - 凸函数建立了连续性和次可微性定理, 即文献 [2, 命题 3.5 和定理 3.7]. 那么一个自然而关键的问题是, 怎样刻画 L^0 - 桶模的特征? 尤其是条件风险度量的模途径中所使用的模型空间 $L^p_{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$ 是不是一个 L^0 - 桶模? 这些问题仍未解决. 甚至, 直到现在连一个刻画 L^0 - 桶模的结果也没有得到. 这主要是因为 L^0 - 桶模的概念与经典桶空间的概念太过相似, 因此也太强了. 基于文献 [1] 中分离性的工作, 本文可以通过提出 L^0 - 准桶模的概念克服上述困难. L^0 - 准桶模比 L^0 - 桶模的概念弱, 并且满足金融应用的需求. 为了证明这一点, 我们在赋予局部 L^0 - 凸拓扑的随机局部凸模下建立了随机对偶的随机对偶理论, 从而, 我们可以给出随机局部凸模为 L^0 - 准桶模的一个特征, 尤其是, 当 $L^p_{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$ 赋予局部 L^0 - 凸拓扑时, 它是一个 L^0 - 准桶模, 这也形成了本文最困难的部分. 进一步, 我们基于 L^0 - 准桶模的概念也证明了新的连续性和次可微性定理. 本文的结果在文献 [3] 中已被用到.

英文引用格式: Guo T X, Zhao S E, Ceng X L. Random convex analysis (II): Continuity and subdifferentiability theorems in L^0 -pre-barreled random locally convex modules (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 647–662, doi: 10.1360/N012015-00042

事实上, 本文是文献 [4] 的第二部分. 对一个随机局部凸模 $(E, \mathcal{P})$, $\mathcal{P}$ 可以诱导两种拓扑, 即 (ε, λ) -拓扑和局部 L^0 -凸拓扑. (ε, λ) -拓扑在某些问题的研究中非常自然, 例如, 在文献 [1] 中, 我们总是首先在 (ε, λ) -拓扑下考虑有关问题, 然后再过渡到局部 L^0 -凸拓扑. 另一方面, 局部 L^0 -凸拓扑比 (ε, λ) -拓扑更强, 常使得某些重要的 L^0 -凸集拥有非空内部, 因此, 本文使用随机局部凸模上的局部 L^0 -凸拓扑, 以满足连续性和次可微性定理的需求.

本文剩余部分按如下方式组织: 第 2 节致力于局部 L^0 -凸拓扑下随机局部凸模中集合有界性的研究; 第 3 节在赋予局部 L^0 -凸拓扑的随机局部凸模的框架下建立随机对偶理论, 进一步刻画 L^0 -准桶的随机局部凸模的特征; 第 4 节基于 L^0 -准桶模的概念证明新的连续性和次可微性定理.

贯穿本文, 我们总是采用下述记号与术语.

K : 实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 一个给定的概率空间.

$L^0(\mathcal{F}, K) = (\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的 K -值 $\mathcal{F}$ -可测随机变量的等价类全体构成的代数.

$L^0(\mathcal{F}) = L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$.

$\bar{L}^0(\mathcal{F}) = (\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的广义实值 $\mathcal{F}$ -可测随机变量等价类的集合.

通常, $\bar{L}^0(\mathcal{F})$ 按如下序 $\leq$ 被偏序化: $\xi \leq \eta$ 当且仅当 $\xi^0(\omega) \leq \eta^0(\omega)$ 对 P -几乎所有的 $\omega \in \Omega$ 成立 (简记为 a.s.), 其中 ξ^0 和 η^0 分别是 ξ 和 η 的任意选定的代表元. 那么 $(\bar{L}^0(\mathcal{F}), \leq)$ 是一个完备格, $\vee H$ 和 $\wedge H$ 分别表示子集 H 的上确界和下确界. $(L^0(\mathcal{F}), \leq)$ 是一个条件完备格. 关于 $\bar{L}^0(\mathcal{F})$ 中一个集合的上确界和下确界的丰富性质请参见文献 [5] 或 [6, 第 3026 页].

设 $\xi, \eta \in \bar{L}^0(\mathcal{F})$. $\xi < \eta$ 按通常方式理解, 即 $\xi \leq \eta$ 且 $\xi \neq \eta$. 本文用 “在 A 上 $\xi < \eta$ (或 $\xi \leq \eta$)” 表示 “ $\xi^0(\omega) < \eta^0(\omega)$ (相应地, $\xi^0(\omega) \leq \eta^0(\omega)$), 对 P -几乎所有 $\omega \in A$ 成立”, 其中 $A \in \mathcal{F}$, ξ^0 和 η^0 分别是 ξ 和 η 的任意选定的代表元,

$$\begin{aligned}\bar{L}_+^0(\mathcal{F}) &= \{\xi \in \bar{L}^0(\mathcal{F}) \mid \xi \geq 0\}, \\ L_+^0(\mathcal{F}) &= \{\xi \in L^0(\mathcal{F}) \mid \xi \geq 0\}, \\ \bar{L}_{++}^0(\mathcal{F}) &= \{\xi \in \bar{L}^0(\mathcal{F}) \mid \text{在 } \Omega \text{ 上 } \xi > 0\}, \\ L_{++}^0(\mathcal{F}) &= \{\xi \in L^0(\mathcal{F}) \mid \text{在 } \Omega \text{ 上 } \xi > 0\}.\end{aligned}$$

此外, $\tilde{I}_A$ 总表示 I_A 的等价类, 其中 $A \in \mathcal{F}$, I_A 是 A 的特征函数. 当 $\tilde{A}$ 表示 $A (\in \mathcal{F})$ 的等价类时, 即 $\tilde{A} = \{B \in \mathcal{F} \mid P(A \Delta B) = 0\}$ (这里, $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$), 我们也用 $I_{\tilde{A}}$ 表示 $\tilde{I}_A$. 特别地, 对 $\bar{L}^0(\mathcal{F})$ 中的元 ξ 和 η , $[\xi < \eta]$ 表示 $\{\omega \in \Omega \mid \xi^0(\omega) < \eta^0(\omega)\}$ 的等价类, 其中 ξ^0 和 η^0 分别是 ξ 和 η 的任意选定的代表元. 更多诸如 $[\xi = \eta]$ 和 $[\xi \neq \eta]$ 之类的记号可以类似理解.

2 局部 L^0 -凸拓扑下随机局部凸模中集合的有界性

本节主要结果是下述定理 2.13 和 2.14. 让我们首先回忆一些基本概念和术语.

定义 2.1 ^[7-9] 有序对 $(E, \|\cdot\|)$ 称为数域 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机赋范空间 (简记为 RN 空间), 如果 E 是 K 上的线性空间, $\|\cdot\|$ 是从 E 到 $L_+^0(\mathcal{F})$ 的一个映射, 使得满足下面的条件:

- (RN-1) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\forall \alpha \in K, x \in E$;
- (RN-2) $\|x\| = 0$ 蕴含 $x = \theta$ (E 中的零元);
- (RN-3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$.

这里, $\|\cdot\|$ 称作 E 上的随机范数, $\|x\|$ 称作 $x \in E$ 的随机范数, (如果 $\|\cdot\|$ 只满足 (RN-1) 和 (RN-3), 就称为 E 上的随机半范数).

进一步, 如果 E 还是代数 $L^0(\mathcal{F}, K)$ 上的左模 (简记为 $L^0(\mathcal{F}, K)$ -模) 使得

$$(RNM-1) \|\xi x\| = |\xi| \|x\|, \forall \xi \in L^0(\mathcal{F}, K), x \in E,$$

那么, $(E, \|\cdot\|)$ 称为 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机赋范模. 具有性质 (RNM-1) 的随机范数 $\|\cdot\|$ 也称为 E 上的 L^0 -范数 (如果映射只满足 (RN-3) 和 (RNM-1), 则它称为 E 上的 L^0 -半范数).

定义 2.2 ^[7-10] 设 $(E_1, \|\cdot\|)$ 和 $(E_2, \|\cdot\|)$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RN 空间. 从 E_1 到 E_2 的线性算子 T 称为几乎处处有界 (简记为 a.s. 有界), 如果存在 $\xi \in L^0_+(\mathcal{F})$ 使得 $\|Tx\|_2 \leq \xi \|x\|_1, \forall x \in E_1$. 记所有从 E_1 到 E_2 的 a.s. 有界线性算子所成线性空间为 $B(E_1, E_2)$, 定义映射 $\|\cdot\| : B(E_1, E_2) \rightarrow L^0_+(\mathcal{F})$ 为

$$\|T\| = \wedge \{\xi \in L^0_+(\mathcal{F}) \mid \|Tx\|_2 \leq \xi \|x\|_1 \text{ 对所有 } x \in E_1 \text{ 成立}\}, \quad \forall T \in B(E_1, E_2),$$

易验证 $(B(E_1, E_2), \|\cdot\|)$ 也是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RN 空间, 尤其是, 若 E_2 是 RN 模, 则 $(B(E_1, E_2), \|\cdot\|)$ 也是 RN 模. 特别地, 对 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的一个固定的 RN 空间, RN 模 $(E^*, \|\cdot\|)$ 称为 E 的随机共轭空间, 其中 $E^* = B(E, L^0(\mathcal{F}, K))$, $L^0(\mathcal{F}, K)$ 总是被视为赋予 L^0 -范数 $|\cdot|$ 的 RN 模.

定义 2.3 ^[8,10,11] 有序对 $(E, \mathcal{P})$ 称为 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机局部凸空间 (简称 RLC 空间), 如果 E 是 K 上的线性空间, $\mathcal{P}$ 是从 E 到 $L^0_+(\mathcal{F})$ 的一族映射, 满足下列条件:

(RLC-1) 每个 $\|\cdot\| \in \mathcal{P}$ 是 E 上的一个随机半范数;

(RLC-2) $\vee \{\|x\| : \|\cdot\| \in \mathcal{P}\} = 0$ 当且仅当 $x = \theta$.

进一步, 如果 E 还是 $L^0(\mathcal{F}, K)$ -模, 每个 $\|\cdot\| \in \mathcal{P}$ 是 E 上的 L^0 -半范数, 那么 $(E, \mathcal{P})$ 称为 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机局部凸模 (简称为 RLC 模).

下文中, 给定一个随机局部凸空间 $(E, \mathcal{P})$ 之后, $\mathcal{P}_f$ 总是表示 $\mathcal{P}$ 的有限子集构成的集族, 且对每个 $\mathcal{Q} \in \mathcal{P}_f$, $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$ 表示由 $\|x\|_{\mathcal{Q}} = \vee \{\|x\| : \|\cdot\| \in \mathcal{Q}\}, \forall x \in E$ 所定义的随机半范数.

下面是本文用到的一个重要例子. 文献 [2] 构造了这一重要的 RN 模 $L^p_{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$ ($1 \leq p \leq +\infty$).

