Lorentz 球面 S_1^{n+1} 中的 Lorentz 等参超曲面

献给胡和生教授 90 华诞

黎镇琦

南昌大学理学院数学系, 南昌 330031

E-mail: zhenqili@263.net

收稿日期: 2017-09-01; 接受日期: 2018-01-15; 网络出版日期: 2018-04-23

国家自然科学基金 (批准号: 11361041 和 11761049) 资助项目

摘要 对 Riemann 空间型中的等参超曲面有很多研究文献, 至今已有近乎完美的结果. 20 世纪后期, 对 Lorentz 空间 $\mathbb{R}_1^{n+1}$ 和 Lorentz 双曲空间 H_1^{n+1} 中的 Lorentz 等参超曲面前人已有完全分类. 继续本文作者前面的工作, 本文研究 Lorentz 球面 S_1^{n+1} 中的 Lorentz 等参超曲面, 给出了所有种类的 Lorentz 等参超曲面的完全分类和解析表达式.

关键词 等参超曲面 Lorentz 球面 Lorentz 等参超曲面

MSC (2010) 主题分类 53C50, 53B25

1 引言

对等参超曲面的研究最早可追溯到 20 世纪 30 年代. Cartan 首先研究了 Riemann 空间型中的等参超曲面, 解决了欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 和双曲空间 H^{n+1} 中等参超曲面的分类问题, 并且对球面 S^{n+1} 中互异主曲率个数 $g = 1, 2, 3$ 的等参超曲面给出了完美的结果 (参见文献 [1, 2]). 自从 Münzner [3] 证明了 S^{n+1} 中的等参超曲面互异主曲率个数只有 $g = 1, 2, 3, 4, 6$ 这几种情形, 这方面的研究文献非常丰富, S^{n+1} 中等参超曲面的分类问题差不多已经解决.

带有不定度量 g 的微分流形 M_ν^n 称为半 Riemann 流形, 其中 n 是流形的维数, 指标 ν 为度量 g 的负惯性指数 [4]. 特别地, 当 $\nu = 1$ 时称为 Lorentz 流形. 1981 年, Nomizu 研究了 Lorentz 空间型中的类空等参超曲面 [5]. 1984 年, Hahn [6] 把等参超曲面的概念推广到半 Riemann 空间型中的 Lorentz 超曲面. 1985 年, Magid [7] 定义了 Lorentz 空间 $\mathbb{R}_1^{n+1}$ 中的 Lorentz 等参超曲面的概念. 如果 $\mathbb{R}_1^{n+1}$ 中的浸入超曲面 M 的诱导度量是 Lorentz 度量, 并且形算子 $\mathbb{A}$ (即 Weigarten 变换) 的最小多项式在每一点都相同, 则称 M 是 Lorentz 等参超曲面.

英文引用格式: Li Z Q. Lorentzian isoparametric hypersurfaces in the Lorentzian sphere S_1^{n+1} (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 725–756, doi: 10.1360/N012017-00195

虽然像欧氏空间中的超曲面一样, 形算子 $\mathbb{A}: TM \rightarrow TM$ 关于诱导度量是对称的, 但是由于度量不是正定的, 一般来说不一定能够对角化. Magid^[7] 在他的论文中指出, 可以选择 TM 的局部标架 $\{X_1, \dots, X_n\}$, 使得形算子 $\mathbb{A}$ 在此标架下的矩阵具有下列 4 种形式之一:

$$\begin{aligned} \text{I. } & \begin{pmatrix} a & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}, & \text{II. } & \begin{pmatrix} a & 0 & & \\ \pm 1 & a & & \\ & & a_3 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{pmatrix}, \\ \text{III. } & \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & & \\ 0 & a & 1 & & \\ -1 & 0 & a & & \\ & & & a_4 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_n \end{pmatrix}, & \text{IV. } & \begin{pmatrix} a & b & & & \\ -b & a & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

其中 $b \neq 0$. 对应于 (1.1) 中 4 种矩阵形式, 相应的 Lorentz 等参超曲面分别称为 I、II、III 和 IV 型的. Magid 证明了 $\mathbb{R}_1^{n+1}$ 中不存在 IV 型的 Lorentz 等参超曲面; 其余三种类型至多有两个互异的主曲率, 并给出了完全分类和解析表达式. 后来, 1999 年, Xiao^[8] 系统研究了 Lorentz 双曲空间 H_1^{n+1} 中的 Lorentz 等参超曲面, 给出了全部四种类型的 Lorentz 等参超曲面的完全分类.

像 Riemann 空间型中一样, Lorentz 空间型中还剩下 Lorentz 球面 S_1^{n+1} 的 Lorentz 等参超曲面没有解决分类问题. 从 2004 年开始, 本文作者和他的学生们一起对 Lorentz 球面 S_1^{n+1} 的 Lorentz 等参超曲面作了大量的研究, 此前所得的成果可以在文献 [9] 中找到. 下面简单介绍一下文献 [9] 中已有的结果.

Lorentz 空间 $\mathbb{R}_1^{n+2}$ 是带有如下标准 Lorentz 内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 的实向量空间 $\mathbb{R}^{n+2}$:

$$\langle u, v \rangle = -u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_{n+2} v_{n+2}, \quad (1.2)$$

其中 $u = (u_1, \dots, u_{n+2}), v = (v_1, \dots, v_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}$.

设 $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+2}\}$ 是 $\mathbb{R}_1^{n+2}$ 的基. 如果这些基向量是两两正交的单位向量, 则称 $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+2}\}$ 是 $\mathbb{R}_1^{n+2}$ 的么正基. 为了与 (1.2) 一致, 约定 ε_1 是类时的. 如果

$$\langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle = \langle \varepsilon_2, \varepsilon_2 \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = -1, \quad \langle \varepsilon_1, \varepsilon_A \rangle = \langle \varepsilon_2, \varepsilon_A \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon_A, \varepsilon_B \rangle = \delta_{AB} \quad (A, B \geq 3),$$

则称 $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+2}\}$ 是 $\mathbb{R}_1^{n+2}$ 的伪么正基. 类似地有 Lorentz 流形 M 的切丛 TM 和余切丛 T^*M 的么正标架和伪么正标架的概念.

Lorentz 球面 S_1^{n+1} 由 $\mathbb{R}_1^{n+2}$ 中的全体单位类空向量构成, 即

$$S_1^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+2} \mid \langle x, x \rangle = 1\}.$$

若 (M, g) 是 n 维 Lorentz 流形, $x: M \rightarrow S_1^{n+1} \subset \mathbb{R}_1^{n+2}$ 是等距浸入, 则称 $x(M)$ 是 S_1^{n+1} 中的 Lorentz 超曲面. 向量函数 $x: M \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+2}$ 可以看作平凡丛 $\mathbb{R}_1^{n+2} = M \times \mathbb{R}_1^{n+2}$ 的整体截面. 设 e_{n+1} 是 $x(M)$ 的单位法向量场. 为了方便, 本文中, 形算子 $\mathbb{A}: TM \rightarrow TM$ 定义为 $dx \circ \mathbb{A} = de_{n+1}$, 即

$$dx(\mathbb{A}X) = de_{n+1}(X) = X(e_{n+1}), \quad \forall X \in TM. \quad (1.3)$$

这与通常的定义差一个负号. 像 Riemann 流形中一样, 形算子 $\mathbb{A}$ 关于度量 g 是对称的.

文献 [9] 研究了 S_1^{n+1} 中的 I、II 和 IV 型 Lorentz 等参超曲面, 得到了下列结果.

定理 1.1 在 S_1^{n+1} 中不存在 IV 型 Lorentz 等参超曲面.

定理 1.2 S_1^{n+1} 中的 I 型和 II 型 Lorentz 等参超曲面最多有两个互异的主曲率 (即 $\mathbb{A}$ 的特征值). 若有两个互异的主曲率 a 和 b , 则 $ab = -1$.

将 $\mathbb{R}_1^{n+2}$ 的等距变换群 $O(1, n+1)$ 中的元素称为 Lorentz 运动. 分别用 $S_1^m(r)$ 和 $S^m(r)$ 表示半径为 r 的 m 维 Lorentz 球面和欧氏球面.

定理 1.3 I 型 Lorentz 等参超曲面是下列两种超曲面 (或其开子集) 之一, 至多相差一个 $\mathbb{R}_1^{n+2}$ 中的 Lorentz 运动:

- (1) 全脐超曲面 $S_1^n(\cos \theta)$, 其中常数 $\theta \in [0, \pi/2)$: $\{x = (x_1, \dots, x_{n+2}) \in S_1^{n+1} \mid x_{n+2} = \sin \theta\}$;
- (2) Lorentz 球面与欧氏球面的乘积 $S_1^p(\cos \theta) \times S^{n-p}(\sin \theta)$, 其中常数 $\theta \in (0, \pi/2)$:

$$\{x = (\cos \theta y, \sin \theta z) \mid (y, z) \in S_1^p \times S^{n-p} \subset \mathbb{R}_1^{p+1} \times \mathbb{R}^{n-p+1} = \mathbb{R}_1^{n+2}\}.$$

II 型 Lorentz 等参超曲面的情况比较复杂, 依赖于 n 个定义在 (有限或无限) 区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的一元函数 $C_1, \dots, C_n$ 的选择. 根据定理 1.2 可知, $\mathbb{A}$ 的最小多项式为 $(\lambda - a)^2$, 或 $(\lambda - a)^2(\lambda + a^{-1})$. 为了方便, 前一种情形称为全脐超曲面. 后一种情形, 当主曲率 a 的重数 p 等于 (大于) 2 时, 称为半脐 (非脐) 超曲面.

设 $x(M)$ 是 Lorentz 球面 S_1^{n+1} 中的 Lorentz 等参超曲面. 不妨设 M 是可定向的, 单位法向量 e_{n+1} 是 M 上的 $\mathbb{R}_1^{n+2}$ -值函数. 对固定的 $\theta \in [0, 2\pi]$, M 上的 $\mathbb{R}_1^{n+2}$ -值函数

$$x_\theta = \cos \theta x + \sin \theta e_{n+1} \quad (1.4)$$

定义了映射 $x_\theta: M \rightarrow S_1^{n+1}$. 当 x_θ 是浸入时, 将 M_θ 称为 $M_0 = x(M)$ 的平行超曲面.

文献 [9] 证明了, 对区间 I 上任意给定的函数 $C_1(t), \dots, C_n(t)$, 存在 $\mathbb{R}_1^{n+2}$ 的单参数伪么正标架 $\{E_1(t), E_2(t), E_3(t), \dots, E_{n+2}(t)\}$, 满足下面的常微分方程组:

$$\begin{cases} E'_1 = C_1 E_3 + C_2 E_4 + \dots + C_{n-1} E_{n+1} + C_n E_{n+2}, \\ E'_2 = E_3, \quad E'_3 = E_1 + C_1 E_2, \quad E'_4 = C_2 E_2, \\ \vdots \\ E'_{n+1} = C_{n-1} E_2, \quad E'_{n+2} = C_n E_2. \end{cases} \quad (1.5)$$

设 $\{E_1(t), E_2(t), E_3(t), \dots, E_{n+2}(t)\}$ 是定义在区间 I 上的单参数伪么正标架, 满足 (1.5), 其中 $C_n \neq 0$. 再设 $y = (y_3, \dots, y_{n+1})$ 是欧氏球面 $S^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ 上的点,

$$S_+^{n-2} = \{y \in S^{n-2} \mid y_3 > 0\}, \quad \Omega = I \times \mathbb{R} \times S_+^{n-2}.$$

定义映射 $x: \Omega \rightarrow S_1^{n+1}: (t, v, y) \mapsto x(t, v, y)$, 其中

$$x(t, v, y) = v E_2(t) + y_3 E_3(t) + \dots + y_{n+1} E_{n+1}(t). \quad (1.6)$$

定理 1.4 由 (1.6) 定义的映射是一个浸入, 它的象 $M_0 = x(\Omega)$ 是 II 型全脐 Lorentz 等参超曲面, 形算子 $\mathbb{A}$ 的最小多项式为 λ^2 , 即主曲率 $a = 0$. 反过来, II 型全脐 Lorentz 等参超曲面必定是 M_0 (或其开子集) 的平行超曲面, 至多相差一个 $\mathbb{R}_1^{n+2}$ 中的 Lorentz 运动.

注 1.5 (1) 因为 M_0 的单位法向量是 $E_{n+2}(t)$, 任何 II 型全脐 Lorentz 等参超曲面 M_θ 可以表达成

$$x_\theta(t, v, y) = \cos \theta x(t, v, y) + \sin \theta E_{n+2}(t), \quad \cos \theta \neq 0. \quad (1.7)$$

(2) 如果 (1.5) 中的 $C_n = 0$, 则 $dE_{n+2} = 0$, $M_0 = S_1^n$ 是 I 型的.

同样, 设 $\{E_1(t), E_2(t), E_3(t), \dots, E_{n+2}(t)\}$ 满足 (1.5), 其中 $C_2, \dots, C_n$ 不全为 0, $z = (z_4, \dots, z_{n+2})$ 是欧氏球面 S^{n-2} 上的点. 令 $\Omega = I \times \mathbb{R} \times S^{n-2}$. 定义映射 $x: \Omega \rightarrow S_1^{n+1}: (t, v, z) \mapsto x(t, v, z)$, 其中

$$x(t, v, z) = \frac{1}{\sqrt{2}}[vE_2(t) + E_3(t) + z_4E_4(t) + \dots + z_{n+2}E_{n+2}(t)]. \quad (1.8)$$

定理 1.6 由 (1.8) 定义的映射是一个浸入. 除了一个零测度集 (欧氏测度)

$$K = \{(t, v, z) \in \Omega \mid z_4C_2(t) + \dots + z_{n+2}C_n(t) = 0\}$$

之外, 它的象 $M_0 = x(\Omega \setminus K)$ 是 II 型半脐 Lorentz 等参超曲面, $\mathbb{A}$ 的最小多项式为 $(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$. 反过来, II 型半脐 Lorentz 等参超曲面必定是 M_0 (或其开子集) 的平行超曲面, 至多相差一个 $\mathbb{R}_1^{n+2}$ 中的 Lorentz 运动.

因为 M_0 的单位法向量

$$\nu = \nu(t, v, z) = \frac{1}{\sqrt{2}}[vE_2(t) + E_3(t)] - \frac{1}{\sqrt{2}}[z_4E_4(t) + \dots + z_{n+2}E_{n+2}(t)],$$

所以, 任何 II 型半脐 Lorentz 等参超曲面 M_θ 可以表达成

$$\begin{aligned} x_\theta(t, v, z) &= \cos \theta x(t, v, z) + \sin \theta \nu(t, v, z) \\ &= \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) [vE_2(t) + E_3(t)] - \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \sum_{\alpha=4}^{n+2} z_\alpha E_\alpha(t), \quad \cos 2\theta \neq 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

最后, 考虑非脐的情形. 设 $2 < p < n$, $\{E_1(t), E_2(t), E_3(t), \dots, E_{n+2}(t)\}$ 满足 (1.5), 其中 $C_p, \dots, C_n$ 不全为 0. 再设

$$y = (y_3, \dots, y_{p+1}) \in S_+^{p-2}, \quad z = (z_{p+2}, \dots, z_{n+2}) \in S^{n-p}.$$

令 $\Omega = I \times \mathbb{R} \times S_+^{p-2} \times S^{n-p}$. 定义映射 $x: \Omega \rightarrow S_1^{n+1}: (t, v, y, z) \mapsto x(t, v, y, z)$, 其中

$$x(t, v, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[vE_2(t) + \sum_{i=3}^{p+1} y_i E_i(t) + \sum_{\alpha=p+2}^{n+2} z_\alpha E_\alpha(t) \right]. \quad (1.10)$$

定理 1.7 由 (1.10) 定义的映射是一个浸入. 除了一个零测度集

$$K = \{(t, v, z) \in \Omega \mid z_{p+2}C_p(t) + \dots + z_{n+2}C_n(t) = 0\}$$

之外, 它的象 $M_0 = x(\Omega \setminus K)$ 是 II 型非脐 Lorentz 等参超曲面, $\mathbb{A}$ 的最小多项式为 $(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$, 主曲率 $a = 1$ 的重数为 p . 反过来, II 型非脐 Lorentz 等参超曲面必定是 M_0 (或其开子集) 的平行超曲面, 至多相差一个 $\mathbb{R}_1^{n+2}$ 中的 Lorentz 运动.

注 1.8 (1) 此时, 因为 M_0 的单位法向量

$$\nu = \nu(t, v, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[vE_2(t) + \sum_{i=3}^{p+1} y_i E_i(t) - \sum_{\alpha=p+2}^{n+2} z_\alpha E_\alpha(t) \right],$$

任何 II 型非脐 Lorentz 等参超曲面 M_θ 可以表达成

$$\begin{aligned} x_\theta(t, v, y, z) &= \cos \theta x(t, v, y, z) + \sin \theta \nu(t, v, y, z) \\ &= \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \left[vE_2(t) + \sum_{i=3}^{p+1} y_i E_i(t) \right] \\ &\quad - \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \sum_{\alpha=p+2}^{n+2} z_\alpha E_\alpha(t), \quad \cos 2\theta \neq 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

(2) 在极端的情形下, 当 $p = n$ 时, (1.10) 就是 (1.7) 中 $\theta = \pi/4$ 的表达式, 即全脐超曲面; 当 $p = 2$ 时, (1.10) 就是 (1.8), 即半脐超曲面.

到目前为止, 还剩下 S_1^{n+1} 中的 III 型 Lorentz 等参超曲面的分类问题没有解决, 这正是本文的目的.

设 M 是 III 型 Lorentz 等参超曲面, 具有 g 个互异的主曲率. 在第 3 节证明了 $g \leq 2$; 且若 M 有两个互异的主曲率 a 和 b , 则 $ab = -1$ (定理 3.3). 这使得我们能够对 III 型 Lorentz 等参超曲面进行分类. 第 2 节证明了 M 的平行超曲面依然是 III 型的 (命题 2.3). 于是通过考虑平行超曲面, 可以设 M 的主曲率是 1 (当 M 全脐), 或 $1, -1$ (当 M 非全脐). 在后一种情形下, 设主曲率 1 的 (代数) 重数为 p . 当 $p = 3$ 时, 称 M 是半脐的; 当 $3 < p < n$ 时, 称 M 是非脐的.

受注 1.8(2) 的启发, 在第 4 节先给出非脐的 III 型 Lorentz 等参超曲面的存在性定理 (定理 4.2). 这样的超曲面有很多, 依赖于 $n+2+(p-2)(n+1-p)$ 个一元函数的选择 (引理 4.1). 然后得到全脐 ($p = n$) 和半脐 ($p = 3$) 情形下的存在性定理 (定理 4.4 和 4.6). 第 5 节先证明非脐的 III 型 Lorentz 等参超曲面的唯一性定理 (定理 5.4), 然后得到全脐和半脐情形下的唯一性定理 (定理 5.5 和 5.7).

最后在第 6 节给出这 3 种类型的超曲面的例子. 这些例子说明 S_1^{n+1} 中的 III 型 Lorentz 等参超曲面与欧氏球面 S^{n+1} 中的等参超曲面有着显著的不同之处.

2 S_1^{n+1} 中 III 型 Lorentz 等参超曲面的基本方程

本节和下一节指标的取值范围是

$$A, B, C, \dots = 1, 2, \dots, n, \quad i, j, k, \dots = 4, \dots, n, \quad \alpha = 2, \dots, g.$$

设 $x: M \rightarrow S_1^{n+1}$ 是浸入, $x(M)$ 是 S_1^{n+1} 中的 III 型 Lorentz 等参超曲面. 根据引理 2.1 可知, 形算子 $\mathbb{A}$ 的特征值为 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, 其中 $a_1 = a_2 = a_3 = a$ (见 (1.1)). 设 $\mathbb{A}$ 的最小多项式为

$$f(\lambda) = (\lambda - a)^3 (\lambda - a_{i_2}) \cdots (\lambda - a_{i_g}),$$

其中 $a = a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_g}$ 是 M 的 g 个互异主曲率, (代数) 重数分别是 $r_1, \dots, r_g$. 由 Lorentz 等参超曲面的定义知, 主曲率 a_A 是常数, 从而, 它们的重数也是常数.

文献 [9] 证明了下面的引理.

引理 2.1 设 $\mathbb{A}$ 是 Lorentz 空间 $\mathbb{R}_1^n$ 上的对称线性变换. 适当选取 $\mathbb{R}_1^n$ 的基 $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, 可使 $\mathbb{A}$ 在此基下的矩阵为 (1.1) 中的 4 种标准形式之一, 其中 III 是在伪么正基下的矩阵. $\mathbb{A}$ 是 III 型的, 当且仅当对任何么正基 $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ 都有 $(\mathbb{A} - a \text{id})^2 \varepsilon_1 \neq 0$, 其中 a 是矩阵 III 左上角的元素, id 为 $\mathbb{R}_1^n$ 上的恒同.

利用这个引理, 我们来证明下面的引理:

引理 2.2 对 M 上任一点 p_0 , 存在定义在 p_0 的邻域 U 上的伪么正标架 $\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$, 使得在 U 上 $\mathbb{A}$ 的矩阵具有 (1.1) 中 III 的形状, 即

$$\mathbb{A}X_1 = aX_1 - X_3, \quad \mathbb{A}X_2 = aX_2, \quad \mathbb{A}X_3 = aX_3 + X_2, \quad \mathbb{A}X_i = a_iX_i. \quad (2.1)$$

证明 对 $\alpha = 2, \dots, g$, 令

$$V_\alpha = \ker(\mathbb{A} - a_{i_\alpha} \text{id}) = \{X \in TM \mid (\mathbb{A} - a_{i_\alpha} \text{id})X = 0\}$$

是对应于 $\mathbb{A}$ 的特征值 a_{i_α} 的特征分布.

众所周知, 如果一个向量丛上的光滑自同态具有常数秩, 则它的核和象都是该向量丛的光滑子丛. 由于 $\mathbb{A}$ 是对称的, 并且 $f(\mathbb{A}) = 0$, 有关于 TM 的 Lorentz 度量的正交直和分解式

$$TM = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_g,$$

其中 $V_1 = \ker(\mathbb{A} - a \text{id})^3$. 由引理 2.1 可见 V_1 是 TM 的 Lorentz 子丛 (即 TM 的 Lorentz 度量限制在 V_1 上是 Lorentz 度量), 每个 V_α 是 TM 的欧氏子丛.

任取 Lorentz 子丛 V_1 的局部么正标架 $\{Y_1, \dots, Y_{r_1}\}$ (按照约定 Y_1 是类时的), 定义在 p_0 的邻域 U 上. 令 $\mathbb{B} = \mathbb{A} - a \text{id}$, 则 $V_1 = \ker \mathbb{B}^3$, 从而, $\mathbb{B}^3 Y_1 = 0$. 另一方面, 由引理 2.1, 有 $\mathbb{B}^2 Y_1 \neq 0$. 因此, Y_1 、 $\mathbb{B}Y_1$ 和 $\mathbb{B}^2 Y_1$ 在 U 上处处线性无关, 张成了 V_1 的 3 维子丛 W_1 .

由 $\mathbb{B}^3 Y_1 = 0$ 和 $\mathbb{B}$ 的对称性可知 $\mathbb{B}^2 Y_1$ 是类光的, $\mathbb{B}Y_1 \perp \mathbb{B}^2 Y_1$. 由于 $\mathbb{B}Y_1$ 与 $\mathbb{B}^2 Y_1$ 线性无关, 根据文献 [9, 引理 2.1], 有 $\langle \mathbb{B}Y_1, \mathbb{B}Y_1 \rangle = \langle Y_1, \mathbb{B}^2 Y_1 \rangle = c^2 > 0$, 其中 c 是局部定义的函数. 令 $b = \langle Y_1, \mathbb{B}Y_1 \rangle$. 因为 W_1 上关于标架 $\{Y_1, \mathbb{B}Y_1, \mathbb{B}^2 Y_1\}$ 的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} -1 & b & c^2 \\ b & c^2 & 0 \\ c^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $W_1 = \text{span}\{Y_1, \mathbb{B}Y_1, \mathbb{B}^2 Y_1\}$ 是 Lorentz 子丛, 从而, W_1 在 V_1 中的正交补 W_2 是欧氏子丛.