例 2.4 设 $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ 是一个概率空间, $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{E}$ 的子 σ -代数. 定义映射 $\|\cdot\|_p : L^0(\mathcal{E}) \rightarrow \bar{L}^0_+(\mathcal{F})$ 如下:

$$\|x\|_p = \begin{cases} E[|x|^p \mid \mathcal{F}]^{\frac{1}{p}}, & \text{当 } 1 \leq p < \infty \text{ 时,} \\ \wedge \{\xi \in \bar{L}^0_+(\mathcal{F}) \mid |x| \leq \xi\}, & \text{当 } p = +\infty \text{ 时,} \end{cases}$$

其中 $x \in L^0(\mathcal{E})$.

记 $L^p_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}) = \{x \in L^0(\mathcal{E}) \mid \|x\|_p \in L^0_+(\mathcal{F})\}$, 那么 $(L^p_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}), \|\cdot\|_p)$ 是 $\mathbb{R}$ 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的一个 RN 模, 且有 $L^p_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}) = L^0(\mathcal{F}) \cdot L^p(\mathcal{E}) = \{\xi x \mid \xi \in L^0(\mathcal{F}) \text{ 及 } x \in L^p(\mathcal{E})\}$.

定义 2.5 ^[8,10-12] 设 $(E, \mathcal{P})$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的一个 RLC 空间. 对任意正数 ε, λ , $0 < \lambda < 1$ 及 $\mathcal{Q} \in \mathcal{P}_f$, 设

$$N_{\theta}(\mathcal{Q}, \varepsilon, \lambda) = \{x \in E \mid P\{\omega \in \Omega \mid \|x\|_{\mathcal{Q}}(\omega) < \varepsilon\} > 1 - \lambda\},$$

那么, $\{N_{\theta}(\mathcal{Q}, \varepsilon, \lambda) \mid \mathcal{Q} \in \mathcal{P}_f, \varepsilon > 0, 0 < \lambda < 1\}$ 形成 E 上某个 Hausdorff 线性拓扑在 θ 点的局部基, 该拓扑称为由 $\mathcal{P}$ 导出的 (ε, λ) -拓扑.

从现在开始, 在不引起混淆的情形下, 我们总是用 $\mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda}$ 表示每个 RLC 空间的 (ε, λ) -拓扑. 显然, $L^0(\mathcal{F}, K)$ 作为一个特殊的 RN 模, 其上的 (ε, λ) -拓扑就是通常的依测度收敛拓扑, 且 $(L^0(\mathcal{F}, K), \mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda})$

是 K 上的拓扑代数. 也易验证当 $(E, \mathcal{P})$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RLC 模时, $(E, \mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda})$ 是 $(L^0(\mathcal{F}, K), \mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda})$ 上的拓扑模, 即模乘法运算是联合连续的.

对 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RLC 模 $(E, \mathcal{P})$, 我们总是将从 $(E, \mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda})$ 到 $(L^0(\mathcal{F}, K), \mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda})$ 的连续模同态形成的 $L^0(\mathcal{F}, K)$ - 模记为 $(E, \mathcal{P})_{\varepsilon, \lambda}^*$ (无混淆时简记为 $E_{\varepsilon, \lambda}^*$), 称为 $(E, \mathcal{P})$ 在 (ε, λ) - 拓扑下的随机共轭空间.

命题 2.6 ^[8, 10, 13] 设 $(E_1, \|\cdot\|_1)$ 和 $(E_2, \|\cdot\|_2)$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的两个 RN 模, T 是从 E_1 到 E_2 的线性算子, 那么 $T \in B(E_1, E_2)$ 当且仅当 T 是从 $(E_1, \mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda})$ 到 $(E_2, \mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda})$ 的连续模同态, 这时, $\|T\| = \vee\{\|Tx\|_2 \mid x \in E_1 \text{ 且 } \|x\|_1 \leq 1\}$.

命题 2.6 是非常有用的, 郭铁信用它证明 $(B(E_1, E_2), \|\cdot\|)$ 总是 $\mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda}$ - 完备的, 其中 E_1 和 E_2 是两个 RN 空间且 E_2 是 $\mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda}$ - 完备的, 特别地, 对每个 RN 空间 E 来说, E^* 是 $\mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda}$ - 完备的, 参见文献 [8, 10]. 从命题 2.6 也易得下述事实: 对每个 RN 模 E 来说, $E^* = E_{\varepsilon, \lambda}^*$, 参见文献 [8, 14].

对任意 $\varepsilon \in L_{++}^0(\mathcal{F})$, 设 $U(\varepsilon) = \{\xi \in L^0(\mathcal{F}, K) \mid |\xi| \leq \varepsilon\}$. $L^0(\mathcal{F}, K)$ 的一个子集 G 称为 $\mathcal{T}_c$ - 开的, 如果对每个固定的 $x \in G$ 存在某个 $\varepsilon \in L_{++}^0(\mathcal{F})$ 使得 $x + U(\varepsilon) \subset G$. 记 $L^0(\mathcal{F}, K)$ 中所有的 $\mathcal{T}_c$ - 开子集形成的集族为 $\mathcal{T}_c$, 那么 $\mathcal{T}_c$ 是 $L^0(\mathcal{F}, K)$ 上的一个 Hausdorff 拓扑, 该拓扑使得 $(L^0(\mathcal{F}, K), \mathcal{T}_c)$ 是一个拓扑环, 即加法和乘法运算是联合连续的. Filipović 等人^[2] 首次观察到这种拓扑并进一步指出 $\mathcal{T}_c$ 不一定是一个线性拓扑, 因为映射 $\alpha \mapsto \alpha x$ (x 固定) 一般不再连续. 这些观察将他们引向了拓扑环 $(L^0(\mathcal{F}, K), \mathcal{T}_c)$ 上一类拓扑模的研究, 在那里他们只考虑了 $K = \mathbb{R}$ 的情形, 事实上复的情形也可以按下述方式类似引入.

定义 2.7 ^[2] 有序对 $(E, \mathcal{T})$ 称为拓扑 $L^0(\mathcal{F}, K)$ - 模, 如果 $(E, \mathcal{T})$ 是一个拓扑空间且 E 是一个 $L^0(\mathcal{F}, K)$ - 模, 使得 $(E, \mathcal{T})$ 是拓扑环 $(L^0(\mathcal{F}, K), \mathcal{T}_c)$ 上的一个拓扑模, 即加法和模乘法运算是联合连续的.

从 $(E, \mathcal{T})$ 到 $(L^0(\mathcal{F}, K), \mathcal{T}_c)$ 的连续模同态全体形成一个 $L^0(\mathcal{F}, K)$ - 模, 记为 $(E, \mathcal{T})^*$, 称为拓扑 $L^0(\mathcal{F}, K)$ - 模 $(E, \mathcal{T})$ 的随机共轭空间, 这首次在文献 [2] 中引入.

定义 2.8 ^[2, 11, 15] 设 E 是一个 $L^0(\mathcal{F}, K)$ - 模, A 和 B 是 E 的两个子集. A 称为被 BL^0 - 吸收的, 如果存在某个 $\xi \in L_{++}^0(\mathcal{F})$ 使得 $\eta A \subset B$ 对所有满足 $|\eta| \leq \xi$ 的 $\eta \in L^0(\mathcal{F}, K)$ 成立. B 称为 L^0 - 吸收的, 如果 BL^0 - 吸收 E 中的每个元素. B 称为 L^0 - 凸的, 如果 $\xi x + (1 - \xi)y \in B$ 对所有 $x, y \in B$ 和满足 $0 \leq \xi \leq 1$ 的 $\xi \in L_+^0(\mathcal{F})$ 成立. B 称为 L^0 - 均衡的, 如果 $\eta B \subset B$ 对所有满足 $|\eta| \leq 1$ 的 $\eta \in L^0(\mathcal{F}, K)$ 成立.

定义 2.9 ^[2] 如果拓扑 $L^0(\mathcal{F}, K)$ - 模 $(E, \mathcal{T})$ 的拓扑 $\mathcal{T}$ 在 θ 点 (E 中的零元) 有一个局部基 $\mathcal{B}$, 使得 $\mathcal{B}$ 中每个元是 L^0 - 均衡、 L^0 - 吸收和 L^0 - 凸的, 那么 $(E, \mathcal{T})$ 称为局部 L^0 - 凸 $L^0(\mathcal{F}, K)$ - 模 (当 $K = \mathbb{R}$ 时简称为局部 L^0 - 凸模), 在这种情形下, $\mathcal{T}$ 称为 E 上的局部 L^0 - 凸拓扑.

命题 2.10 ^[2] 设 $\mathcal{P}$ 是 $L^0(\mathcal{F}, K)$ - 模 E 上的一族 L^0 - 半范数. 对任意 $\varepsilon \in L_{++}^0(\mathcal{F})$ 和 $Q \in \mathcal{P}_f$ (即 Q 是 $\mathcal{P}$ 的一个有限子集), 设 $N_\theta(Q, \varepsilon) = \{x \in E \mid \|x\|_Q \leq \varepsilon\}$, 那么 $\{N_\theta(Q, \varepsilon) \mid Q \in \mathcal{P}_f, \varepsilon \in L_{++}^0(\mathcal{F})\}$ 形成某个局部 L^0 - 凸拓扑在 θ 点的局部基, 称为由 $\mathcal{P}$ 诱导的局部 L^0 - 凸拓扑. 特别地, 设 $(E, \mathcal{P})$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RLC 模, $\mathcal{T}_c$ 是由 $\mathcal{P}$ 诱导的局部 L^0 - 凸拓扑, 那么 $(E, \mathcal{T}_c)$ 是一个 Hausdorff 局部 L^0 - 凸 $L^0(\mathcal{F}, K)$ - 模.

从现在开始, 如果不出现混淆的话, 我们对每个 RLC 模 $(E, \mathcal{P})$ 总以 $\mathcal{T}_c$ 表示由 $\mathcal{P}$ 诱导的局部 L^0 - 凸拓扑.

设 $(E, \mathcal{P})_c^* = (E, \mathcal{T}_c)^*$ (若无混淆简记为 E_c^*), 称为随机局部凸模 $(E, \mathcal{P})$ 在 $\mathcal{P}$ 诱导的局部 L^0 - 凸拓扑 $\mathcal{T}_c$ 下的随机共轭空间.

设 $(E, \mathcal{P})$ 是一个随机局部凸空间. 因为由 $\mathcal{P}$ 诱导的 (ε, λ) - 拓扑是一个线性拓扑, 在 (ε, λ) - 拓扑下 E 中集合有界性的概念是通常意义下的, 这种有界集在某些研究领域很重要, 例如, 它们在概率赋范空间理论中称为“概率有界集”(参见文献 [16]), 而对 Banach 空间概率论中的 Banach 空间值随机元来说, 则称为“随机有界集”, 然而下列有界集的概念将在本文随机对偶理论中扮演关键角色, 如在文献 [15] 中那样.

定义 2.11 设 $(E, \mathcal{T})$ 是一个局部 L^0 - 凸 $L^0(\mathcal{F}, K)$ - 模. $A \subset E$ 称为 $\mathcal{T}$ - 有界的, 如果 A 可以被 θ 的每个邻域 L^0 - 吸收.