因为 $\mathbb{B}|_{V_1}$ 的最小多项式是 λ^3 , 容易明白 $\mathbb{B}|_{W_2} = 0$, 即 $\mathbb{A}|_{W_2} = a \text{id}$. 通过计算可以验证

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{1}{c} \left(Y_1 - \frac{b}{2c^2} \mathbb{B}Y_1 + \frac{3b^2 + 4c^2}{8c^4} \mathbb{B}^2 Y_1 \right), \\ X_2 &= \frac{1}{c} \mathbb{B}^2 Y_1, \quad X_3 = \frac{1}{c} \left(\mathbb{B}Y_1 - \frac{b}{2c^2} \mathbb{B}^2 Y_1 \right) \end{aligned}$$

是 Lorentz 子丛 W_1 的伪么正标架, 且满足

$$\mathbb{B}X_1 = -X_3, \quad \mathbb{B}X_2 = 0, \quad \mathbb{B}X_3 = X_2,$$

即有

$$\mathbb{A}X_1 = aX_1 - X_3, \quad \mathbb{A}X_2 = aX_2, \quad \mathbb{A}X_3 = aX_3 + X_2.$$

再分别取欧氏子丛 W_2 和 V_α 的么正标架

$$\{X_4, \dots, X_{r_1}\} \text{ 和 } \{X_1^{(\alpha)}, \dots, X_{r_\alpha}^{(\alpha)}\}.$$

将它们合在一起, 就得到满足 (2.1) 的伪么正标架 $\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$. $\square$

根据引理 2.2, 可取满足 (2.1) 的局部伪么正标架 $\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$. 设 $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}$ 是它的对偶标架. 再设 $e_A = dx(X_A)$, e_{n+1} 是 M 的单位法向量. 因为 $de_{n+1} = dx \circ \mathbb{A}$, 从 (2.1) 得到

$$de_{n+1}(X_1) = a_1 e_1 - e_3, \quad de_{n+1}(X_2) = a_1 e_2, \quad de_{n+1}(X_3) = e_2 + a_1 e_3, \quad de_{n+1}(X_i) = a_i e_i.$$

所以, 平凡丛 $\mathbb{R}_1^{n+2} = M \times \mathbb{R}_1^{n+1}$ 的局部标架 $\{e_0 = x, e_1, e_2, e_3, \dots, e_n, e_{n+1}\}$ 满足下面的运动方程:

$$\begin{cases} de_0 = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3 + \sum \omega_j e_j, \\ de_1 = \omega_2 e_0 + \omega_{11} e_1 + \omega_{13} e_3 + \sum \omega_{1j} e_j + (a_1 \omega_2 + \omega_3) e_{n+1}, \\ de_2 = \omega_1 e_0 - \omega_{11} e_2 + \omega_{23} e_3 + \sum \omega_{2j} e_j + a_1 \omega_1 e_{n+1}, \\ de_3 = -\omega_3 e_0 + \omega_{23} e_1 + \omega_{13} e_2 + \sum \omega_{3j} e_j - (a_1 \omega_3 - \omega_1) e_{n+1}, \\ de_i = -\omega_i e_0 + \omega_{2i} e_1 + \omega_{1i} e_2 - \omega_{3i} e_3 + \sum \omega_{ij} e_j - a_i \omega_i e_{n+1}, \\ de_{n+1} = a_1 \omega_1 e_1 + (a_1 \omega_2 + \omega_3) e_2 + (a_1 \omega_3 - \omega_1) e_3 + \sum a_j \omega_j e_j, \end{cases} \quad (2.2)$$

其中 $\omega_{11}, \omega_{13}, \omega_{1j}, \omega_{23}, \omega_{2j}, \omega_{3j}, \omega_{ij} = -\omega_{ji}$ 是局部定义的 1- 形式.

外微分 (2.2) 得到 M 的第一结构方程

$$\begin{cases} d\omega_1 = -\omega_{11} \wedge \omega_1 - \omega_{23} \wedge \omega_3 - \sum \omega_{2i} \wedge \omega_i, \\ d\omega_2 = \omega_{11} \wedge \omega_2 - \omega_{13} \wedge \omega_3 - \sum \omega_{1i} \wedge \omega_i, \\ d\omega_3 = -\omega_{13} \wedge \omega_1 - \omega_{23} \wedge \omega_2 + \sum \omega_{3i} \wedge \omega_i, \\ d\omega_i = -\omega_{1i} \wedge \omega_1 - \omega_{2i} \wedge \omega_2 - \omega_{3i} \wedge \omega_3 + \sum \omega_{ij} \wedge \omega_j, \end{cases} \quad (2.3)$$

Gauss 方程

$$\begin{cases} d\omega_{11} = \omega_{13} \wedge \omega_{23} + \sum \omega_{1i} \wedge \omega_{2i} - \omega_1 \wedge [(1 + a_1^2) \omega_2 + a_1 \omega_3], \\ d\omega_{13} = \omega_{11} \wedge \omega_{13} - \sum \omega_{1i} \wedge \omega_{3i} + \omega_1 \wedge (a_1 \omega_2 + \omega_3) + (1 + a_1^2) \omega_2 \wedge \omega_3, \\ d\omega_{23} = -\omega_{11} \wedge \omega_{23} - \sum \omega_{2i} \wedge \omega_{3i} + (1 + a_1^2) \omega_1 \wedge \omega_3, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} d\omega_{1i} = \omega_{11} \wedge \omega_{1i} + \omega_{13} \wedge \omega_{3i} - \sum \omega_{1j} \wedge \omega_{ij} + [(1 + a_1 a_i) \omega_2 + a_i \omega_3] \wedge \omega_i, \\ d\omega_{2i} = -\omega_{11} \wedge \omega_{2i} + \omega_{23} \wedge \omega_{3i} - \sum \omega_{2j} \wedge \omega_{ij} + (1 + a_1 a_i) \omega_1 \wedge \omega_i, \\ d\omega_{3i} = \omega_{13} \wedge \omega_{2i} + \omega_{23} \wedge \omega_{1i} - \sum \omega_{3j} \wedge \omega_{ij} + [a_i \omega_1 - (1 + a_1 a_i) \omega_3] \wedge \omega_i, \end{cases} \quad (2.5)$$

$$d\omega_{ij} = \omega_{1i} \wedge \omega_{2j} + \omega_{2i} \wedge \omega_{1j} - \omega_{3i} \wedge \omega_{3j} - \sum \omega_{ik} \wedge \omega_{jk} - (1 + a_i a_j) \omega_i \wedge \omega_j \quad (2.6)$$

和 Codazzi 方程

$$\begin{cases} d\omega_3 + a_1 d\omega_2 = \omega_{11} \wedge (a_1 \omega_2 + \omega_3) - \omega_{13} \wedge (a_1 \omega_3 - \omega_1) - \sum a_i \omega_{1i} \wedge \omega_i, \\ a_1 d\omega_1 = -a_1 \omega_{11} \wedge \omega_1 - \omega_{23} \wedge (a_1 \omega_3 - \omega_1) - \sum a_i \omega_{2i} \wedge \omega_i, \\ d\omega_1 - a_1 d\omega_3 = \omega_{23} \wedge (a_1 \omega_2 + \omega_3) + a_1 \omega_{13} \wedge \omega_1 - \sum a_i \omega_{3i} \wedge \omega_i, \\ a_i d\omega_i = -\omega_{2i} \wedge (a_1 \omega_2 + \omega_3) - a_1 \omega_{1i} \wedge \omega_1 - \omega_{3i} \wedge (a_1 \omega_3 - \omega_1) + \sum a_j \omega_{ij} \wedge \omega_j. \end{cases} \quad (2.7)$$

为了后文的目的, 我们利用运动方程 (2.2) 来研究 III 型 Lorentz 等参超曲面的平行超曲面.

将 M 的 n 个主曲率 a_A 记为 $\cot \theta_A$ ($\theta_A \in (0, \pi)$) (可能有相同的). M 上的向量函数

$$x_\theta = \cos \theta x + \sin \theta e_{n+1} \quad (2.8)$$

定义了映射 $x_\theta: M \rightarrow S_1^{n+1}$, 其中 $\theta \in [0, 2\pi]$ 是常数. 由 (2.2) 可知,

$$dx_\theta = \tilde{\omega}_1 e_1 + \tilde{\omega}_2 e_2 + \tilde{\omega}_3 e_3 + \sum \tilde{\omega}_i e_n, \quad (2.9)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= \frac{\sin(\theta + \theta_1)}{\sin \theta_1} \omega_1, & \tilde{\omega}_2 &= \frac{\sin(\theta + \theta_1)}{\sin \theta_1} \omega_2 + \sin \theta \omega_3, \\ \tilde{\omega}_3 &= \frac{\sin(\theta + \theta_1)}{\sin \theta_1} \omega_3 - \sin \theta \omega_1, & \tilde{\omega}_i &= \frac{\sin(\theta + \theta_i)}{\sin \theta_i} \omega_i. \end{aligned} \quad (2.10)$$

如果所有的 $\sin(\theta + \theta_A) \neq 0$, 则 $\tilde{\omega}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{\omega}_n \neq 0$, x_θ 是浸入. 当 x_θ 是浸入时, $\{\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n\}$ 是 T^*M 的标架. 设 $\{\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n\}$ 是它的对偶标架, 则由 (2.9) 可见 x_θ 的诱导度量是 Lorentz 度量, $\{\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n\}$ 是伪么正标架. 因此, $M_\theta = x_\theta(M)$ 是 Lorentz 超曲面, 并且

$$\tilde{e}_{n+1} = -\sin \theta x + \cos \theta e_{n+1}$$

是 M_θ 的单位法向量. 由 (2.2) 和 (2.10) 得到

$$\begin{aligned} d\tilde{e}_{n+1} &= \frac{\cos(\theta + \theta_1)}{\sin \theta_1} \omega_1 e_1 + \left[\frac{\cos(\theta + \theta_1)}{\sin \theta_1} \omega_2 + \cos \theta \omega_3 \right] e_2 + \left[\frac{\cos(\theta + \theta_1)}{\sin \theta_1} \omega_3 - \cos \theta \omega_1 \right] e_3 \\ &\quad + \sum \frac{\cos(\theta + \theta_i)}{\sin \theta_i} \omega_i e_i \\ &= \cot(\theta + \theta_1) \tilde{\omega}_1 e_1 + [\cot(\theta + \theta_1) \tilde{\omega}_2 + \tilde{a}^2 \tilde{\omega}_3 + \tilde{a}^3 \sin \theta \tilde{\omega}_1] e_2 + [\cot(\theta + \theta_1) \tilde{\omega}_3 - \tilde{a}^2 \tilde{\omega}_1] e_3 \\ &\quad + \sum \cot(\theta + \theta_i) \tilde{\omega}_i e_i, \end{aligned}$$

其中 $\tilde{a} = \sin \theta_1 / \sin(\theta + \theta_1) \neq 0$. 根据定义可知, M_θ 的形算子 $\mathbb{A}_\theta$ 满足 $d\tilde{e}_{n+1} = dx_\theta \circ \mathbb{A}_\theta$. 故由上式和 (2.9) 可知,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_\theta \tilde{X}_1 &= \cot(\theta + \theta_1) \tilde{X}_1 + \tilde{a}^3 \sin \theta \tilde{X}_2 - \tilde{a}^2 \tilde{X}_3, & \mathbb{A}_\theta \tilde{X}_2 &= \cot(\theta + \theta_1) \tilde{X}_2, \\ \mathbb{A}_\theta \tilde{X}_3 &= \cot(\theta + \theta_1) \tilde{X}_3 + \tilde{a}^2 \tilde{X}_2, & \mathbb{A}_\theta \tilde{X}_i &= \cot(\theta + \theta_i) \tilde{X}_i. \end{aligned}$$

这说明 $\cot(\theta + \theta_1), \cot(\theta + \theta_i)$ 是 $\mathbb{A}_\theta$ 的特征值. 由于

$$\begin{aligned} [\mathbb{A}_\theta - \cot(\theta + \theta_1) \text{id}]^2 \tilde{X}_1 &= -\tilde{a}^4 \tilde{X}_2 \neq 0, & [\mathbb{A}_\theta - \cot(\theta + \theta_1) \text{id}]^3 \tilde{X}_1 &= 0, \\ [\mathbb{A}_\theta - \cot(\theta + \theta_1) \text{id}] \tilde{X}_2 &= 0, & [\mathbb{A}_\theta - \cot(\theta + \theta_1) \text{id}]^2 \tilde{X}_3 &= 0, & [\mathbb{A}_\theta - \cot(\theta + \theta_i) \text{id}] \tilde{X}_i &= 0, \end{aligned}$$

易见形算子 $\mathbb{A}_\theta$ 的最小多项式为

$$f(\lambda) = [\lambda - \cot(\theta + \theta_1)]^3 [\lambda - \cot(\theta + \theta_{i_2})] \cdots [\lambda - \cot(\theta + \theta_{i_g})],$$

其中 $\cot \theta_1, \cot \theta_{i_2}, \dots, \cot \theta_{i_g}$ 是 M 的互异主曲率. 这样就证明了下面的命题.

命题 2.3 设 M 是 Lorentz 球面 S_1^{n+1} 中的 III 型 Lorentz 等参超曲面, 它的 n 个主曲率为 $\cot \theta_A$ (可能有相同的). 若对 $A = 1, 2, \dots, n$, $\sin(\theta + \theta_A) \neq 0$, 则由向量函数 (2.8) 定义的映射 x_θ 是浸入. 它的象 M_θ 也是 III 型 Lorentz 等参超曲面, 主曲率为 $\cot(\theta + \theta_A)$ ($A = 1, 2, \dots, n$).

当 x_θ 是浸入时, 将 M_θ 称为 M 的平行超曲面. 对 II 型 Lorentz 等参超曲面也有类似的结论 (参见文献 [9]).

3 III 型 Lorentz 等参超曲面互异主曲率的个数

设 $a (= a_1), a_{i_2}, \dots, a_{i_g}$ 是 M 的 g 个互异主曲率. 本节来证明 $g \leq 2$, 即 M 最多有两个互异的主曲率.

将结构方程 (2.3) 代入 Codazzi 方程 (2.4) 得

$$\begin{cases} \omega_{23} \wedge \omega_1 + \sum (a_1 - a_i) \omega_{2i} \wedge \omega_i = 0, \\ \omega_{11} \wedge \omega_1 + 2\omega_{23} \wedge \omega_3 + \sum [(a_1 - a_i) \omega_{3i} + \omega_{2i}] \wedge \omega_i = 0, \\ 2\omega_{13} \wedge \omega_1 + \omega_{23} \wedge \omega_2 + \omega_{11} \wedge \omega_3 + \sum [(a_1 - a_i) \omega_{1i} - \omega_{3i}] \wedge \omega_i = 0, \\ [(a_1 - a_i) \omega_{1i} - \omega_{3i}] \wedge \omega_1 + (a_1 - a_i) \omega_{2i} \wedge \omega_2 + [(a_1 - a_i) \omega_{3i} + \omega_{2i}] \wedge \omega_3 \\ + \sum_j (a_i - a_j) \omega_{ij} \wedge \omega_j = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

由 (3.1) 第 1 式知, $\sum (a_1 - a_i) \omega_{2i} \wedge \omega_i \wedge \omega_1 = 0$. 可设

$$(a_1 - a_i) \omega_{2i} = A_i \omega_1 + \sum A_{ij} \omega_j, \quad A_{ij} = A_{ji}. \quad (3.2)$$

代入 (3.1) 第 1 式, 可设

$$\omega_{23} = A_1 \omega_1 + \sum A_i \omega_i. \quad (3.3)$$

将上式代入 (3.1) 第 2 式, 有

$$(\omega_{11} - 2A_1 \omega_3) \wedge \omega_1 + \sum [(a_1 - a_i) \omega_{3i} + \omega_{2i} - 2A_i \omega_3] \wedge \omega_i = 0.$$

同理可设

$$\omega_{11} = B_1 \omega_1 + 2A_1 \omega_3 + \sum B_i \omega_i, \quad (3.4)$$

$$(a_1 - a_i) \omega_{3i} + \omega_{2i} = B_i \omega_1 + 2A_i \omega_3 + \sum B_{ij} \omega_j, \quad B_{ij} = B_{ji}. \quad (3.5)$$

采用同样的方法, 将 (3.3) 和 (3.4) 代入 (3.1) 第 3 式, 可设

$$2\omega_{13} = C_1 \omega_1 + A_1 \omega_2 + B_1 \omega_3 + \sum C_i \omega_i, \quad (3.6)$$

$$(a_1 - a_i) \omega_{1i} - \omega_{3i} = C_i \omega_1 + A_i \omega_2 + B_i \omega_3 + \sum C_{ij} \omega_j, \quad C_{ij} = C_{ji}. \quad (3.7)$$

最后, 将上式、(3.2) 和 (3.5) 代入 (3.1) 第 4 式, 得

$$\sum_j [(a_i - a_j) \omega_{ij} - C_{ij} \omega_1 - A_{ij} \omega_2 - B_{ij} \omega_3] \wedge \omega_j = 0.$$

故可设

$$(a_i - a_j) \omega_{ij} = C_{ij} \omega_1 + A_{ij} \omega_2 + B_{ij} \omega_3 + \sum C_{ijk} \omega_k, \quad C_{ijk} = C_{ikj}. \quad (3.8)$$

由于 $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, 上式左边关于指标 i 和 j 是对称的; 又 $A_{ij} = A_{ji}$, $B_{ij} = B_{ji}$, $C_{ij} = C_{ji}$, 所以,

$$C_{ijk} = C_{ikj} = C_{jki} = C_{kji}. \quad (3.9)$$

在指标集 $\{1, 2, \dots, n\}$ 中引入等价关系 “ $\sim$ ”: $A \sim B \Leftrightarrow a_A = a_B$. 对固定的指标 A , 用 $[A]$ 表示 A 所在的等价类. 将 $[A] \cup [B]$ 记为 $[AB]$.

由 (3.2) 和 (3.8) 可见

$$A_i = A_{ij} = 0, \quad \forall j, \quad \text{若 } i \in [1]; \quad A_{ij} = B_{ij} = C_{ij} = C_{ijk} = 0, \quad \forall k, \quad \text{若 } i \in [j]. \quad (3.10)$$

设 $\omega_{AB} = \sum \Gamma_{AB}^C \omega_C$. 无论 $i \notin [1]$ (由 (3.2)) 还是 $i \in [1]$ (由 (3.5)), 都有 $\Gamma_{2i}^2 = 0$. 再由 (3.3) 和 (3.4), 可得

$$\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{2i}^2 = 0, \quad \forall i. \quad (3.11)$$

当 $i \notin [1]$ 时, 由上式和 (3.5) 可知 $\Gamma_{3i}^2 = 0$. 再由 (3.10) 和 (3.11), 得

$$\Gamma_{3i}^2 = 0, \quad \text{当 } i \notin [1]; \quad \Gamma_{2i}^j = 0, \quad \text{当 } i \notin [1], \quad j \in [1i]. \quad (3.12)$$

如果 $j \in [1]$, 则 $j \notin [i]$. 由 (3.8) 可知, $\Gamma_{ij}^2 = A_{ij}/(a_i - a_j)$. 根据 (3.10), 有

$$\Gamma_{ij}^2 = 0, \quad \text{当 } i \notin [1], \quad j \in [1]. \quad (3.13)$$

下面用反证法证明 $g \leq 2$. 假设 $g > 2$. 任取一个指标 $i \notin [1]$. 根据 (3.10), 可将 (3.2) 改写成

$$(a_1 - a_i)\omega_{2i} = A_i\omega_1 + \sum_{j \notin [1i]} A_{ij}\omega_j. \quad (3.14)$$

将上式两边分别取外微分, 由 (2.5) 和 (2.3) 可得

$$\begin{aligned} (a_1 - a_i) & \left[-\omega_{11} \wedge \omega_{2i} + \omega_{23} \wedge \omega_{3i} - \sum_{j \in [1]} \omega_{2j} \wedge \omega_{ij} - \sum_{j \in [i]} \omega_{2j} \wedge \omega_{ij} \right. \\ & \left. - \sum_{j \notin [1i]} \omega_{2j} \wedge \omega_{ij} + (1 + a_1 a_i) \omega_1 \wedge \omega_i \right] \\ & = dA_i \wedge \omega_1 - A_i \left(\omega_{11} \wedge \omega_1 + \omega_{23} \wedge \omega_3 + \sum \omega_{2j} \wedge \omega_j \right) + \sum_{j \notin [1i]} dA_{ij} \wedge \omega_j \\ & \quad - \sum_{j \notin [1i]} A_{ij} \left(\omega_{1j} \wedge \omega_1 + \omega_{2j} \wedge \omega_2 + \omega_{3j} \wedge \omega_3 - \sum \omega_{jk} \wedge \omega_k \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

比较两边 $\omega_2 \wedge \omega_i$ 的系数, 利用 (3.11)–(3.13), 有

$$(a_1 - a_i) \sum_{j \notin [1i]} \Gamma_{2j}^i \Gamma_{ij}^2 = \sum_{j \notin [1i]} A_{ij} (\Gamma_{2j}^i - \Gamma_{ij}^2).$$

因为求和指标 $j \notin [1i]$, 根据 (3.2) 和 (3.8) 知, $\Gamma_{2j}^i = A_{ij}/(a_1 - a_j)$, $\Gamma_{ij}^2 = A_{ij}/(a_i - a_j)$. 代入上式, 化简得

$$\sum_{j \notin [1i]} \frac{A_{ij}^2}{(a_1 - a_j)(a_i - a_j)} = 0, \quad \forall i \notin [1]. \quad (3.16)$$

引理 3.1 $A_{ij} = 0, \forall i, j$.

证明 令 $a_1 = a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_g}$ 是 M 的 g 个互异主曲率. 我们将证明, 当 $i \in [i_\alpha]$ ($\forall \alpha$) 时,

$$A_{ij} = 0, \quad \forall j. \quad (3.17)$$

通过将 e_{n+1} 换成 $-e_{n+1}$, 不妨设 a_1 不是最大的主曲率, 则有两种情形:

(1) a_1 是最小的: $a_1 < a_{i_2} < \cdots < a_{i_g}$;

(2) a_1 不是最小的: $a_{i_{q+1}} < \cdots < a_{i_g} < a_1 < a_{i_2} < \cdots < a_{i_q}$, 其中 $2 \leq q < g$.

情形 (1). 对 (3.17) 中的 α 作归纳法. 当 $\alpha = 1$ 时, (3.17) 就是 (3.10) 第 1 式. 当 $\alpha = 2$ 时, 在 (3.16) 中取 $i \in [i_2]$, 则和式 (3.16) 中每一项都是非负的, 从而, 对 $i \in [i_2]$, $j \notin [i_1 i_2]$, 有 $A_{ij} = 0$. 而当 $j \in [i_1 i_2] = [1] \cup [i_2]$ 时, 由 (3.10), 也有 $A_{ij} = 0$. 因此, (3.17) 对 $\alpha = 1, 2$ 均成立.

假设 (3.17) 对 $i \in [i_1] \cup \cdots \cup [i_{\alpha-1}] =: [i_1 \cdots i_{\alpha-1}]$ 均成立.

在 (3.16) 中取 $i \in [i_\alpha]$. 根据归纳假设, 当 $j \in [i_1 \cdots i_{\alpha-1}]$ 时, $A_{ij} = 0$. 因此, (3.16) 成为

$$\sum_{j \in [i_{\alpha+1} \cdots i_g]} \frac{A_{ij}^2}{(a_{i_1} - a_j)(a_{i_\alpha} - a_j)} = 0.$$

和式中每一项依然是非负的, 从而, 对 $i \in [i_\alpha]$, $j \in [i_{\alpha+1} \cdots i_g]$, 有 $A_{ij} = 0$. 而由 (3.10) 可知, $j \in [i_\alpha] = [i]$ 时也有 $A_{ij} = 0$. 由归纳假设知, (3.17) 对 $i \in [i_\alpha]$ 成立. 根据归纳原理, (3.17) 对 $\alpha = 1, \dots, g$ 均成立.

情形 (2). 在 (3.16) 中取 $i \in [i_2]$, 则 $j \notin [1i]$ 就是 $j \notin [i_1 i_2]$, 从而,

$$(a_1 - a_j)(a_i - a_j) = (a_{i_1} - a_j)(a_{i_2} - a_j) > 0.$$

像前面一样, 当 $i \in [i_1 i_2]$ 时, $A_{ij} = 0, \forall j$. 如果 $q > 2$, 再在 (3.16) 中取 $i \in [i_3]$. 由于 $j \in [i_1 i_2]$ 时 $A_{ij} = 0$, (3.16) 左边对 $j \notin [i_1 i_3]$ 求和实际上是对 $j \in [i_4 \cdots i_g]$ 求和, 从而每一项依然是非负的, 所以有

$$A_{ij} = 0, \quad \text{若 } i \in [i_1 i_2 i_3], \quad j \in [i_4 \cdots i_g].$$

但是已经有 $j \in [i_1 i_2]$ 时 $A_{ij} = 0$, 加上 (3.10), 可见 $j \in [i_3] = [i]$ 时 $A_{ij} = 0$. 因此, (3.17) 对 $i \in [i_1 i_2 i_3]$ 成立. 依此类推, 可以证明当 $i \in [i_1 \cdots i_q]$ 时 (3.17) 成立.