从现在开始, 我们总是设本文涉及的 $L^0(\mathcal{F}, K)$ - 模 E 具有下列性质: 对任何 $x, y \in E$, 如果存在 Ω 的一个可数剖分 $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ (即每个 $A_n \in \mathcal{F}$, $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ 两两不交且 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$), 使得只要 $\tilde{I}_{A_n} x = \tilde{I}_{A_n} y, \forall n \in \mathbb{N}$ 就有 $x = y$. Guo [6] 指出所有随机局部凸模拥有该性质, 因此, 这一假设并无太大局限性.

定义 2.12 [6] 设 E 是一个 $L^0(\mathcal{F}, K)$ - 模. E 中一个序列 $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ 称为在 E 中关于 Ω 的可数剖分 $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ 是可数连接的, 如果存在 $x \in E$ 使得 $\tilde{I}_{A_n} x = \tilde{I}_{A_n} x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, 这种情形下定义 $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{I}_{A_n} x_n$ 为 x . E 的子集 G 称为具有可数连接性质, 如果 G 中每个序列 $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ 在 E 中关于 Ω 的任一可数剖分 $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ 是可数连接的且 $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{I}_{A_n} x_n \in G$.

设 E 是具有可数连接性质的 $L^0(\mathcal{F}, K)$ - 模, 从现在开始对 E 的子集 G 我们总是用 $H_{cc}(G)$ 表示 G 的可数连接包, 即

$$H_{cc}(G) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{I}_{A_n} x_n : \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ 是 } G \text{ 中一个序列且 } \{A_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ 是 } \Omega \text{ 的可数剖分} \right\}.$$

现在叙述本节主要结果.

定理 2.13 (共鸣定理) 设 $(E_1, \|\cdot\|_1)$ 和 $(E_2, \|\cdot\|_2)$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的两个 RN 模, 使得 E_1 是 $\mathcal{T}_c$ - 完备的且有可数连接性质. 对 $B(E_1, E_2)$ 的子集 $\{T_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$, $\{T_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ 在 $B(E_1, E_2)$ 中是 $\mathcal{T}_c$ - 有界的当且仅当 $\forall x \in E_1, \{T_\alpha x, \alpha \in \Lambda\}$ 在 E_2 中是 $\mathcal{T}_c$ - 有界的.

设 $(E_1, \|\cdot\|)$ 和 $(E_2, \|\cdot\|)$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RN 模. 易证线性算子 $T: E_1 \rightarrow E_2$ 属于 $B(E_1, E_2)$ 当且仅当 T 是从 $(E_1, \mathcal{T}_c)$ 到 $(E_2, \mathcal{T}_c)$ 的连续模同态. 因此, 定理 2.13 也给出了从 $(E_1, \mathcal{T}_c)$ 到 $(E_2, \mathcal{T}_c)$ 的一族连续模同态的共鸣定理.

定理 2.14 设 $(E, \mathcal{P})$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RLC 模, $A \subset E$, 那么 A 是 $\mathcal{T}_c$ - 有界的当且仅当 $\forall f \in E_c^*, f(A)$ 在 $(L^0(\mathcal{F}, K), \mathcal{T}_c)$ 中是 $\mathcal{T}_c$ - 有界的.

定理 2.13 和 2.14 蕴含在早期关于 RLC 空间共鸣定理的工作中. 为了弄清这一点, 回忆下列定义.

定义 2.15 [8, 10] 设 $(E, \mathcal{P})$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RLC 空间. 集合 $A \subset E$ 称为 a.s. 有界的, 如果 $\forall \|\cdot\| \in \mathcal{P}, \forall \{\|a\| : a \in A\} \in L_+^0(\mathcal{F})$.

下列引理 2.16 由定义明显可得.

引理 2.16 设 $(E, \mathcal{P})$ 是一个 RLC 模, 那么 E 中的集合 A 是 $\mathcal{T}_c$ - 有界的当且仅当 A 是 a.s. 有界的.

定理 2.13 的证明还需要下列命题 2.17 和 2.18.

命题 2.17 [6] 设 $(E, \mathcal{P})$ 是一个 RLC 模, 那么 E 是 $\mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda}$ - 完备的当且仅当 E 具有可数连接性质且 E 是 $\mathcal{T}_c$ - 完备的.

命题 2.18 [8, 10, 13] 设 $(E_1, \|\cdot\|_1)$ 和 $(E_2, \|\cdot\|_2)$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的两个 RN 模, 使得 E_1 是 $\mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda}$ - 完备的. 给定 $B(E_1, E_2)$ 中一个子集 $\{T_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$, 那么 $\{T_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ 在 $B(E_1, E_2)$ 中是 a.s. 有

界的当且仅当 $\forall x \in E_1, \{T_\alpha x, \alpha \in \Lambda\}$ 在 E_2 中是 a.s. 有界的.

现在可以证明定理 2.13.

定理 2.13 的证明 从引理 2.16、命题 2.17 和 2.18 立即得证. $\square$

为了证明定理 2.14, 让我们先从文献 [8, 10] 中回忆下列知识: 设 $(E, \mathcal{P})$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RLC 空间. 一个从 E 到 $L^0(\mathcal{F}, K)$ 的线性算子 f (这样的线性算子也称为 E 上的随机线性泛函) 称为第一类 a.s. 有界随机线性泛函, 如果存在 $\xi \in L^0_+(\mathcal{F})$ 和 $\mathcal{P}$ 的某个有限子集 $\mathcal{Q}$ 使得 $|f(x)| \leq \xi \|x\|_{\mathcal{Q}}, \forall x \in E$. 将 E 上第一类 a.s. 有界随机线性泛函所成的 $L^0(\mathcal{F}, K)$ - 模记为 E_I^* , 称为 $(E, \mathcal{P})$ 的第一类随机共轭空间.

定理 2.14 的证明仍需要下列命题 2.19 和 2.20.

命题 2.19 [8, 10, 11] 设 $(E, \mathcal{P})$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RLC 空间, A 是 E 的子集, 那么 A 是 a.s. 有界的当且仅当 $f(A)$ 在 $(L^0(\mathcal{F}, K), |\cdot|)$ 中是 a.s. 有界的, $\forall f \in E_I^*$.

命题 2.20 [1] 设 $(E, \mathcal{P})$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机局部凸模, $f: E \rightarrow L^0(\mathcal{F}, K)$ 是一个随机线性泛函, 那么 $f \in E_I^*$ 当且仅当 $f \in E_c^*$, 即 $E_I^* = E_c^*$.

定理 2.14 的证明 从命题 2.19 和 2.20 立得. $\square$

3 关于随机对偶对在局部 L^0 - 凸拓扑下的随机对偶

对于局部凸空间的经典共轭空间理论, 只有关于对偶对的经典对偶理论可以给出彻底的处理, 参见文献 [17]. 在 RN 模和 RLC 模的研究中, 随机共轭空间理论占据中心位置. 很自然地, 以前在文献 [11, 15, 18] 中研究了随机对偶理论, 并已获得许多基本结果和有用的技巧. 在 2009 年以前, 只有 (ε, λ) - 拓扑可用, 因此, 文献 [11, 15, 18] 中的工作是在该拓扑下进行的, 其中 L^0 - 半范数族扮演了关键的角色. 本节中, 为了给 RLC 模理论及其金融应用提供一个充分的框架, 我们将建立随机对偶理论关于局部 L^0 - 凸拓扑的某些基本结果.

3.1 随机相容的局部 L^0 - 凸拓扑

设 X 和 Y 是两个 $L^0(\mathcal{F}, K)$ - 模. 映射 $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times Y \rightarrow L^0(\mathcal{F}, K)$ 称为 $L^0(\mathcal{F}, K)$ - 双线性函数 (若无混淆简记为 L^0 - 双线性函数), 如果 $\forall x \in X, y \in Y, \langle x, \cdot \rangle: Y \rightarrow L^0(\mathcal{F}, K)$ 和 $\langle \cdot, y \rangle: X \rightarrow L^0(\mathcal{F}, K)$ 都是 L^0 - 线性函数.

定义 3.1 [11, 15, 18] 两个 $L^0(\mathcal{F}, K)$ - 模 X 和 Y 称为 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的关于 L^0 - 双线性函数 $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times Y \rightarrow L^0(\mathcal{F}, K)$ 的随机对偶对, 如果满足下列条件:

- (1) $\langle x, y \rangle = 0, \forall y \in Y$ 当且仅当 $x = \theta$;
- (2) $\langle x, y \rangle = 0, \forall x \in X$ 当且仅当 $y = \theta$.

通常, 如果 X, Y 和 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 满足定义 3.1, 那么简称 $\langle X, Y \rangle$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机对偶对. 设 $X^\#$ 表示从一个 $L^0(\mathcal{F}, K)$ - 模 X 到 $L^0(\mathcal{F}, K)$ 的 L^0 - 线性函数形成的 $L^0(\mathcal{F}, K)$ - 模. 易知 $X^\#$ 有可数连接性质. 如果 $\langle X, Y \rangle$ 是一个随机对偶对, 我们总是把每个 $x \in X$ 和 $\langle x, \cdot \rangle \in Y^\#$ 视为同一, 即把 X 当作 $Y^\#$ 的一个子模, 因此, 对任意子集 $G \subset X$, 总是用 $H_{cc}(G)$ 表示 G 在 $Y^\#$ 中的可数连接包, 这不会引起任何混淆.

定义 3.2 设 $\langle X, Y \rangle$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机对偶对, $\mathcal{P}$ 是 X 上的一族 L^0 - 半范数, $\mathcal{T}_c$ 是由 $\mathcal{P}$ 诱导的局部 L^0 - 凸拓扑. 如果 $(X, \mathcal{P})$ 构成 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RLC 模, 使得 $(X, \mathcal{P})_c^* = Y$, 则

称 $\mathcal{P}$ 为在局部 L^0 -凸拓扑下与 Y 随机相容的 L^0 -半范数族, 这时, $\mathcal{T}_c$ 也称为与 Y 随机相容的局部 L^0 -凸拓扑.

注记 3.3 在文献 [15] 中, L^0 -半范数族 $\mathcal{P}$ 称为与 Y 关于 $\mathcal{P}$ 诱导的 (ε, λ) -拓扑 $\mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda}$ 随机相容的族, 如果 $(X, \mathcal{P})$ 形成一个 RLC 模, 使得 $(X, \mathcal{P})_{\varepsilon, \lambda}^* = Y$.

设 $\langle X, Y \rangle$ 是一个随机对偶对, $\sigma(X, Y) = \{|\langle \cdot, y \rangle| : y \in Y\}$, 那么 $\sigma(X, Y)$ 是 X 上的一族 L^0 -半范数, 使得 $(X, \sigma(X, Y))$ 成为一个 RLC 模. 在下文中, 总是用 $\sigma_c(X, Y)$ 和 $\sigma_{\varepsilon, \lambda}(X, Y)$ 分别表示由 $\sigma(X, Y)$ 诱导出的局部 L^0 -凸拓扑和 (ε, λ) -拓扑.

定理 3.4 设 $\langle X, Y \rangle$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机对偶对, 那么 $\sigma_c(X, Y)$ 是与 Y 随机相容的拓扑.

定理 3.4 的证明需要下列引理 3.5.

引理 3.5 [15, 18] 设 E 是一个 $L^0(\mathcal{F}, K)$ -模. 如果 $f_1, f_2, \dots, f_n$ 和 g 是 $n+1$ 个从 E 到 $L^0(\mathcal{F}, K)$ 的 L^0 -线性函数, 那么存在 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in L^0(\mathcal{F}, K)$ 使得 $g = \sum_{i=1}^n \xi_i f_i$ 当且仅当 $\bigcap_{i=1}^n N(f_i) \subset N(g)$, 其中 $N(f_i) = \{x \in E \mid f_i(x) = 0\}$ ($1 \leq i \leq n$), $N(g) = \{x \in E \mid g(x) = 0\}$.

定理 3.4 的证明 显然, $Y \subset (X, \sigma(X, Y))_c^*$, 只需证 $(X, \sigma(X, Y))_c^* \subset Y$. 设 $f \in (X, \sigma(X, Y))_c^*$, 则由命题 2.20, 存在 $\xi \in L_+^0(\mathcal{F})$ 和 $y_1, y_2, \dots, y_n \in Y$ 使得 $|f(x)| \leq \xi(\bigvee\{|\langle x, y_i \rangle| : 1 \leq i \leq n\})$, $\forall x \in X$. 由引理 3.5, 存在 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in L^0(\mathcal{F}, K)$ 使得 $f(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i \langle x, y_i \rangle$, $\forall x \in X$. 设 $y = \sum_{i=1}^n \xi_i y_i$, 那么 $f = y \in Y$. $\square$

注记 3.6 在文献 [15] 中, 由于运用了 (ε, λ) -拓扑, 我们证明了 $(X, \sigma(X, Y))_{\varepsilon, \lambda}^* = H_{cc}(Y)$, 这启发我们发现了文献 [1, 定理 3.7]. 在文献 [15] 中, Y 称为关于 X 是正则的, 如果对每个序列 $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ 和每个 Ω 的可数剖分 $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$, 存在 $y \in Y$ 使得 $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{I}_{A_n} \langle x, y_n \rangle$, $\forall x \in X$. 这蕴含 $\tilde{I}_{A_n} \langle x, y \rangle = \tilde{I}_{A_n} \langle x, y_n \rangle$, $\forall x \in X, n \in \mathbb{N}$, 即 $\tilde{I}_{A_n} y = \tilde{I}_{A_n} y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. 也就是说, Y 有可数连接性质. 因此, 对一个随机对偶对 $\langle X, Y \rangle$ 来说, “ Y 是正则” 的与 “ Y 有可数连接性质” 是相同的.

为了下面定理 3.8 的证明, 我们需要下列引理 3.7.

引理 3.7 [15] 设 X 是一个 $L^0(\mathcal{F}, K)$ -模, $f : X \rightarrow L^0(\mathcal{F}, K)$ 是一个 $L^0(\mathcal{F}, K)$ -线性函数, $\{p_i : X \rightarrow L_+^0(\mathcal{F}) \mid 1 \leq i \leq n\}$ 是 n 个 L^0 -半范数, 使得 $|f(x)| \leq \sum_{i=1}^n p_i(x)$, $\forall x \in X$, 那么存在 n 个 $L^0(\mathcal{F}, K)$ -线性函数 f_i ($1 \leq i \leq n$) 使得

- (1) $|f_i(x)| \leq p_i(x)$, $\forall x \in X, 1 \leq i \leq n$;
- (2) $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$, $\forall x \in X$.

定理 3.8 设 $\langle X, Y \rangle$ 是一个随机对偶对, 那么在所有与 Y 随机相容的局部 L^0 -凸拓扑中有一个最强.

证明 由引理 3.7, 读者可以看到证明完全类似于相应经典情形, 故从略. $\square$

设 $\langle X, Y \rangle$ 是一个随机对偶对. 对 X 的一个子集 A , $A^0 := \{y \in Y \mid |\langle a, y \rangle| \leq 1, \forall a \in A\}$ 称为 A 在 Y 中的极. 类似地, 人们可以定义 Y 中的子集 B 在 X 中的极. 对于下列定理 3.11 的证明, 我们需要下列引理 3.9 和 3.10.

引理 3.9 [6] 设 $(E, \mathcal{P})$ 是一个 RLC 模, G 是 E 的具有可数连接性质的一个子集. 那么 $\bar{G}_{\varepsilon, \lambda} = \bar{G}_c$, 其中 $\bar{G}_{\varepsilon, \lambda}$ 和 $\bar{G}_c$ 分别表示 G 的 $\mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda}$ -和 $\mathcal{T}_c$ -闭包.

引理 3.10 设 $(E, \mathcal{P})$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RLC 模, 使得 E 有可数连接性质, 那么下列为真,

- (1) 如果 G 有可数连接性质, 那么 $\bar{G}_c = \bar{G}_{\varepsilon, \lambda}$ 也有可数连接性质;
- (2) 如果 G 是 L^0 -凸的, 那么 $\bar{G}_{\varepsilon, \lambda} = [H_{cc}(G)]_{\varepsilon, \lambda}^- = [H_{cc}(G)]_c^-$ 有可数连接性质.

证明 (1) $\bar{G}_c = \bar{G}_{\varepsilon, \lambda}$ 由引理 3.9 可得, 因此, 我们只需要证明 $\bar{G}_{\varepsilon, \lambda}$ 有可数连接性质.

设 $\{x_n, n \in N\}$ 是 $\bar{G}_{\varepsilon, \lambda}$ 中一给定序列, $\{A_n, n \in N\}$ 是 Ω 的一个可数剖分, 那么由 E 的可数连接性质, 存在 $x^* \in E$ 使得 $x^* = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{I}_{A_n} x_n$. 我们断言 $x^* \in \bar{G}_{\varepsilon, \lambda}$, 即 $(x^* + N_{\theta}(\mathcal{Q}, \varepsilon^*, \lambda^*)) \cap G \neq \emptyset$ 对任意 $\varepsilon^* > 0, \lambda^* > 0$ 和 $\mathcal{P}$ 的有限子集 $\mathcal{Q}$ 成立, 其中

$$0 < \lambda^* < 1, \quad N_{\theta}(\mathcal{Q}, \varepsilon^*, \lambda^*) = \{x \in E \mid P\{\omega \in \Omega \mid \|x\|_{\mathcal{Q}}(\omega) < \varepsilon^*\} > 1 - \lambda^*\}.$$

事实上, 易知对每个 $x_n \in \bar{G}_{\varepsilon, \lambda}$, 存在 $\bar{x}_n \in G$ 使得

$$P\{\omega \in \Omega \mid \|x_n - \bar{x}_n\|_{\mathcal{Q}}(\omega) < \varepsilon^*\} > 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \lambda^*.$$

由 G 的可数连接性质, 存在 $\bar{x} \in G$ 使得 $\bar{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{I}_{A_n} \bar{x}_n$. 那么,

$$\begin{aligned} P\{\omega \in \Omega \mid \|x^* - \bar{x}\|_{\mathcal{Q}}(\omega) \geq \varepsilon^*\} &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega \in A_n \mid \|x_n - \bar{x}_n\|_{\mathcal{Q}}(\omega) \geq \varepsilon^*\} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega \in \Omega \mid \|x_n - \bar{x}_n\|_{\mathcal{Q}}(\omega) \geq \varepsilon^*\} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \lambda^* = \frac{1}{2} \lambda^*, \end{aligned}$$

即

$$P\{\omega \in \Omega \mid \|x^* - \bar{x}\|_{\mathcal{Q}}(\omega) < \varepsilon^*\} \geq 1 - \frac{1}{2} \lambda^* > 1 - \lambda^*,$$

也就是说, $\bar{x} \in (x^* + N_{\theta}(\mathcal{Q}, \varepsilon^*, \lambda^*)) \cap G$.

(2) 由 (1), $[H_{cc}(G)]_c^- = [H_{cc}(G)]_{\varepsilon, \lambda}^-$ 有可数连接性质. 因此, 我们只需证明 $\bar{G}_{\varepsilon, \lambda} = [H_{cc}(G)]_{\varepsilon, \lambda}^-$. 不失一般性, 可设 $\theta \in G$. 那么对任意 $x = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{I}_{A_n} g_i \in H_{cc}(G)$, 显然, $\{\sum_{i=1}^n \tilde{I}_{A_i} g_i \mid n \in N\}$ 是 G 中的一个 $\mathcal{T}_{\varepsilon, \lambda}$ -Cauchy 列, 又由于 $\{A_n, n \in N\}$ 是 Ω 的一个可数剖分, 故该 Cauchy 列收敛于 x . 这意味着 $x \in \bar{G}_{\varepsilon, \lambda}$, 即 $[H_{cc}(G)]_{\varepsilon, \lambda}^- \subset \bar{G}_{\varepsilon, \lambda}$, 故 $[H_{cc}(G)]_{\varepsilon, \lambda}^- = \bar{G}_{\varepsilon, \lambda}$. $\square$

定理 3.11 (随机双极定理) 设 $\langle X, Y \rangle$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机对偶对, X 有可数连接性质. 那么对 X 的任意子集 A 及每个与 Y 随机相容的局部 L^0 -凸拓扑 $\mathcal{T}$, 我们有 $A^{00} = [H_{cc}(\Gamma(A))]_{\mathcal{T}}^-$, 其中 $\Gamma(A)$ 表示 A 的 L^0 -均衡和 L^0 -凸包, 且 $[H_{cc}(\Gamma(A))]_{\mathcal{T}}^-$ 表示 $H_{cc}(\Gamma(A))$ 的 $\mathcal{T}$ -闭包.

证明 由于 $(X, \mathcal{T})^* = Y$, $\mathcal{T} \supset \sigma_c(X, Y)$. 另一方面, A^{00} 是 L^0 -均衡、 L^0 -凸和 $\sigma_c(X, Y)$ -闭的, 具有可数连接性质, 因此,

$$A^{00} \supset [H_{cc}(\Gamma(A))]_{\sigma_c(X, Y)}^- \supset [H_{cc}(\Gamma(A))]_{\mathcal{T}}^-.$$

由引理 3.10(1), $[H_{cc}(\Gamma(A))]_{\mathcal{T}}^-$ 有可数连接性质. 如果存在 $x \in A^{00} \setminus [H_{cc}(\Gamma(A))]_{\mathcal{T}}^-$, 那么由文献 [1, 推论 4.8 和注记 4.9], 存在 $y \in (X, \mathcal{T})^* = Y$ 使得 $|\langle x, y \rangle| \not\leq 1$ 且 $\forall \{|\langle a, y \rangle| : a \in A\} \leq 1$, 这显然是不可能的. $\square$

注记 3.12 经典的双极定理是一个优美的结果, 因此常用在经典对偶理论的研究中, 参见文献 [17]. 然而, 局部 L^0 -凸拓扑下的随机双极定理, 即定理 3.11 具有复杂的形式, 且需要 X 有可数连接性质, 因此, 我们尽力避免使用它, 除了在 3.3 节中我们被迫用它来刻画一类 L^0 -准桶模. 在文献 [15] 中我们在 (ε, λ) -拓扑下证明了与经典的双极定理有同样形式的随机双极定理, 但需要 Y 有可数连接性质. 总而言之, 为了得到随机对偶理论中某些最精细的结果, 我们总是被迫寻找新的方法.