同样, 在 (3.16) 中逐次取 $i \in [i_g], [i_{g-1}], \dots, [i_{p+1}]$, 可见 (3.17) 对 $\alpha = 1, \dots, g$ 都成立. $\square$

根据引理 3.1, 由 (3.2)、(3.5) 和 (3.8) 得到

$$\begin{cases} \omega_{2i} = \Gamma_{2i}^1 \omega_1, & \Gamma_{2i}^1 = \frac{A_i}{a_1 - a_i}, & \text{当 } i \notin [1], \\ \omega_{2j} = B_j \omega_1 + 2A_j \omega_3 + \sum B_{jk} \omega_k, & \text{当 } j \in [1], \end{cases} \quad (3.18)$$

$$(a_i - a_j) \omega_{ij} = C_{ij} \omega_1 + B_{ij} \omega_3 + \sum C_{ijk} \omega_k. \quad (3.19)$$

因此, 对 $i \notin [1], j \in [1]$, 有 $a_j = a_1 \neq a_i$. 由上面二式及 (3.9) 和 (3.10), 有

$$\begin{cases} \Gamma_{2i}^1 = \frac{A_i}{a_1 - a_i}, & \Gamma_{2j}^3 = 2A_j, & \Gamma_{2j}^i = B_{ij}, & i \notin [1], & j \in [1], \\ \Gamma_{ij}^i = \frac{C_{iji}}{a_i - a_1} = 0, & \Gamma_{ij}^3 = \frac{B_{ij}}{a_i - a_1}, & & i \notin [1], & j \in [1]. \end{cases} \quad (3.20)$$

另外, 由 (3.3)、(3.5) 和 (3.18), 有

$$\Gamma_{23}^3 = 0, \quad \Gamma_{23}^i = A_i, \quad \forall i; \quad \Gamma_{3i}^3 = \frac{2A_i}{a_1 - a_i}, \quad i \notin [1]. \quad (3.21)$$

取 $i \notin [1]$, 则 $\omega_{2i} = \Gamma_{2i}^1 \omega_1$. 外微分此式, 由 (2.3) 和 (2.5) 得到

$$-\Gamma_{2i}^1 \omega_{11} \wedge \omega_1 + \omega_{23} \wedge \omega_{3i} - \sum_{j \notin [1]} \Gamma_{2j}^1 \omega_1 \wedge \omega_{ij} - \sum_{j \in [1]} \omega_{2j} \wedge \omega_{ij} + (1 + a_1 a_i) \omega_1 \wedge \omega_i$$

$$= d\Gamma_{2i}^1 \wedge \omega_1 - \Gamma_{2i}^1 \left(\omega_{11} \wedge \omega_1 + \omega_{23} \wedge \omega_3 + \sum_{j \notin [1]} \Gamma_{2j}^1 \omega_1 \wedge \omega_j + \sum_{j \in [1]} \omega_{2j} \wedge \omega_j \right).$$

比较两边 $\omega_3 \wedge \omega_i$ 的系数, 有

$$\Gamma_{23}^3 \Gamma_{3i}^i - \Gamma_{23}^i \Gamma_{3i}^3 - \sum_{j \in [1]} (\Gamma_{2j}^3 \Gamma_{ij}^i - \Gamma_{2j}^i \Gamma_{ij}^3) = \Gamma_{2i}^1 \Gamma_{23}^i$$

(注意当 $j \in [1]$ 时 $j \neq i$). 将 (3.20) 和 (3.21) 代入上式, 化简得到

$$3A_i^2 + \sum_{j \in [1]} B_{ij}^2 = 0, \quad i \notin [1]. \quad (3.22)$$

结合 (3.10), 有 $A_i = 0, \forall i$. 当 $j \in [1]$ 时, $B_{ij} = 0, \forall i$. 因此有下面的引理.

引理 3.2 $A_i = 0, \forall i$. 从而, 当 $i \notin [1]$ 时, $\omega_{2i} = 0$ (由 (3.18) 和 (3.20)).

利用引理 3.2, 我们来证明本节的主要定理. 此定理最早出现在陈良才的硕士学位论文 [10] 中. 下面是一个简化的证明.

定理 3.3 如果 $g > 1$, 则任何异于 a_1 的主曲率 a_i 都满足 $a_1 a_i + 1 = 0$, 从而 $g \leq 2$.

证明 任取 $i \notin [1]$, 则由引理 3.2 和 (2.5), 可得

$$\omega_{23} \wedge \omega_{3i} - \sum_{j \in [1]} \omega_{2j} \wedge \omega_{ij} + (1 + a_1 a_i) \omega_1 \wedge \omega_i = 0.$$

比较两边 $\omega_1 \wedge \omega_i$ 的系数, 得

$$\Gamma_{23}^1 \Gamma_{3i}^i - \Gamma_{23}^i \Gamma_{3i}^1 - \sum_{j \in [1]} (\Gamma_{2j}^1 \Gamma_{ij}^i - \Gamma_{2j}^i \Gamma_{ij}^1) + (1 + a_1 a_i) = 0. \quad (3.23)$$

根据引理 3.2, (3.3) 和 (3.5) 成为

$$\omega_{23} = A_1 \omega_1; \quad (a_1 - a_i) \omega_{3i} = B_i \omega_1 + \sum B_{ij} \omega_j, \quad i \notin [1].$$

由 (3.10) 可知 $B_{ii} = 0$. 于是, 由上式得到 $\Gamma_{3i}^i = \Gamma_{23}^i = 0$. 同时由 (3.22), 当 $j \in [1]$ 时 $B_{ij} = 0, \forall i$. 因此, 由 (3.20), 有 $\Gamma_{ij}^i = \Gamma_{2j}^i = 0$ ($i \notin [1], j \in [1]$). 将这些数据代入 (3.23) 就得到 $a_1 a_i + 1 = 0$. $\square$

定理 3.3 说明前面的假设 $g > 2$ 不成立.

注 3.4 设 M 是 S_1^{n+1} 中的 III 型 Lorentz 等参超曲面. 如果 $g = 1$, 即所有的主曲率都相等, 则称 M 是全脐的. 如果 $g = 2$, 设 a ($= a_1$) 的重数是 p . 当 $p = 3$ 时, 称 M 是半脐的; 当 $p > 3$ 时, 称 M 是非脐的. 应用命题 2.3, 通过考虑 M 的平行超曲面, 可以假设 $a = 1$. 当 M 全脐时, 所有的主曲率都为 1, 形算子 $\mathbb{A}$ 的最小多项式为 $(\lambda - 1)^3$. 若 M 不是全脐的, 根据定理 3.3, 可设 $\mathbb{A}$ 的最小多项式为 $(\lambda - 1)^3(\lambda + 1)$.

4 III 型 Lorentz 等参超曲面的存在性

本节研究 S_1^{n+1} 中的 III 型 Lorentz 等参超曲面的存在性. 设主曲率 a ($= a_1$) = 1, 重数是 p . 下面指标的取值范围为

$$r, s, t, \dots = 3, 4, \dots, p, \quad i, j, k, \dots = 4, \dots, p, \quad \alpha, \beta, \gamma, \dots = p + 1, \dots, n.$$

注意当 $p = n$ 时, M 是全脐的, 以下公式中指标含 α, β 和 γ 的项不出现. 同理, 当 $p = 3$ 时, M 是半脐的, 指标含 i, j 和 k 的项不出现, 而指标 $r, s, t = 3$.

采用文献 [11, 引理 2.1] 中同样的证明方法, 可以证明下面的引理.

引理 4.1 设 $I \subset \mathbb{R}$ 是一个区间, $0 \in I$, 则对任意给定的定义在区间 I 上的光滑函数 $C_0, C_r, C_\alpha, C_{n+1}, B_{r\alpha}$ 和 $B_{r,n+1}$, 常微分方程组 Cauchy 问题

$$\begin{cases} E'_1 = C_0 E_0 + \sum C_s E_s + \sum C_\beta E_\beta + C_{n+1} E_{n+1}, \\ E'_2 = E_0, \\ E'_0 = E_1 + C_0 E_2, \\ E'_r = C_r E_2 + \sum B_{r\beta} E_\beta + B_{r,n+1} E_{n+1}, \\ E'_\alpha = C_\alpha E_2 - \sum B_{s\alpha} E_s, \\ E'_{n+1} = C_{n+1} E_2 - \sum B_{s,n+1} E_s, \\ E_1(0) = \varepsilon_1, \quad E_2(0) = \varepsilon_2, \quad E_0(0) = \varepsilon_0, \quad E_r(0) = \varepsilon_r, \quad E_\alpha(0) = \varepsilon_\alpha, \quad E_{n+1}(0) = \varepsilon_{n+1} \end{cases} \quad (4.1)$$

的解 $\{E_1(t), E_2(t), E_0(t), E_3(t), \dots, E_{n+1}(t)\}$ 是 $\mathbb{R}_1^{n+2}$ 的单参数伪么正标架, 其中 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_0, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}\}$ 是 $\mathbb{R}_1^{n+2}$ 的一组伪么正基.

设 $y = (y^0, y^3, \dots, y^p)$ 和 $z = (z^{p+1}, \dots, z^n, z^{n+1})$ 分别是欧氏单位球面 S^{p-2} 和 S^{n-p} 上点的位置向量, $\{\omega_3, \dots, \omega_p\}$ 和 $\{\theta_{p+1}, \dots, \theta_n\}$ 分别是 T^*S^{p-2} 和 T^*S^{n-p} 的局部么正标架. 再设 $\{Y_3, \dots, Y_p\}$ 和 $\{Z_{p+1}, \dots, Z_n\}$ 分别是 $\{\omega_3, \dots, \omega_p\}$ 和 $\{\theta_{p+1}, \dots, \theta_n\}$ 的对偶标架. 在 S^{p-2} 和 S^{n-p} 上, 分别有

$$dy = \sum \omega_r e_r, \quad dz = \sum \theta_\alpha e_\alpha, \quad (4.2)$$

其中 $e_r = dy(Y_r)$, $e_\alpha = dz(Z_\alpha)$. 假设

$$e_r = dy(Y_r) = (e_r^0, e_r^3, \dots, e_r^p), \quad e_\alpha = dz(Z_\alpha) = (e_\alpha^{p+1}, \dots, e_\alpha^n, e_\alpha^{n+1}),$$

则 (4.2) 等价于

$$dy^0 = \sum e_r^0 \omega_r, \quad dy^s = \sum e_r^s \omega_r, \quad dz^\beta = \sum e_\alpha^\beta \theta_\alpha, \quad dz^{n+1} = \sum e_\alpha^{n+1} \theta_\alpha. \quad (4.3)$$

因为 $\{y, e_3, \dots, e_p\}$ 和 $\{z, e_{p+1}, \dots, e_n\}$ 分别是 $\mathbb{R}^{p-1}$ 和 $\mathbb{R}^{n-p+1}$ 的么正标架, 所以有

$$\begin{aligned} y^0 e_r^0 + \sum y^s e_r^s &= 0, \quad e_r^0 e_s^0 + \sum e_r^t e_s^t = \delta_{rs}, \\ \sum z^\beta e_\alpha^\beta + z^{n+1} e_\alpha^{n+1} &= 0, \quad \sum e_\alpha^\gamma e_\beta^\gamma + e_\alpha^{n+1} e_\beta^{n+1} = \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

根据引理 4.1, 存在满足 (4.1) 的单参数伪么正标架 $\{E_1, E_2, E_0, E_r, E_\alpha, E_{n+1}\}$. 下设 (4.1) 中矩阵

$$B = \begin{pmatrix} B_{3,p+1} & \cdots & B_{3n} & B_{3,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_{p,p+1} & \cdots & B_{pn} & B_{p,n+1} \end{pmatrix} \neq 0. \quad (4.5)$$

令 $\Omega = I \times \mathbb{R} \times S^{p-2} \times S^{n-p}$. 定义映射 $x: \Omega \rightarrow S_1^{n+1}: (t, v, y, z) \mapsto x(t, v, y, z)$, 其中

$$x = x(t, v, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(v E_2 + y^0 E_0 + \sum y^r E_r + \sum z^\alpha E_\alpha + z^{n+1} E_{n+1} \right). \quad (4.6)$$

微分上式, 由 (4.1) 和 (4.3) 得

$$\begin{aligned} dx = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left[y^0 E_1 + \varphi E_2 + v E_0 - \sum \left(\sum z^\alpha B_{r\alpha} + z^{n+1} B_{r,n+1} \right) E_r \right. \\ & + \sum y^r \left(\sum B_{r\alpha} E_\alpha + B_{r,n+1} E_{n+1} \right) \Big] dt + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[dv E_2 + \sum \left(e_r^0 E_0 + \sum e_r^s E_s \right) \omega_r \right. \\ & \left. + \sum \left(\sum e_\alpha^\beta E_\beta + e_\alpha^{n+1} E_{n+1} \right) \theta_\alpha \right], \end{aligned} \quad (4.7)$$

其中

$$\varphi = \varphi(t, v, y, z) = C_0 y^0 + \sum C_r y^r + \sum C_\alpha z^\alpha + C_{n+1} z^{n+1}.$$

因此,

$$\begin{aligned} dx \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left[y^0 E_1 + \varphi E_2 + v E_0 - \sum \left(\sum z^\alpha B_{r\alpha} + z^{n+1} B_{r,n+1} \right) E_r \right. \\ & \left. + \sum y^r \left(\sum B_{r\alpha} E_\alpha + B_{r,n+1} E_{n+1} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} dx \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) = & \frac{1}{\sqrt{2}} E_2, \quad dx(Y_r) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e_r^0 E_0 + \sum e_r^s E_s \right), \\ dx(Z_\alpha) = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum e_\alpha^\beta E_\beta + e_\alpha^{n+1} E_{n+1} \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