现在讲随机相容不变量. 文献 [1, 推论 4.8] 证明了任何具有可数连接性质的闭 L^0 -凸子集是关于每个随机对偶对的随机相容不变量. 定理 2.14 表明, 局部 L^0 -凸拓扑下的有界集亦然.

3.2 随机可容许拓扑

定义 3.13 设 $\langle X, Y \rangle$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机对偶对, $\mathcal{A}$ 是 Y 中的一族 $\sigma_c(Y, X)$ -有界集. 对任何 $A \in \mathcal{A}$, L^0 -半范数 $\|\cdot\|_A: X \rightarrow L^0_+(\mathcal{F})$ 定义为 $\|x\|_A = \vee\{|\langle x, a \rangle|: a \in A\}$, $\forall x \in X$, 那么由 L^0 -半范数族 $\{\|\cdot\|_A: A \in \mathcal{A}\}$ 诱导的局部 L^0 -凸拓扑 $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ 称为 $\mathcal{A}$ 上的随机一致收敛拓扑.

定义 3.14 设 $\langle X, Y \rangle$ 和 $\mathcal{A}$ 如定义 3.13 所述. 如果 $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} \supset \sigma_c(X, Y)$, 那么 $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ 称为随机可容许的, 这种情形下 $\mathcal{A}$ 称为随机可容许的. 如果 $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ 是随机相容的, 即 $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{A}})^* = Y$, 那么 $\mathcal{A}$ 也称为随机相容的.

如通常那样, 我们首先研究 $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$.

命题 3.15 设 $\langle X, Y \rangle$ 和 $\mathcal{A}$ 如定义 3.13 所述. 那么下列叙述等价,

- (1) $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ 是 Hausdorff 的;
- (2) $\cup \mathcal{A} := \cup\{A: A \in \mathcal{A}\}$ 是全的, 即由 $\langle x, y \rangle = 0, \forall y \in \cup \mathcal{A}$, 可以推出 $x = \theta$;
- (3) $\text{Span} \mathcal{A}$ ($\cup \mathcal{A}$ 生成的子模) 在 Y 中是 $\sigma_{\varepsilon, \lambda}(Y, X)$ -稠的;
- (4) $H_{cc}(\text{Span} \mathcal{A})$ 在 $H_{cc}(Y)$ 中是 $\sigma_c(H_{cc}(Y), X)$ -稠的.

证明 (1) $\Leftrightarrow$ (2), (3) $\Rightarrow$ (2) 和 (4) $\Rightarrow$ (2) 都是显然的.

(2) $\Rightarrow$ (3). 由文献 [1, 定理 4.4 和注记 4.9], 可以凭借与经典情形相同的方法完成证明.

(3) $\Rightarrow$ (4). 通过对 $\text{Span} \mathcal{A}$ 和 $(H_{cc}(Y), \sigma_c(H_{cc}(Y), X))$ 运用引理 3.10(2), 我们有下列关系:

$$[H_{cc}(\text{Span} \mathcal{A})]_{\sigma_c(H_{cc}(X), Y)}^- = [H_{cc}(\text{Span} \mathcal{A})]_{\sigma_{\varepsilon, \lambda}(H_{cc}(X), Y)}^- = [\text{Span} \mathcal{A}]_{\sigma_{\varepsilon, \lambda}(H_{cc}(X), Y)}^- \supset H_{cc}(Y)$$

(对 $H_{cc}(Y)$ 使用 (3)). □

尽管随机双极定理不一定对所有随机对偶对成立, 下列引理 3.16(2) 可以弥补这一点. 对于随机对偶对 $\langle X, Y \rangle$, X 中一个子集称作 $\sigma_c(X, Y)$ - L^0 -桶, 如果它是 L^0 -均衡的、 L^0 -吸收的和 $\sigma_c(X, Y)$ -闭的 L^0 -凸集.

引理 3.16 设 $\langle X, Y \rangle$ 是一个随机对偶对. 我们有

- (1) $A \subset Y$ 是 $\sigma_c(Y, X)$ -有界的当且仅当 A^0 是 $\sigma_c(X, Y)$ - L^0 -桶.
- (2) 对任何 $\sigma_c(Y, X)$ -有界集 $B \subset Y$, $\|\cdot\|_B = \|\cdot\|_{B^{00}}$ (因此 B^{00} 也是 $\sigma_c(Y, X)$ -有界的), 其中 $\|\cdot\|_B$ 和 $\|\cdot\|_{B^{00}}$ 如定义 3.13 所述.

证明 (1) 是明显的.

(2) 由于 $B^{00} \supset B$, 显然, $\|\cdot\|_{B^{00}} \geq \|\cdot\|_B$. 相反地, 如果 $\|x\|_B \leq 1$, 那么 $x \in B^0$, 因此, $\|x\|_{B^{00}} \leq 1$, 这蕴含 $\|\cdot\|_{B^{00}} \leq \|\cdot\|_B$. □

定义 3.17 设 $\langle X, Y \rangle$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机对偶对, $\mathcal{B}$ 是 Y 上一族 $\sigma_c(Y, X)$ -有界集. $\mathcal{B}$ 称为饱和的, 如果满足下列条件:

- (a) 如果对某个 $B \in \mathcal{B}$, $A \subset B$, 那么 $A \in \mathcal{B}$;
- (b) $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{B}$;
- (c) $B \in \mathcal{B} \Rightarrow B^{00} \in \mathcal{B}$;
- (d) 对任意 $\lambda \in L^0(\mathcal{F}, K)$ 和 $B \in \mathcal{B}$, $\lambda B \in \mathcal{B}$.

在饱和族的经典定义中 (这相当于当 $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$ 的情形), 上述定义 3.17(c) 被定义为 “ $B \in \mathcal{B} \Rightarrow [\Gamma(B)]_{\sigma(Y, X)}^- \in \mathcal{B}$ ”. 但是, 一般情形下, 我们只有 $B^{00} \supset [\Gamma(B)]_{\sigma_c(Y, X)}^-$. 尽管随机双极定理证明了当 Y 有可数连接性质时, $B^{00} = [H_{cc}(\Gamma(B))]_{\sigma_c(Y, X)}^-$, 我们想对任意随机对偶对引入饱和族的概念, 因此, 我们选择定义 3.17 来满足所有要求.

设 $\langle X, Y \rangle$ 是一个随机对偶对, 本文总是用 $\mathcal{B}(Y, X)$ 表示 Y 的 $\sigma_c(Y, X)$ -有界集所成的集族, 且 $\beta(X, Y) = \mathcal{T}_{\mathcal{B}(Y, X)}$. 由引理 3.16(2), $\mathcal{B}(Y, X)$ 是饱和的. 显然, $\beta(X, Y)$ 是最强的随机可容许拓扑.

对 Y 的一族 $\sigma_c(Y, X)$ -有界集 $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^s$ 表示 $\mathcal{A}$ 的饱和包, 即包含 $\mathcal{A}$ 的最小饱和族. 易知,

$$\mathcal{A}^s = \left\{ B \subset Y \mid \text{存在 } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in L^0(\mathcal{F}, K) \text{ 与 } A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A} \text{ 使得 } B \subset \left(\bigcup_{i=1}^n \lambda_i A_i \right)^{00} \right\},$$

再由引理 3.16(2) 易得 $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \mathcal{T}_{\mathcal{A}^s}$.

命题 3.18 设 $\langle X, Y \rangle$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的一个随机对偶对, $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 Y 上的两族 $\sigma_c(Y, X)$ -有界集, $\mathcal{B}$ 是饱和的, 那么 $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ 当且仅当 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

证明 如果 $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, 那么对每个 $A \in \mathcal{A}$, 存在 $\xi \in L^0_+(\mathcal{F})$ 和 $\mathcal{B}$ 的一个有限子族 $\{B_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ 使得 $\|x\|_A \leq \xi(\vee\{\|x\|_{B_i} : 1 \leq i \leq n\}) = \|x\|_B, \forall x \in X$, 其中 $B = \xi(\bigcup_{i=1}^n B_i) \in \mathcal{B}$. 因此, $A \subset A^{00} \subset B^{00} \in \mathcal{B}$, 这表明, $A \in \mathcal{B}$. 反之显然. $\square$

推论 3.19 设 $\langle X, Y \rangle$ 是一个随机对偶对, $\mathcal{A}$ 是 Y 中 $\sigma_c(Y, X)$ -有界集的一个饱和族, 那么 $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ 是随机可容许的当且仅当 $\bigcup \mathcal{A} = Y$.

证明 设 Y_f 表示 Y 的所有有限子集所形成的集族, 那么 $\sigma_c(X, Y) = \mathcal{T}_{Y_f}$. 因此, $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ 是随机可容许的当且仅当 $\mathcal{T}_{Y_f} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ 当且仅当 $Y_f \subset \mathcal{A}$ 当且仅当 $\bigcup \mathcal{A} = Y$. $\square$

定理 3.20 设 $\langle X, Y \rangle$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机对偶对, 那么 X 上的局部 L^0 -凸拓扑是随机一致收敛拓扑当且仅当 $\mathcal{T}$ 在 θ 点有局部基 $\mathcal{B}$ 使得每个 $U \in \mathcal{B}$ 是 $\sigma_c(X, Y)$ - L^0 -桶.

证明 如果对 Y 中 $\sigma_c(X, Y)$ -有界集形成的某个集族 $\mathcal{A}$ 有 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, 我们可以假设 $\mathcal{A}$ 是饱和的, 那么 $\mathcal{B} = \{A^0 : A \in \mathcal{A}\}$ 是 $\mathcal{T}$ 在 θ 点的一个局部基, 使得每个 A^0 是 $\sigma_c(X, Y)$ - L^0 -桶.

反过来, 设 $\mathcal{T}$ 在 θ 有一个局部基 $\mathcal{B}$, 使得每个 $U \in \mathcal{B}$ 是 $\sigma_c(X, Y)$ - L^0 -桶. 设 $\mathcal{A} = \{U^0 : U \in \mathcal{B}\}$, 那么每个 U^0 是 $\sigma_c(Y, X)$ -有界的, 因为 $(U^0)^0 \supset U$ 是 L^0 -吸收的. 进一步, 我们按下述步骤证明 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. 由于 $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ 是被 $\{\|\cdot\|_A : A \in \mathcal{A}\}$ 诱导的, 且对每个 $U^0 \in \mathcal{A}$, $\{x \in X \mid \|x\|_{U^0} \leq 1\} = U^{00} \supset U$, 这表明, $\|\cdot\|_{U^0}$ 是 $\mathcal{T}$ -连续的, 即 $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{T}$. 另一方面, 对每个 $U \in \mathcal{B}$, $U \subset U^{00} = (U^0)^0$, 即 $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ 在 θ 点的局部基中的每个元 $(U^0)^0$ 是 θ 的 $\mathcal{T}$ -邻域, 也就是说, $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{T}$. $\square$

在经典情形中, 由经典双极定理容易建立下述事实: $\{A^0 : A \in \mathcal{B}(Y, X)\}$ 作为 $\beta(X, Y)$ 在 θ 点的局部基, 是 $\sigma(X, Y)$ -桶的全体形成的族. 然而, 在随机情形下, 我们并不知道 $\{A^0 : A \in \mathcal{B}(Y, X)\}$ 作为 $\beta(X, Y)$ 在 θ 点的局部基是否仍然是 $\sigma_c(X, Y)$ - L^0 -桶形成的族, 我们只知道, 对每个 $\sigma_c(X, Y)$ - L^0 -桶 U 存在 $A (= U^0) \in \mathcal{B}(Y, X)$ 使得 $U \subset A^0$. 因此, 我们提醒读者下列有用的结果.

定理 3.21 设 $\langle X, Y \rangle$ 是一个随机对偶对, X 有可数连接性质, 那么所有具有可数连接性质的 $\sigma_c(X, Y)$ - L^0 -桶组成的集族形成 $\beta(X, Y)$ 在 θ 点的一个局部基.

证明 由 X 的可数连接性质, 容易明白对每个 $A \in \mathcal{B}(Y, X)$, A^0 有可数连接性质, 因此, A^0 是一个具有可数连接性质的 $\sigma_c(X, Y)$ - L^0 -桶. 另一方面, 对每个具有可数连接性质的 $\sigma_c(X, Y)$ - L^0 -桶 U , 由定理 3.11, 我们有 $U = U^{00} = (U^0)^0$. 由于 $U^0 \in \mathcal{B}(Y, X)$, 有 $U \in \{A^0 : A \in \mathcal{B}(Y, X)\}$. 总之, 所有具有可数连接性质的 $\sigma_c(X, Y)$ - L^0 -桶组成的集族恰好是局部基 $\{A^0 : A \in \mathcal{B}(Y, X)\}$. $\square$

下列定理 3.22 表明, 随机可容许拓扑的研究在 RLC 模理论中具有普遍的意义.

定理 3.22 设 $(X, \mathcal{P})$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的一个 RLC 模, $\mathcal{E}$ 是从 $(X, \mathcal{T}_c)$ 到 $L^0(\mathcal{F}, K)$ 的等度连续子集 E 全体所成的集族, 其中 $L^0(\mathcal{F}, K)$ 赋予由 $|\cdot|$ 诱导的局部 L^0 -凸拓扑, 那么 $\mathcal{T}_c = \mathcal{T}_{\mathcal{E}}$, 这里我们考虑自然配对 $\langle X, X_c^* \rangle$, 则 $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ 显然是一个随机相容拓扑.

证明 显然, $E \in \mathcal{E}$ 当且仅当存在 $\xi \in L^0_+(\mathcal{F})$ 和 $\mathcal{P}$ 的一个有限子集 $\mathcal{Q}$ 使得

$$\|x\|_E := \vee\{|f(x)| : f \in E\} \leq \xi(\vee\{\|x\| : \|\cdot\| \in \mathcal{Q}\}), \quad \forall x \in X,$$

因此, $\mathcal{T}_E \subset \mathcal{T}_c$.

反之, 对每个 $\|\cdot\| \in \mathcal{P}$, 设 $E = \{f \in X^*_c \mid |f(x)| \leq \|x\|, \forall x \in X\}$, 那么由文献 [6] 的随机 Hahn-Banach 定理知, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_E$, 因此, $\mathcal{T}_c \subset \mathcal{T}_E$. $\square$

推论 3.23 设 $\langle X, Y \rangle$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机对偶对, 那么 X 上每个随机相容拓扑 $\mathcal{T}$ 是随机可容许的.

证明 由定义 3.2, 存在 X 上的 L^0 -半范数族 $\mathcal{P}$ 使得 $(X, \mathcal{P})$ 成为 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 RLC 模且 $(X, \mathcal{P})^*_c = Y$, $\mathcal{T}$ 正好由 $\mathcal{P}$ 诱导, 这时 $\langle X, Y \rangle$ 恰好是 $\langle X, X^*_c \rangle$, 且由定理 3.22 得 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_E$. $\square$

下述定理 3.24 (即共鸣定理) 的证明被省略, 因为它与经典情形的证明相同. 关于 L^0 -桶模和 L^0 -准桶模的概念, 见本文下面紧跟着的第 3.3 小节开始的部分.

定理 3.24 设 $(E, \mathcal{P})$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的一个 RLC 模, $H \subset E^*_c$. 那么我们有以下论断:

- (1) 如果 $(E, \mathcal{T}_c)$ 是一个 L^0 -桶, 那么 H 是从 $(E, \mathcal{T}_c)$ 到 $(L^0(\mathcal{F}, K), \mathcal{T}_c)$ 等度连续的当且仅当 H 是 $\sigma_c(E^*_c, E)$ -有界的;
- (2) 如果 $(E, \mathcal{T}_c)$ 是 L^0 -准桶, E 有可数连接性质, 那么 H 是从 $(E, \mathcal{T}_c)$ 到 $(L^0(\mathcal{F}, K), \mathcal{T}_c)$ 等度连续的当且仅当 H 是 $\sigma_c(E^*_c, E)$ -有界的.

在经典情形中, 对一个局部凸空间 $(E, \mathcal{T})$, 如果子集 $H \subset E^*$ 是等度连续的, 那么它必定是 $\sigma(E^*, E)$ -相对紧的. 然而经典的 Banach-Alaoglu 定理对 (ε, λ) -拓扑下 RN 模的情形普遍不成立 (参见文献 [19]), 局部 L^0 -凸拓扑下也会出现同样的情形, 因此, 我们不能把经典 Mackey 拓扑的构造推广到随机情形.

3.3 随机局部凸模为 L^0 -准桶的一个特征

让我们首先从文献 [2] 中回忆一个 L^0 -桶模的概念. 设 $(E, \mathcal{T})$ 是一个局部 L^0 -凸 $L^0(\mathcal{F}, K)$ -模. E 中的一个 L^0 -均衡、 L^0 -吸收和 L^0 -凸和闭的子集称为一个 L^0 -桶. $(E, \mathcal{T})$ 称为 L^0 -桶模, 如果每个 L^0 -桶是 θ 的一个邻域, 然而下列 L^0 -准桶模的概念似乎更适合于金融应用.

定义 3.25 设 $(E, \mathcal{T})$ 是一个局部 L^0 -凸 $L^0(\mathcal{F}, K)$ -模. $(E, \mathcal{T})$ 称为一个 L^0 -准桶模, 如果每个具有可数连接性质的 L^0 -桶是 θ 的一个邻域.

本小节主要结果是下面的定理 3.26.

定理 3.26 设 $(E, \mathcal{P})$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的一个 RLC 模, 使得 E 有可数连接性质, 那么 $(E, \mathcal{T}_c)$ 是 L^0 -准桶的当且仅当 $\mathcal{T}_c = \beta(E, E^*_c)$.

证明 $\mathcal{T}_c$ 在 θ 点有一个由 $\{N_\theta(Q, \varepsilon) \mid Q \in \mathcal{P}_f, \varepsilon \in L^0_{++}(\mathcal{F})\}$ 组成的局部基, 其中 $N_\theta(Q, \varepsilon) = \{x \in E \mid \|x\|_Q \leq \varepsilon\}$. 显然, 每个 $N_\theta(Q, \varepsilon)$ 是具有可数连接性质的 $\mathcal{T}_c$ - L^0 -桶. 因此, 如果 $\mathcal{T}_c$ 是 L^0 -准桶的, 那么所有具有可数连接性质的 $\mathcal{T}_c$ - L^0 -桶所构成的集族形成 $\mathcal{T}_c$ 在 θ 点的一个局部基. 由文献 [1, 推论 4.8], 具有可数连接性质的 L^0 -桶是随机相容不变量, 即具有可数连接性质的 $\mathcal{T}_c$ - L^0 -桶的全体与具有可数连接性质的 $\sigma_c(E, E^*_c)$ - L^0 -桶的全体相同, 因此, 如果 $\mathcal{T}_c$ 是 L^0 -准桶, 则由定理 3.21 有 $\mathcal{T}_c = \beta(E, E^*_c)$.

反之, 如果 $\mathcal{T}_c = \beta(E, E^*_c)$, 那么, 因为从文献 [1, 推论 4.8] 知, 每个具有可数连接性质的 $\mathcal{T}_c$ - L^0 -桶是 $\sigma_c(E, E^*_c)$ - L^0 -桶, 从而, 根据定理 3.21 知, 这种桶也是 θ 点的 $\beta(E, E^*_c)$ -邻域, 即 θ 点的 $\mathcal{T}_c$ -邻域, 换句话说, $(E, \mathcal{T}_c)$ 是 L^0 -准桶. $\square$

推论 3.27 设 $(E, \|\cdot\|)$ 是 K 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的一个 $\mathcal{T}_c$ -完备 RN 模, 使得 E 有可数连接性质. 那么 $(E, \mathcal{T}_c)$ 是 L^0 -准桶的.

证明 只需验证 $\mathcal{T}_c = \beta(E, E_c^*)$.

首先, 由 $\|\cdot\|$ 诱导的局部 L^0 -凸拓扑 $\mathcal{T}_c$ 是关于自然随机对偶对 $\langle E, E_c^* \rangle$ 的随机相容拓扑, 因此, 由推论 3.23 有 $\mathcal{T}_c \subset \beta(E, E_c^*)$.

反之, $\beta(E, E_c^*)$ 是由 $\{\|\cdot\|_A : A \in \mathcal{B}(E_c^*, E)\}$ 导出的, 回忆 $\|\cdot\|_A : E \rightarrow L_+^0(\mathcal{F})$ 的定义是

$$\|x\|_A = \vee\{|f(x)| : f \in A\}, \quad \forall x \in E, \quad A \in \mathcal{B}(E_c^*, E).$$

因此, 我们只需证每个 $\|\cdot\|_A$ 是从 $(E, \mathcal{T}_c)$ 到 $(L^0(\mathcal{F}, K), \mathcal{T}_c)$ 连续的. $A \in \mathcal{B}(E_c^*, E)$ 意味着对任意 $x \in E$, $\{f(x) : f \in A\}$ 在 $(L^0(\mathcal{F}, K), \mathcal{T}_c)$ 中是 $\mathcal{T}_c$ -有界的, 因此, 由定理 2.13 知, A 在 E_c^* 中是 $\mathcal{T}_c$ -有界的, 即 a.s. 有界的, 因此存在 $\xi_A \in L_+^0(\mathcal{F})$ 使得 $\|f\| \leq \xi_A, \forall f \in A$. 这表明,

$$\|x\|_A = \vee\{|f(x)| : f \in A\} \leq \vee\{\|f\| \cdot \|x\| : f \in A\} \leq (\vee\{\|f\| : f \in A\})\|x\| \leq \xi_A\|x\|, \quad \forall x \in E,$$

即 $\beta(E, E_c^*) \subset \mathcal{T}_c$. □

推论 3.28 对每个 $p \in [1, +\infty]$, $(L_{\mathcal{F}}^p(\mathcal{E}), \mathcal{T}_c)$ 是 L^0 -准桶的.