因为 $\{E_1, E_2, E_0, E_r, E_\alpha, E_{n+1}\}$ 是伪么正标架, 相对于 $T^*\Omega$ 的局部标架 $\{dt, dv, \omega_r, \theta_\alpha\}$, 由 (4.7), 利用 (4.4)、(4.8) 和 (4.9) 可得

$$\begin{aligned} \langle dx, dx \rangle = & (dt \ du \ \omega_r \ \theta_\alpha) G \begin{pmatrix} dt \\ du \\ \omega_s \\ \theta_\beta \end{pmatrix} = (dt \ du \ \omega_r \ \theta_\alpha) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{1s} & g_{1\beta} \\ g_{12} & 0 & 0 & 0 \\ g_{1r} & 0 & \frac{1}{2} \delta_{rs} & 0 \\ g_{1\alpha} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ du \\ \omega_s \\ \theta_\beta \end{pmatrix} \\ = & g_{11} dt^2 + 2 \left(g_{12} dv + \sum g_{1r} \omega_r + \sum g_{1\alpha} \theta_\alpha \right) dt + \frac{1}{2} \sum \omega_r^2 + \frac{1}{2} \sum \theta_\alpha^2, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} g_{11} = & \left\langle dx \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), dx \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right\rangle, \quad g_{12} = \left\langle dx \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), dx \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \right\rangle = -\frac{1}{2} y^0, \\ g_{1r} = & \left\langle dx \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), dx(Y_r) \right\rangle, \quad g_{1\alpha} = \left\langle dx \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), dx(Z_\alpha) \right\rangle. \end{aligned}$$

令 $K_1 = \{(t, v, y, z) \in \Omega \mid y^0 = 0\}$. 它是 Ω 中的零测度集 (欧氏测度). 限制在 $\Omega \setminus K_1$ 上, 映射 x 的拉回度量是非退化的, 并且 $\det G = -2^{-n} (y^0)^2 < 0$. 所以, $x(\Omega \setminus K_1)$ 是 S_1^{n+1} 中的 Lorentz 超曲面.

因为 (4.5) 中矩阵 $B \neq 0$, Ω 上函数

$$\psi = \psi(t, v, y, z) = \sum y^r \left(\sum z^\alpha B_{r\alpha} + z^{n+1} B_{r,n+1} \right) \quad (4.10)$$

的零点集 $K_2 = \{(t, v, y, z) \in \Omega \mid \psi(t, y, z) = 0\}$ 也是 Ω 中的零测度集. 令 $K = K_1 \cup K_2$, M 是 $\Omega \setminus K$ 的一个连通分支.

定理 4.2 当 $3 < p < n$ 时, 由 (4.6) 定义的映射 $x: M \rightarrow S_1^{n+1}$ 是一个浸入, $x(M)$ 是 S_1^{n+1} 中的 III 型非脐 Lorentz 等参超曲面, 其形算子 $\mathbb{A}$ 的最小多项式为 $(\lambda - 1)^3(\lambda + 1)$, $\mathbb{A}$ 的从属于特征值 -1 的特征分布是 $n - p$ 维的.

证明 注意到在 M 上 $y^0 \neq 0$, 因为 M 是连通的, 可设 $y^0 > 0$. 又当 $y^0 = 1$ 时, 所有的 $y^r = 0$, 从而由 (4.10) 知, 在 M 上 $y^0 < 1$. 故可设 $y^0 = \cos u$, $u \in (0, \pi/2)$, 从而, $1/y^0 = \sec u$. 由 (4.3), 可得

$$d(\sec u) = -\sec^2 u \sum e_r^0 \omega_r. \quad (4.11)$$

微分 (4.10), 利用 (4.3) 可得

$$d\psi = \psi_t dt + \sum \psi_r \omega_r + \sum \psi_\alpha \theta_\alpha, \quad (4.12)$$

其中

$$\begin{aligned} \psi_t &= \sum y^r \left(\sum z^\alpha B'_{r\alpha} + z^{n+1} B'_{r,n+1} \right), \quad \psi_r = \sum e_r^s \left(\sum z^\alpha B_{s\alpha} + z^{n+1} B_{s,n+1} \right), \\ \psi_\alpha &= \sum y^r \left(\sum e_\alpha^\beta B_{r\beta} + e_\alpha^{n+1} B_{r,n+1} \right). \end{aligned}$$

容易验证

$$e_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(v - 2\psi \sec u) E_2 + y^0 E_0 + \sum y^r E_r - \sum z^\alpha E_\alpha - z^{n+1} E_{n+1} \right] \quad (4.13)$$

是 $x(M)$ 的单位法向量. 按照约定, 形算子 $\mathbb{A}$ 由 $de_{n+1} = dx \circ \mathbb{A}$ 定义. 因此, $d(e_{n+1} \pm x) = dx \circ (\mathbb{A} \pm \text{id})$. 由 (4.6) 和 (4.13) 可知,

$$\begin{aligned} e_{n+1} - x &= \sqrt{2} \left(-\psi \sec u E_2 - \sum z^\alpha E_\alpha - z^{n+1} E_{n+1} \right), \\ e_{n+1} + x &= \sqrt{2} \left[(v - \psi \sec u) E_2 + y^0 E_0 + \sum y^r E_r \right]. \end{aligned}$$

于是, 由 (4.1)、(4.3) 和 (4.12), 可得

$$\begin{aligned} d(e_{n+1} - x) &= \sqrt{2} \left[- \left(\psi_t \sec u + \sum z^\alpha C_\alpha + z^{n+1} C_{n+1} \right) E_2 - \psi \sec u E_0 \right. \\ &\quad \left. + \sum \left(\sum z^\alpha B_{s\alpha} + z^{n+1} B_{s,n+1} \right) E_s \right] dt - \sqrt{2} \sec u \sum (\psi_r - e_r^0 \psi \sec u) E_2 \omega_r \\ &\quad - \sqrt{2} \sum \left(\psi_\alpha \sec u E_2 + \sum e_\alpha^\beta E_\beta + e_\alpha^{n+1} E_{n+1} \right) \theta_\alpha, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} d(e_{n+1} + x) &= \sqrt{2} \left[y^0 E_1 + \left(y^0 C_0 + \sum y^r C_r - \psi_t \sec u \right) E_2 + (v - \psi \sec u) E_0 \right. \\ &\quad \left. + \sum y^r \left(\sum B_{r\alpha} E_\alpha + B_{r,n+1} E_{n+1} \right) \right] dt + \sqrt{2} dv E_2 \\ &\quad + \sqrt{2} \sum \left[\sec u (e_r^0 \psi \sec u - \psi_r) E_2 + e_r^0 E_0 + \sum e_r^s E_s \right] \omega_r - \sqrt{2} \sec u \sum \psi_\alpha \theta_\alpha E_2. \end{aligned}$$

由 (4.9) 第 1 式, 有 $E_2 = \sqrt{2} dx(\frac{\partial}{\partial v})$; 又因 x 是浸入, 故 dx 是单射. 故由上可得

$$(\mathbb{A} + \text{id})(Z_\alpha) = -2\psi_\alpha \sec u \frac{\partial}{\partial v}, \quad (\mathbb{A} - \text{id})\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = 0, \quad (\mathbb{A} - \text{id})(Y_r) = 2e_r \sec u \frac{\partial}{\partial v}, \quad (4.15)$$

其中

$$c_r = e_r^0 \psi \sec u - \psi_r. \quad (4.16)$$

由 (4.15) 可知,

$$\mathbb{A} \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial v}, \quad (\mathbb{A} + \text{id}) \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial v}.$$

所以,

$$(\mathbb{A} + \text{id}) \left(Z_\alpha + \psi_\alpha \sec u \frac{\partial}{\partial v} \right) = 0. \quad (4.17)$$

因为 $\{y, e_3, \dots, e_p\}$ 是 $\mathbb{R}^{p-1}$ 的么正标架, 从 (4.4) 可得

$$\sum (e_r^0)^2 = 1 - (y^0)^2 = \sin^2 u, \quad \sum e_r^0 e_r^s = -y^0 y^s = -y^s \cos u, \quad \sum e_r^s e_r^t = \delta^{st} - y^s y^t.$$

注意 (4.12) 中, $\psi_r = \sum e_r^s (\sum z^\alpha B_{s\alpha} + z^{n+1} B_{s,n+1})$, 由上式得到

$$\sum e_r^0 \psi_r = -\psi \cos u, \quad \sum e_r^s \psi_r = \sum z^\alpha B_{s\alpha} + z^{n+1} B_{s,n+1} - y^s \psi.$$

从而, 由 (4.16), 可得

$$\sum c_r e_r^0 = \psi \sec u, \quad \sum c_r e_r^s = -\sum z^\alpha B_{s\alpha} - z^{n+1} B_{s,n+1}. \quad (4.18)$$

因为在 M 上 $\psi \neq 0$, 上面的第一式说明 $c_3, \dots, c_p$ 不全为零, 即 $\sum c_r^2 > 0$.

最后来计算 $(\mathbb{A} - \text{id})(\frac{\partial}{\partial t})$. 从 (4.9) 和 (4.18) 可得

$$\sqrt{2} \left[\psi \sec u E_0 - \sum \left(\sum z^\alpha B_{s\alpha} + z^{n+1} B_{s,n+1} \right) E_s \right] = 2dx \left(\sum c_r Y_r \right). \quad (4.19)$$

由 (4.14) 可知,

$$\begin{aligned} dx \circ (\mathbb{A} - \text{id}) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) &= \sqrt{2} \left[- \left(\psi_t \sec u + \sum z^\alpha C_\alpha + z^{n+1} C_{n+1} \right) E_2 \right. \\ &\quad \left. - \psi \sec u E_0 + \sum \left(\sum z^\alpha B_{s\alpha} + z^{n+1} B_{s,n+1} \right) E_s \right]. \end{aligned}$$

将 (4.19) 代入上式右端, 注意到 $\sqrt{2} E_2 = dx(2 \frac{\partial}{\partial v})$, 有

$$(\mathbb{A} - \text{id}) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = -2 \left(\xi \frac{\partial}{\partial v} + \sum c_r Y_r \right), \quad (4.20)$$

其中

$$\xi = \psi_t \sec u + \sum z^\alpha C_\alpha + z^{n+1} C_{n+1}.$$

因为 $\mathbb{A} + \text{id} = \mathbb{A} - \text{id} + 2 \text{id}$, 由 (4.20) 和 (4.15) 可见 $\{(\mathbb{A} + \text{id})(\frac{\partial}{\partial t}), (\mathbb{A} + \text{id})(\frac{\partial}{\partial v}), (\mathbb{A} + \text{id})(Y_r)\}$ 是线性无关的. 结合 (4.17), 可知 $\mathbb{A}$ 的从属于特征值 -1 的特征分布是 $n-p$ 维的.

前面已经证明了 $\sum c_r^2 \neq 0$. 由 (4.15) 和 (4.20) 可见

$$(\mathbb{A} - \text{id})(\mathbb{A} + \text{id})(Z_\alpha) = 0, \quad (\mathbb{A} - \text{id}) \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) = 0, \quad (\mathbb{A} - \text{id})^2(Y_r) = 0,$$

$$(\mathbb{A} - \text{id})^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = -4 \sec u \sum c_r^2 \frac{\partial}{\partial v}, \quad (\mathbb{A} - \text{id})^3 \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = 0,$$

$$(\mathbb{A} - \text{id})^2(\mathbb{A} + \text{id}) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = -8 \sec u \sum c_r^2 \frac{\partial}{\partial v} \neq 0.$$

这说明 $(\mathbb{A} - \text{id})^2(\mathbb{A} + \text{id}) \neq 0$, $(\mathbb{A} - \text{id})^3(\mathbb{A} + \text{id}) = 0$, 即 $\mathbb{A}$ 的最小多项式是 $(\lambda - 1)^3(\lambda + 1)$. $\square$

注 4.3 因为 (4.1) 中的标架 $\{E_1, E_2, E_0, E_r, E_\alpha, E_{n+1}\}$ 依赖于函数 $C_0, C_r, C_\alpha, C_{n+1}, B_{r\alpha}$ 和 $B_{r,n+1}$ 的选择, III 型非脐 Lorentz 等参超曲面是非常多的.