证明 由于 $L_{\mathcal{F}}^p(\mathcal{E})$ 是 $\mathcal{T}_c$ -完备的, 且有可数连接性质, 那么由推论 3.27 立即得证. □

4 L^0 -准桶模中的连续性和次可微性定理

我们在局部 L^0 -凸模框架下陈述本节的结果, 因为它们的证明不必依赖于 L^0 -半范数族. L^0 -桶模中的连续性与次可微性定理已经在文献 [2] 中被证明. 如同文献 [2] 表明的那样, 随机情形下的证明与相应的经典情形非常类似. 因此, 本节集中于局部 L^0 -凸模上的拓扑结构与层次结构之间关系的讨论.

在本节中, 一个局部 L^0 -凸模 (拓扑 L^0 -模) 是指一个局部 L^0 -凸 $L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ -模 (相应地, 拓扑 $L^0(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ -模).

为了叙述我们的主要结果, 首先回忆下列知识: 设 E 是一个 $L^0(\mathcal{F})$ -模, f 是一个从 E 到 $\bar{L}^0(\mathcal{F})$ 的函数. f 的有效域记为

$$\text{dom}(f) := \{x \in E \mid \text{在 } \Omega \text{ 上 } f(x) < +\infty\}.$$

f 的上方图记为

$$\text{epi}(f) := \{(x, r) \in E \times L^0(\mathcal{F}) \mid f(x) \leq r\}.$$

f 称为真的, 如果 $\text{dom}(f) \neq \emptyset$ 且在 Ω 上 $f(x) > -\infty$. f 称为 L^0 -凸的, 如果

$$f(\xi x + (1 - \xi)y) \leq \xi f(x) + (1 - \xi)f(y)$$

对所有 $x, y \in E$ 及满足 $0 \leq \xi \leq 1$ 的 $\xi \in L_+^0(\mathcal{F})$ 成立, 这里采用下列约定: $0 \cdot (\pm\infty) = 0$, $+\infty \pm (\pm\infty) = +\infty$. $f : E \rightarrow \bar{L}^0(\mathcal{F})$ 称为局部的 (或有局部性质), 如果 $\tilde{I}_A f(x) = \tilde{I}_A f(\tilde{I}_A x)$, $\forall x \in E, A \in \mathcal{F}$. 在文献 [20] 中证明了一个 L^0 -凸函数是局部的.

定义 4.1 ^[2] 设 $(E, \mathcal{T})$ 是一个局部 L^0 -凸模且 $f : E \rightarrow \bar{L}^0(\mathcal{F})$ 是一个真 L^0 -凸函数. f 称为在 $x \in \text{dom}(f)$ 是次可微的, 如果存在 $u \in (E, \mathcal{T})^*$ 使得 $u(y - x) \leq f(y) - f(x)$, $\forall y \in E$, 这时, u 称为 f 在 x 的次梯度. f 在 x 的次梯度全体组成的集合记为 $\partial f(x)$.

下面给出我们的主要结果.

定理 4.2 设 $(E, \mathcal{T})$ 是一个实 L^0 -准桶模使得 E 有可数连接性质, 那么一个真下半连续 L^0 -凸函数 $f: E \rightarrow \bar{L}^0(\mathcal{F})$ 在 $\text{dom}(f)$ 的内部 $\text{Int}(\text{dom}(f))$ 上是连续的, 即 f 是从 $(\text{Int}(\text{dom}(f)), \mathcal{T})$ 到 $(L^0(\mathcal{F}), \mathcal{T}_c)$ 连续的.

定理 4.3 设 $(E, \mathcal{T})$ 是一个实 L^0 -准桶模使得 E 有可数连接性质, 那么对一个真下半连续 L^0 -凸函数 $f: E \rightarrow \bar{L}^0(\mathcal{F})$, $\partial f(x) \neq \emptyset$ 对所有的 $x \in \text{Int}(\text{dom}(f))$ 成立.

为了证明定理 4.2, 我们需要下述已知的引理.

引理 4.4 [2] 设 E 是一个拓扑 L^0 -模, $x_0 \in E$. 如果一个真 L^0 -凸函数 $f: E \rightarrow \bar{L}^0(\mathcal{F})$ 在 x_0 的某个邻域是有上界的, 那么 f 在 x_0 是连续的.

引理 4.5 [2] 设 E 是一个拓扑 L^0 -模, $f: E \rightarrow \bar{L}^0(\mathcal{F})$ 是一个真 L^0 -凸函数, 那么下列表述是等价的,

- (1) 存在一个非空开集 $O \subset E$, 在它上面 f 有上界;
- (2) $\text{Int}(\text{dom}(f)) \neq \emptyset$ 且 f 在 $\text{Int}(\text{dom}(f))$ 上是连续的.

引理 4.6 [2] 设 E 是一个拓扑 L^0 -模且 $x \in E$, 那么每个真 L^0 -凸函数 $f: \text{Span}_{L^0}(x) \rightarrow \bar{L}^0(\mathcal{F})$ 在 $\text{Int}(\text{dom}(f))$ 上是连续的, 其中 $\text{Span}_{L^0}(x)$ 是由 x 张成的 L^0 -模并被赋予相对拓扑.

定理 4.2 的证明 假设存在 $x_0 \in \text{Int}(\text{dom}(f))$. 由平移, 我们可以设 $x_0 = 0$, 进一步取 $Y_0 \in L^0(\mathcal{F})$ 使得在 Ω 上 $f(0) < Y_0$. 由于 f 是下半连续的, 集 $C := \{x \in E \mid f(x) \leq Y_0\}$ 是闭的. 进一步, 对所有 $x \in E$, 网 $\{\frac{x}{Y} : Y \in L^0_{++}(\mathcal{F})\}$ 收敛于 θ . 由引理 4.6, f 到 $\text{Span}_{L^0}(x)$ 的限制在 θ 点是连续的, 因此, 对足够大的 Y , 在 Ω 上 $f(\frac{x}{Y}) < Y_0$, 这意味着 C 是 L^0 -吸收的. 因此, $C \cap (-C)$ 是一个 L^0 -桶. 由于 E 有可数连接性质且 f 有局部性质, 容易观察到 $C \cap (-C)$ 是一个具有可数连接性质的 L^0 -桶, 依次地, 它是 $\theta \in E$ 的一个邻域, 因此, 由引理 4.5 f 在 $\text{Int}(\text{dom}(f))$ 上连续. $\square$

为证明定理 4.3, 我们需要下列三个引理连同定理 4.10.

下列引理 4.7 是文献 [6, 引理 3.17] 的一种轻微的推广, 证明相同, 所以略去.

引理 4.7 设 $(E, \mathcal{T})$ 是一个局部 L^0 -凸 $L^0(\mathcal{F}, K)$ -模, $A \in \mathcal{F}$ 且 $P(A) > 0$. 如果 G 和 M 分别是 E 的一个开集和闭集, 使得 $\tilde{I}_A G + \tilde{I}_{A^c} G \subset G$ 且 $\tilde{I}_A M + \tilde{I}_{A^c} M \subset M$, 那么 $\tilde{I}_A G$ 在 $\tilde{I}_A E$ 中是相对开的, $\tilde{I}_A M$ 在 $\tilde{I}_A E$ 中是相对闭的.

从引理 4.7 人们可以看到 $(\tilde{I}_A E, \mathcal{T}|_{\tilde{I}_A E})$ 仍然是一个局部 L^0 -凸 $L^0(\mathcal{F}_A, K)$ -模, 其中 $\mathcal{F}_A = A \cap \mathcal{F} := \{A \cap B \mid B \in \mathcal{F}\}$ 是概率空间 $(A, \mathcal{F}_A, P(\cdot|A))$ 的 σ -代数.

引理 4.8 设 $(E, \mathcal{T})$ 是局部 L^0 -凸模, $A \in \mathcal{F}$, $P(A) > 0$, $f: E \rightarrow \bar{L}^0(\mathcal{F})$ 是一个真 L^0 -凸函数. 如果我们定义 $f_A: \tilde{I}_A E \rightarrow \tilde{I}_A \bar{L}^0(\mathcal{F})$ 为 $f_A(\tilde{I}_A x) = \tilde{I}_A f(\tilde{I}_A x)$, $\forall x \in E$, 那么我们有

- (1) 对所有 $x \in \text{dom}(f)$, $\tilde{I}_A(x, f(x)) \in \partial(\text{epi}(f_A))$, 其中 $\partial(\text{epi}(f_A))$ 表示 $\text{epi}(f_A)$ 在

$$(\tilde{I}_A E, \mathcal{T}|_{\tilde{I}_A E}) \times (\tilde{I}_A L^0(\mathcal{F}), \mathcal{T}_c|_{\tilde{I}_A L^0(\mathcal{F})})$$

中的边界, 这里, 让我们回忆 $\mathcal{T}_c$ 是 $L^0(\mathcal{F})$ 上由 $|\cdot|$ 诱导的局部 L^0 -凸拓扑;

- (2) 对所有 $x \in \text{dom}(f)$, $\tilde{I}_A(x, f(x)) \notin \tilde{I}_A(\text{Int}(\text{epi}(f)))$.

证明 (1) 容易明白 $(x, f(x)) \in \partial(\text{epi}(f))$, $\forall x \in \text{dom}(f)$. 由 f 的局部性质,

$$\tilde{I}_A(x, f(x)) = (\tilde{I}_A x, \tilde{I}_A f(x)) = (\tilde{I}_A x, f_A(\tilde{I}_A x)), \quad \forall x \in E.$$

因此, 如果我们在 $(\tilde{I}_A E, \mathcal{T}|_{\tilde{I}_A E})$ 中考虑相应的问题, 那么我们得到

$$\tilde{I}_A(x, f(x)) = (\tilde{I}_A x, f_A(\tilde{I}_A x)) \in \partial(\text{epi}(f_A)), \quad \forall x \in \text{dom}(f).$$

(2) 由上面的 (1) 当然有 $\tilde{I}_A(x, f(x)) \notin \text{Int}_A(\text{epi}(f_A))$, 其中 $\text{Int}_A(\text{epi}(f_A))$ 表示 $\text{epi}(f_A)$ 在

$$(\tilde{I}_A E, \mathcal{T} |_{\tilde{I}_A E}) \times (\tilde{I}_A L^0(\mathcal{F}), \mathcal{T}_c |_{\tilde{I}_A L^0(\mathcal{F})})$$

中的内部. 显然, $\text{epi}(f_A) = \tilde{I}_A(\text{epi}(f))$. 由引理 4.7, $\tilde{I}_A(\text{Int}(\text{epi}(f)))$ 在

$$(\tilde{I}_A E, \mathcal{T} |_{\tilde{I}_A E}) \times (\tilde{I}_A L^0(\mathcal{F}), \mathcal{T}_c |_{\tilde{I}_A L^0(\mathcal{F})})$$

中是一个开集, 因此,

$$\text{Int}_A(\text{epi}(f_A)) = \text{Int}_A(\tilde{I}_A \text{epi}(f)) \supset \tilde{I}_A(\text{Int}(\text{epi}(f))),$$

这意味着

$$\tilde{I}_A(x, f(x)) \notin \tilde{I}_A(\text{Int}(\text{epi}(f))), \forall x \in \text{dom}(f).$$

引理证毕. □

下面引理 4.9 的证明与文献 [2, 引理 3.14] 的证明相同, 故省略.

引理 4.9 设 $(E, \mathcal{T})$ 是局部 L^0 - 凸模, $f : E \rightarrow \bar{L}^0(\mathcal{F})$ 是一个真下半连续 L^0 - 凸函数, 那么 $\text{Int}(\text{epi}(f)) \neq \emptyset$ 蕴含 $\text{Int}(\text{dom}(f)) \neq \emptyset$. 进一步, 如果 $(E, \mathcal{T})$ 还是 L^0 - 准桶的, 使得 E 有可数连接性质, 那么 $\text{Int}(\text{dom}(f)) \neq \emptyset$ 当且仅当 $\text{Int}(\text{epi}(f)) \neq \emptyset$.

定理 4.10 ^[2] 设 $(E, \mathcal{T})$ 是一个 Hausdorff 局部 L^0 - 凸 $L^0(\mathcal{F}, K)$ - 模. M 和 G 是 E 中两个非空 L^0 - 凸子集, G 是开的. 如果 $\tilde{I}_A M \cap \tilde{I}_A G = \emptyset$, 对所有满足 $P(A) > 0$ 的 $A \in \mathcal{F}$ 成立, 那么存在 $f \in (E, \mathcal{T})^*$ 使得在 Ω 上,

$$\text{Ref}(y) < \text{Ref}(z), \quad \forall y \in G, \quad z \in M.$$

定理 4.3 的证明 设 $x_0 \in \text{Int}(\text{dom}(f))$. 用定理 4.10 从 $\text{Int}(\text{epi}(f))$ 分离 $(x_0, f(x_0))$. 由引理 4.9, $\text{Int}(\text{epi}(f))$ 是非空的, $(x_0, f(x_0)) \in \partial(\text{epi}(f))$ 且

$$\tilde{I}_A(x_0, f(x_0)) \cap \tilde{I}_A \text{Int}(\text{epi}(f)) = \emptyset,$$

$\forall A \in \mathcal{F}, P(A) > 0$. 因此, 存在 $g_1 \in (E, \mathcal{T})^*$ 和 $g_2 \in (L^0(\mathcal{F}), \mathcal{T}_c)^*$ (事实上, $(L^0(\mathcal{F}), \mathcal{T}_c)^* = L^0(\mathcal{F})$) 使得在 Ω 上,

$$g_1(x) + g_2(y) < g_1(x_0) + g_2(f(x_0)), \quad \forall (x, y) \in \text{Int}(\text{epi}(f)).$$

由 $g_2(y) = yg_2(1)$ 得出在 Ω 上, $g_2(1) < 0$. 我们将证明

$$\frac{-g_1}{g_2(1)} \in \partial f(x_0).$$

为此设 $x \in E, A = [f(x) = +\infty], \tilde{x} = I_A x_0 + I_{A^c} x$. 那么, $\tilde{x} \in \text{dom}(f)$, 从而, $(\tilde{x}, f(\tilde{x})) \in \partial(\text{epi}(f))$. 因此存在一个收敛于 $(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$ 的网 $(x_\alpha, y_\alpha) \subset \text{Int}(\text{epi}(f))$, 满足

$$(1) \quad \Omega \text{ 上 } g_1(x_\alpha) + y_\alpha g_2(1) < g_1(x_0) + g_2(f(x_0)), \quad \forall \alpha.$$

由于 $g_1 \in (E, \mathcal{T})^*$, 我们可以在 (1) 中取极限, 得到

$$\frac{-g_1(\tilde{x} - x_0)}{g_2(1)} \leq f(\tilde{x}) - f(x_0).$$

最后, 从 f 和 g_1 的局部性质, 我们得到

$$\frac{-g_1(x - x_0)}{g_2(1)} \leq f(x) - f(x_0).$$

又由 $x \in E$ 的任意性, 我们证得 $\frac{-g_1}{g_2(1)}$ 确实是 f 在 x_0 的次梯度. $\square$

如果定理 4.2 和 4.3 中的假设 “ $(E, \mathcal{T})$ 是一个 L^0 -准桶模使得 E 有可数连接性质” 被换成 “ $(E, \mathcal{T})$ 是 L^0 -桶”, 那么定理 4.2 和 4.3 分别变成文献 [2] 的命题 3.5 和定理 3.7, 并且定理 4.2 和 4.3 的证明也非常类似于文献 [2] 中命题 3.5 和定理 3.7 的证明, 不同之处在于: 定理 4.2 和 4.3 的证明是基于 L^0 -准桶模的概念, 至少定理 4.2 和 4.3 对具有可数连接性质的 L^0 -准桶 RLC 模有意义, 因为我们在定理 3.26 中给出了这种 RLC 模的特征. 进一步, 推论 3.28 表明, 作为定理 4.2 和 4.3 各自的推论, 下面的推论 4.11 和 4.12 对金融应用是足够的. 关于它们的证明, 读者只需注意: 对一个 $\mathbb{R}$ 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的随机局部凸模 $(E, \mathcal{P})$, $(E, \mathcal{T}_c)$ 是 Hausdorff 局部 L^0 -凸模, 其中 $\mathcal{T}_c$ 是由 $\mathcal{P}$ 诱导的.

推论 4.11 设 $(E, \mathcal{P})$ 是 $\mathbb{R}$ 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 L^0 -准桶的随机局部凸模, 使得 E 有可数连接性质, 那么一个真 $\mathcal{T}_c$ -下半连续 L^0 -凸函数 $f: E \rightarrow \bar{L}^0(\mathcal{F})$ 在 $\text{dom}(f)$ 的 $\mathcal{T}_c$ -内部 $\text{Int}(\text{dom}(f))$ 上连续, 即 f 从 $(\text{Int}(\text{dom}(f)), \mathcal{T}_c)$ 到 $(L^0(\mathcal{F}), \mathcal{T}_c)$ 连续.

推论 4.12 设 $(E, \mathcal{P})$ 是 $\mathbb{R}$ 上以 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为基的 L^0 -准桶的随机局部凸模, 使得 E 有可数连接性质, 那么对一个真的 $\mathcal{T}_c$ -下半连续 L^0 -凸函数 $f: E \rightarrow \bar{L}^0(\mathcal{F})$, $\partial f(x) \neq \emptyset, \forall x \in \text{Int}(\text{dom}(f))$, 其中 $\text{Int}(\text{dom}(f))$ 如推论 4.11 所述.

参考文献

- 1 郭铁信, 赵世恩, 曾小林. 随机凸分析 (I): 随机局部凸模中的分离性与 Fenchel-Moreau 对偶性. 中国科学: 数学, 2015, 待发表
- 2 Filipović D, Kupper M, Vogelpoth N. Separation and duality in locally L^0 -convex modules. J Funct Anal, 2009, 256: 3996–4029
- 3 Guo T X, Zhao S E, Zeng X L. The relations among the three kinds of conditional risk measures. Sci China Math, 2014, 57: 1753–1764
- 4 Guo T X, Zhao S E, Zeng X L. On random convex analysis—the analytic foundation of the module approach to conditional risk measures. ArXiv:1210.1848, 2012
- 5 Dunford N, Schwartz J T. Linear Operators (I). New York: Interscience, 1957
- 6 Guo T X. Relations between some basic results derived from two kinds of topologies for a random locally convex module. J Funct Anal, 2010, 258: 3024–3047
- 7 郭铁信. 概率度量空间理论及其对随机泛函分析的应用. 硕士学位论文. 西安: 西安交通大学, 1989
- 8 郭铁信. 随机度量理论及其应用. 博士学位论文. 西安: 西安交通大学, 1992
- 9 Guo T X. Some basic theories of random normed linear spaces and random inner product spaces. Acta Anal Funct Appl, 1999, 1: 160–184
- 10 Guo T X. Module homomorphisms on random normed modules. Chinese Northeast Math J, 1996, 12: 102–114
- 11 Guo T X. Survey of recent developments of random metric theory and its applications in China (II). Acta Anal Funct Appl, 2001, 3: 208–230
- 12 Guo T X, Peng S L. A characterization for an $L(\mu, K)$ -topological module to admit enough canonical module homomorphisms. J Math Anal Appl, 2001, 263: 580–599
- 13 Guo T X. On some basic theorems of continuous module homomorphisms between random normed modules. J Funct Spaces Appl, 2013, Article ID: 989102
- 14 Guo T X. Extension theorems of continuous random linear operators on random domains. J Math Anal Appl, 1995, 193: 15–27
- 15 Guo T X, Chen X X. Random duality. Sci China Ser A, 2009, 52: 2084–2098
- 16 Schweizer B, Sklar A. Probabilistic Metric Spaces. New York: Elsevier/North-Holland, 1983
- 17 夏道行, 杨亚立. 线性拓扑空间引论. 上海: 上海科学技术出版社, 1986
- 18 郭铁信. 随机对偶空间. 厦门大学学报 (自然科学版), 1997, 36: 167–170
- 19 Guo T X. The relation of Banach-Alaoglu theorem and Banach-Bourbaki-Kakutani-Šmulian theorem in complete random normed modules to stratification structure. Sci China Ser A, 2008, 51: 1651–1663
- 20 Filipović D, Kupper M, Vogelpoth N. Approaches to conditional risk. SIAM J Financ Math, 2012, 3: 402–432

Random convex analysis (II): Continuity and subdifferentiability theorems in L^0 -pre-barreled random locally convex modules

GUO TieXin, ZHAO ShiEn & ZENG XiaoLin

Abstract In this paper, we continue to study random convex analysis. First, we introduce the notion of an L^0 -pre-barreled module. Then, we develop the theory of random duality under the framework of a random locally convex module endowed with the locally L^0 -convex topology in order to establish a characterization for a random locally convex module to be L^0 -pre-barreled, in particular we prove that the model space $L^p_{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$ employed in the module approach to conditional risk measures is L^0 -pre-barreled, which forms the most difficult part of this paper. Finally, we prove the continuity and subdifferentiability theorems for a proper lower semicontinuous L^0 -convex function on an L^0 -pre-barreled random locally convex module. So the principal results of this paper may be well suited to the study of continuity and subdifferentiability for L^0 -convex conditional risk measures.

Keywords random locally convex module, locally L^0 -convex topology, random conjugate spaces, proper L^0 -convex lower semicontinuous function, continuity, subdifferentiability

MSC(2010) 46A08, 46A20, 46H25, 46T20

doi: 10.1360/N012015-00042