当 $p = n$ 时, 以上各式中指标含 α, β 和 γ 的项消失. 记 $D_r = B_{r,n+1}$, 则 (4.1) 成为

$$\begin{cases} E'_1 = C_0 E_0 + \sum C_s E_s + C_{n+1} E_{n+1}, \\ E'_2 = E_0, \\ E'_0 = E_1 + C_0 E_2, \\ E'_r = C_r E_2 + D_r E_{n+1}, \\ E'_{n+1} = C_{n+1} E_2 - \sum D_s E_s. \end{cases} \quad (4.21)$$

此时, $\Omega = I \times \mathbb{R} \times S^{n-2} \times \{E_{n+1}\}$, $M = \Omega \setminus K_1$, 由 (4.6) 定义的函数

$$x = x(t, v, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(v E_2 + y^0 E_0 + \sum y^r E_r + E_{n+1} \right), \quad (4.22)$$

而 (4.13) 成为

$$e_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(v - 2\psi \sec u) E_2 + y^0 E_0 + \sum y^r E_r - E_{n+1} \right], \quad (4.23)$$

其中 $\psi = \sum y^r D_r$, $\sec u = 1/y^0$.

定理 4.4 设 $\{E_1, E_2, E_0, E_r, E_{n+1}\}$ 是满足 (4.21) 的单参数伪么正标架, 其中 $\sum D_r^2 > 0$, 则由 (4.22) 定义的 $x: M \rightarrow S_1^{n+1}$ 是一个浸入, 除了一个零测度集 $K = \{(t, v, y) \in M \mid \sum y^r D_r = 0\}$ 之外, $x(M)$ 是 S_1^{n+1} 中的 III 型全脐 Lorentz 等参超曲面, 形算子的最小多项式是 $(\lambda - 1)^3$.

由 (4.22) 和 (4.23) 得到

$$\tilde{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x + e_{n+1}) = \tilde{v} E_2 + y^0 E_0 + \sum y^r E_r, \quad (4.24)$$

其中 $\tilde{v} = v - \psi \sec u$. 因此有下面的推论, 它本质上是文献 [12] 中的定理 2.2. 特别地, 当 $n = 3$ 时得到文献 [13] 中的定理 1.

推论 4.5 由 (4.24) 定义的 $\tilde{x}: M \rightarrow S_1^{n+1}$ 是一个浸入, 除了一个零测度集 K 之外, $\tilde{x}(M)$ 是 S_1^{n+1} 中的 III 型全脐 Lorentz 等参超曲面, 形算子的最小多项式是 λ^3 .

当 $p = 3$ 时, $r, s, t = 3$. 记 $D_\alpha = B_{3\alpha}$, $D_{n+1} = B_{3,n+1}$, 则 $\sum D_\alpha^2 + D_{n+1}^2 > 0$. 重新选取子丛 $W = \text{span}\{E_4, \dots, E_{n+1}\}$ 的标架, 可以使得单参数伪么正标架 $\{E_1, E_2, E_0, E_3, E_4, \dots, E_{n+1}\}$ 满足

$$\begin{cases} E'_1 = C_0 E_0 + C_3 E_3 + C_4 E_4 + C_5 E_5 + \dots + C_{n+1} E_{n+1}, \\ E'_2 = E_0, \\ E'_0 = E_1 + C_0 E_2, \\ E'_3 = C_3 E_2 - D_4 E_4, \\ E'_4 = C_4 E_2 + D_4 E_3 + D_5 E_5 + \dots + D_{n+1} E_{n+1}, \\ E'_5 = C_5 E_2 - D_5 E_4, \\ \vdots \\ E'_{n+1} = C_{n+1} E_2 - D_{n+1} E_4. \end{cases} \quad (4.25)$$

此时, $\Omega = I \times \mathbb{R} \times S^1 \times S^{n-3}$. 在 $M = \Omega \setminus K_1$ 上, $y = (y^0, y^3) = (\cos u, \sin u)$, $u \in (-\pi/2, \pi/2)$. 定义映射 $x: M \rightarrow S_1^{n+1}$, 其中

$$x = x(t, v, u, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(v E_2 + \cos u E_0 + \sin u E_3 + \sum z^\alpha E_\alpha + z^{n+1} E_{n+1} \right). \quad (4.26)$$

于是有下面的存在性定理, 该定理的详细证明参见文献 [14].

定理 4.6 设 $\{E_1, E_2, E_0, E_3, E_4, \dots, E_{n+1}\}$ 是满足 (4.25) 的单参数伪么正标架, 其中 $D_4 \neq 0$, 则由 (4.26) 定义的 $x: M \rightarrow S_1^{n+1}$ 是一个浸入, 除了一个零测度集 $K = \{(t, v, u, z) \in M \mid u = 0, z^4 = 0\}$ 之外, $x(M)$ 是 S_1^{n+1} 中的 III 型全脐 Lorentz 等参超曲面, 形算子的最小多项式是 $(\lambda - 1)^3(\lambda + 1)$.

5 III 型 Lorentz 等参超曲面的唯一性

本节研究 III 型 Lorentz 等参超曲面的唯一性. 设 M 是 S_1^{n+1} 中的 III 型 Lorentz 等参超曲面. 根据注 3.4, 通过考虑 M 的平行超曲面, 可以假设形算子 $\mathbb{A}$ 的最小多项式为 $(\lambda - 1)^3$, 或 $(\lambda - 1)^3(\lambda + 1)$. 先看 M 非脐的情形, 即 $3 < p < n$. 下面指标的取值范围是

$$i, j, k, \dots = 4, \dots, p, \quad \alpha, \beta, \gamma, \dots = p + 1, \dots, n.$$

5.1 基本公式的简化

根据引理 3.2, 基本公式 (2.2) 中 $\omega_{2\alpha} = 0$. 采用分块矩阵的记法, (2.2) 简化为

$$\begin{pmatrix} de_0 \\ de_1 \\ de_2 \\ de_3 \\ de_i \\ de_\alpha \\ de_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_j & \omega_\beta & 0 \\ \omega_2 & \omega_{11} & 0 & \omega_{13} & \omega_{1j} & \omega_{1\beta} & \omega_2 + \omega_3 \\ \omega_1 & 0 & -\omega_{11} & \omega_{23} & \omega_{2j} & 0 & \omega_1 \\ -\omega_3 & \omega_{23} & \omega_{13} & 0 & \omega_{3j} & \omega_{3\beta} & -(\omega_3 - \omega_1) \\ -\omega_i & \omega_{2i} & \omega_{1i} & -\omega_{3i} & \omega_{ij} & \omega_{i\beta} & -\omega_i \\ -\omega_\alpha & 0 & \omega_{1\alpha} & -\omega_{3\alpha} & -\omega_{j\alpha} & \omega_{\alpha\beta} & \omega_\alpha \\ 0 & \omega_1 & \omega_2 + \omega_3 & \omega_3 - \omega_1 & \omega_j & -\omega_\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_j \\ e_\beta \\ e_{n+1} \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

其中 $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$. 令

$$\bar{e}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 + e_{n+1}), \quad \bar{e}_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 - e_{n+1}), \quad (5.2)$$

则 $\{\bar{e}_0, e_1, e_2, e_3, e_i, e_\alpha, \bar{e}_{n+1}\}$ 也是 $\mathbb{R}^{n+2}$ 的局部伪正交标架, 满足下面的运动方程:

$$\begin{pmatrix} d\bar{e}_0 \\ de_1 \\ de_2 \\ de_3 \\ de_i \\ de_\alpha \\ d\bar{e}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_j & 0 & 0 \\ \theta_2 & \omega_{11} & 0 & \omega_{13} & \omega_{1j} & \omega_{1\beta} & -\frac{1}{4}(\theta_1 + 2\theta_3) \\ \theta_1 & 0 & -\omega_{11} & \omega_{23} & \omega_{2j} & 0 & 0 \\ -\theta_3 & \omega_{23} & \omega_{13} & 0 & \omega_{3j} & \omega_{3\beta} & -\frac{1}{2}\theta_1 \\ -\theta_i & \omega_{2i} & \omega_{1i} & -\omega_{3i} & \omega_{ij} & \omega_{i\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{1\alpha} & -\omega_{3\alpha} & -\omega_{j\alpha} & \omega_{\alpha\beta} & -\theta_\alpha \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}(\theta_1 + 2\theta_3) & \frac{1}{2}\theta_1 & 0 & \theta_\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e}_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_j \\ e_\beta \\ \bar{e}_{n+1} \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

其中

$$\theta_1 = \sqrt{2}\omega_1, \quad \theta_2 = \sqrt{2}\omega_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_3, \quad \theta_3 = \sqrt{2}\omega_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_1, \quad \theta_i = \sqrt{2}\omega_i, \quad \theta_\alpha = \sqrt{2}\omega_\alpha. \quad (5.4)$$

由此可得

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_1, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\theta_2 - \frac{1}{2}\theta_3 - \frac{1}{4}\theta_1\right), \quad \omega_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\theta_3 + \frac{1}{2}\theta_1\right), \quad \omega_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_i, \quad \omega_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_\alpha. \quad (5.5)$$

因此, $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_i, \theta_\alpha\}$ 也是 T^*M 的局部标架.

取 (5.3) 的外微分, 列出所要用的公式, 有

$$d\theta_1 = -\omega_{11} \wedge \theta_1 - \omega_{23} \wedge \theta_3 - \sum \omega_{2i} \wedge \theta_i, \quad (5.6)$$

$$2d\theta_1 = \omega_{23} \wedge (\theta_1 + 2\theta_3) + 4 \sum \omega_{3\alpha} \wedge \theta_\alpha, \quad (5.7)$$

$$\omega_{1\alpha} \wedge \theta_1 + \omega_{3\alpha} \wedge \theta_3 + \sum \omega_{i\alpha} \wedge \theta_i = 0, \quad \omega_{23} \wedge \omega_{3\alpha} + \sum \omega_{2i} \wedge \omega_{i\alpha} = 0, \quad (5.8)$$

$$\omega_{23} \wedge \theta_1 = 0, \quad \omega_{2i} \wedge (\theta_1 + 2\theta_3) - 2\omega_{3i} \wedge \theta_1 + 4 \sum \omega_{i\alpha} \wedge \theta_\alpha = 0. \quad (5.9)$$

将 (5.6) 代入 (5.7) 得到

$$(2\omega_{11} + \omega_{23}) \wedge \theta_1 + 4\omega_{23} \wedge \theta_3 + 2 \sum \omega_{2i} \wedge \theta_i + 4 \sum \omega_{3\alpha} \wedge \theta_\alpha = 0. \quad (5.10)$$

由 (5.9) 第 1 式, 可设

$$\omega_{23} = \lambda_3 \theta_1. \quad (5.11)$$

由 (5.8) 第 1 式和 (5.9) 第 2 式可知, $\sum \omega_{i\alpha} \wedge \theta_i \wedge \theta_1 \wedge \theta_3 = 0$, $\sum \omega_{i\alpha} \wedge \theta_\alpha \wedge \theta_1 \wedge \theta_3 = 0$. 故可设

$$\omega_{i\alpha} = B_{i\alpha} \theta_1 + C_{i\alpha} \theta_3. \quad (5.12)$$

从而, 由 (5.9) 第 2 式, 有 $\omega_{2i} \wedge \theta_3 \wedge \theta_1 + 2 \sum C_{i\alpha} \theta_3 \wedge \theta_\alpha \wedge \theta_1 = 0$, 可设

$$\omega_{2i} = \lambda_i \theta_1 + C_i \theta_3 + 2 \sum C_{i\alpha} \theta_\alpha. \quad (5.13)$$

由 (5.8) 第 1 式和 (5.12), 有 $(\omega_{3\alpha} - \sum C_{i\alpha} \theta_i) \wedge \theta_3 \wedge \theta_1 = 0$. 故可设

$$\omega_{3\alpha} = B_{3\alpha} \theta_1 + \mu_\alpha \theta_3 + \sum C_{i\alpha} \theta_i. \quad (5.14)$$

由 (5.10) 和 (5.11) 可知, $\sum \omega_{2i} \wedge \theta_i \wedge \theta_1 + 2 \sum \omega_{3\alpha} \wedge \theta_\alpha \wedge \theta_1 = 0$. 将 (5.13) 和 (5.14) 代入其中得到 $C_i = \mu_\alpha = 0$. 因此, $\omega_{2i} = \lambda_i \theta_1 + 2 \sum C_{i\alpha} \theta_\alpha$, $\omega_{3\alpha} = B_{3\alpha} \theta_1 + \sum C_{i\alpha} \theta_i$. 将此 2 式及 (5.11) 和 (5.12) 代入 (5.8) 第 2 式, 有

$$\lambda_3 \theta_1 \wedge \sum C_{i\alpha} \theta_i + \sum \left(\lambda_i \theta_1 + 2 \sum C_{i\beta} \theta_\beta \right) \wedge (B_{i\alpha} \theta_1 + C_{i\alpha} \theta_3) = 0.$$

上式中 $\theta_\alpha \wedge \theta_3$ 的系数 $2C_{i\alpha}^2 = 0$. 因此, (5.11)–(5.14) 成为

$$\omega_{23} = \lambda_3 \theta_1, \quad \omega_{2i} = \lambda_i \theta_1, \quad \omega_{3\alpha} = B_{3\alpha} \theta_1, \quad \omega_{i\alpha} = B_{i\alpha} \theta_1 \quad (5.15)$$

(为避免过多的符号, 上面的 $B_{3\alpha}$ 和 $B_{i\alpha}$ 不是 (4.1) 中的 $B_{r\alpha}$). 将上式代入 (5.9) 第 2 式和 (5.6) 得

$$\left(\omega_{3i} + \lambda_i \theta_3 + 2 \sum B_{i\alpha} \theta_\alpha \right) \wedge \theta_1 = 0, \quad (5.16)$$

$$d\theta_1 = \left(\lambda_3 \theta_3 + \sum \lambda_i \theta_i - \omega_{11} \right) \wedge \theta_1. \quad (5.17)$$

将 (5.15) 代入 (5.3), 再取外微分. 另一方面, 取 (5.15) 的外微分, 利用 (5.15)–(5.17) 可得

$$\begin{cases} \left[d\lambda_3 + \left(1 + \lambda_3^2 + \sum \lambda_i^2 \right) \theta_3 + \lambda_3 \sum \lambda_i \theta_i + 2 \sum \lambda_i B_{i\alpha} \theta_\alpha \right] \wedge \theta_1 = 0, \\ \left(d\lambda_i + \lambda_i \sum \lambda_j \theta_j - 2\lambda_3 \sum B_{i\alpha} \theta_\alpha - \sum \lambda_j \omega_{ij} + \theta_i \right) \wedge \theta_1 = 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

这说明在任何开集上, λ_3 和 $\sum \lambda_i^2$ 不恒为零. 因此可选取标架 $\{\bar{e}_0, e_1, e_2, e_3, e_i, e_\alpha, \bar{e}_{n+1}\}$ 中的 $e_4, \dots, e_p$, 使得 $\lambda_4 > 0, \lambda_j = 0 (j > 4)$. 由 (5.17) 和 (5.18), 有

$$d\theta_1 = (\lambda_3\theta_3 + \lambda_4\theta_4 - \omega_{11}) \wedge \theta_1, \quad (5.19)$$

$$\begin{cases} \left[d\lambda_3 + (1 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2)\theta_3 + \lambda_3\lambda_4\theta_4 + 2\lambda_4 \sum B_{4\alpha}\theta_\alpha \right] \wedge \theta_1 = 0, \\ \left[d\lambda_4 + (1 + \lambda_4^2)\theta_4 - 2\lambda_3 \sum B_{4\alpha}\theta_\alpha \right] \wedge \theta_1 = 0. \end{cases} \quad (5.20)$$

用 λ_3 乘 (5.20) 第 1 式, λ_4 乘 (5.20) 第 2 式, 相加可得

$$(du + \lambda_3\theta_3 + \lambda_4\theta_4) \wedge \theta_1 = 0, \quad (5.21)$$

其中 $u = \ln \sqrt{1 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2}$. 由 $\lambda_3 \neq 0$ 和 $\lambda_4 > 0$, 有

$$e^{2u} = 1 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 > 1. \quad (5.22)$$

5.2 局部坐标和局部标架

下面指标 $i = 4, \dots, p, j, k = 5, \dots, p$. 当 $p = 4$ 时, 指标含有 j 和 k 的项消失.

根据 (5.19), 存在 M 的局部坐标 $(t (= x^1), x^2, \dots, x^n)$, 使得

$$\theta_1 = e^{f-u} dt, \quad (5.23)$$

其中 f 是局部定义的函数, 则 $d\theta_1 = (df - du) \wedge \theta_1$. 由 (5.19) 和 (5.21), 有 $(df + \omega_{11}) \wedge \theta_1 = 0$. 故可设

$$df + \omega_{11} = e^{-f}\theta_1 = e^{-u}dt. \quad (5.24)$$

引理 5.1 存在局部坐标 $(t, x^2, \dots, x^n)$ 和局部伪么正标架 $\{\bar{e}_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_j, e_\alpha, \bar{e}_{n+1}\}$, 使得

$$\begin{pmatrix} d\bar{e}_0 \\ de_1 \\ de_2 \\ de_3 \\ de_4 \\ de_j \\ de_\alpha \\ d\bar{e}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_k & 0 & 0 \\ \theta_2 & a\theta_1 & 0 & \omega_{13} & \omega_{14} & \omega_{1k} & \omega_{1\beta} & \omega_{1,n+1} \\ \theta_1 & 0 & -a\theta_1 & \lambda_3\theta_1 & \lambda_4\theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\theta_3 & \lambda_3\theta_1 & \omega_{13} & 0 & \omega_{34} & \omega_{3k} & B_{3\beta}\theta_1 & B_{3,n+1}\theta_1 \\ -\theta_4 & \lambda_4\theta_1 & \omega_{14} & -\omega_{34} & 0 & \omega_{4k} & B_{4\beta}\theta_1 & 0 \\ -\theta_j & 0 & \omega_{1j} & -\omega_{3j} & -\omega_{4j} & \omega_{jk} & \omega_{j\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{1\alpha} & -B_{3\alpha}\theta_1 & -B_{4\alpha}\theta_1 & -\omega_{j\alpha} & \omega_{\alpha\beta} & -\theta_\alpha \\ 0 & 0 & \omega_{1,n+1} & -B_{3,n+1}\theta_1 & 0 & 0 & \theta_\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e}_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_k \\ e_\beta \\ \bar{e}_{n+1} \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

其中 $\lambda_3 \neq 0, \lambda_4 > 0, \bar{e}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 + e_{n+1}), \bar{e}_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 - e_{n+1}),$

$$\theta_1 = e^{-u}dt, \quad \omega_{1,n+1} = -\frac{1}{4}e^f(e^f\theta_1 + 2\theta_3), \quad B_{3,n+1} = -\frac{1}{2}e^f. \quad (5.26)$$

证明 因为 $\omega_{24} = \lambda_4\theta_1, \omega_{2j} = 0$, 由 (5.15) 和 (5.3) 得

$$de_2 = -\omega_{11}e_2 + \theta_1(\bar{e}_0 + \lambda_3e_3 + \lambda_4e_4). \quad (5.27)$$

令

$$\tilde{e}_1 = e^f e_1, \quad \tilde{e}_2 = e^{-f} e_2, \quad \tilde{\theta}_1 = e^{-f} \theta_1 = e^{-u} dt, \quad \tilde{\theta}_2 = e^f \theta_2, \quad (5.28)$$

则 $\{\bar{e}_0, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, e_3, e_4, e_j, e_\alpha, \bar{e}_{n+1}\}$ 也是 $\mathbb{R}_1^{n+2}$ 的局部伪正交标架, 而 $\{\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \theta_3, \theta_4, \theta_j, \theta_\alpha\}$ 仍是 T^*M 的局部标架. 由 (5.27)、(5.28) 和 (5.24), 有

$$d\tilde{e}_2 = -(df + \omega_{11})\tilde{e}_2 + e^{-f}\theta_1(\bar{e}_0 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4) = e^{-u}dt(\bar{e}_0 - a\tilde{e}_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4).$$

类似地, 由 (5.28), 根据 (5.3) 计算可得

$$\begin{aligned} d\tilde{e}_1 &= \tilde{\theta}_2 \bar{e}_0 + a\tilde{\theta}_1 \tilde{e}_1 + \tilde{\omega}_{13} e_3 + \sum \tilde{\omega}_{1i} e_i + \sum \tilde{\omega}_{1\alpha} e_\alpha + \omega_{1,n+1} \bar{e}_{n+1}, \\ d\bar{e}_0 &= \tilde{\theta}_1 \tilde{e}_1 + \tilde{\theta}_2 \tilde{e}_2 + \theta_3 e_3 + \sum \theta_i e_i, \quad d\bar{e}_{n+1} = \omega_{1,n+1} \tilde{e}_2 + \frac{1}{2} e^f \tilde{\theta}_1 e_3 + \sum \theta_\beta e_\beta, \\ de_3 &= -\theta_3 \bar{e}_0 + \lambda_3 \tilde{\theta}_1 \tilde{e}_1 + \tilde{\omega}_{13} \tilde{e}_2 + \sum \omega_{3k} e_k + \tilde{\theta}_1 \sum \tilde{B}_{3\beta} e_\beta - \frac{1}{2} e^f \tilde{\theta}_1 \bar{e}_{n+1}, \end{aligned}$$

其中

$$\tilde{\omega}_{13} = e^f \omega_{13}, \quad \tilde{\omega}_{1i} = e^f \omega_{1i}, \quad \tilde{\omega}_{1\alpha} = e^f \omega_{1\alpha}, \quad \omega_{1,n+1} = -\frac{1}{4} e^f (e^f \tilde{\theta}_1 + 2\theta_3), \quad \tilde{B}_{3\beta} = e^f B_{3\beta}.$$

略去修饰符 $\sim$, 就得到引理 5.1. □

外微分 (5.25), 利用 (5.26) 第 1 式, 有

$$d\theta_1 = (\lambda_3 \theta_3 + \lambda_4 \theta_4) \wedge \theta_1 = -du \wedge \theta_1, \quad (5.29)$$

$$(da - adu) \wedge \theta_1 = (\theta_2 + \lambda_3 \omega_{13} + \lambda_4 \omega_{14}) \wedge \theta_1, \quad (5.30)$$

$$(d\lambda_3 - \lambda_3 du + \theta_3 - \lambda_4 \omega_{34}) \wedge \theta_1 = 0, \quad (d\lambda_4 - \lambda_4 du + \theta_4 + \lambda_3 \omega_{34}) \wedge \theta_1 = 0, \quad (5.31)$$

$$(\theta_k + \lambda_3 \omega_{3k} + \lambda_4 \omega_{4k}) \wedge \theta_1 = 0, \quad (5.32)$$

$$\left(\omega_{1\alpha} - B_{3\alpha} \theta_3 - B_{4\alpha} \theta_4 - \sum B_{k\alpha} \theta_k \right) \wedge \theta_1 = 0, \quad (\omega_{1,n+1} - B_{3,n+1} \theta_3) \wedge \theta_1 = 0, \quad (5.33)$$

$$\begin{cases} d\theta_3 = (\lambda_3 \theta_2 - \omega_{13}) \wedge \theta_1 + \omega_{34} \wedge \theta_4 + \sum \omega_{3k} \wedge \theta_k, \\ d\theta_4 = (\lambda_4 \theta_2 - \omega_{14}) \wedge \theta_1 - \omega_{34} \wedge \theta_3 + \sum \omega_{4k} \wedge \theta_k, \end{cases} \quad (5.34)$$

$$\begin{cases} \left(dB_{3\alpha} - B_{3\alpha} du + \lambda_3 \omega_{1\alpha} - B_{4\alpha} \omega_{34} - \sum B_{k\alpha} \omega_{3k} + \sum B_{3\beta} \omega_{\beta\alpha} + B_{3,n+1} \theta_\alpha \right) \wedge \theta_1 = 0, \\ \left(dB_{4\alpha} - B_{4\alpha} du + \lambda_4 \omega_{1\alpha} + B_{3\alpha} \omega_{34} - \sum B_{k\alpha} \omega_{4k} + \sum B_{4\beta} \omega_{\beta\alpha} \right) \wedge \theta_1 = 0, \end{cases} \quad (5.35)$$

$$\begin{cases} \left(dB_{3,n+1} - B_{3,n+1} du + \lambda_3 \omega_{1,n+1} - \sum B_{3\alpha} \theta_\alpha \right) \wedge \theta_1 = 0, \\ \left(B_{3,n+1} \omega_{34} + \lambda_4 \omega_{1,n+1} - \sum B_{4\alpha} \theta_\alpha \right) \wedge \theta_1 = 0. \end{cases} \quad (5.36)$$

由 (5.29)–(5.32), 可设

$$\begin{cases} du + \lambda_3 \theta_3 + \lambda_4 \theta_4 + a\theta_1 = \nu e^u dt, \\ \theta_2 + \lambda_3 \omega_{13} + \lambda_4 \omega_{14} + adu - da + a^2 \theta_1 = b e^u dt, \\ d\lambda_3 - \lambda_3 du + \theta_3 - \lambda_4 \omega_{34} - a\lambda_3 \theta_1 = \mu_3 e^u dt, \\ d\lambda_4 - \lambda_4 du + \theta_4 + \lambda_3 \omega_{34} - a\lambda_4 \theta_1 = \mu_4 e^u dt, \\ \theta_k + \lambda_3 \omega_{3k} + \lambda_4 \omega_{4k} = \mu_k e^u dt. \end{cases} \quad (5.37)$$

再设

$$\mu_\alpha = e^{-2u}(\lambda_3 B_{3\alpha} + \lambda_4 B_{4\alpha}), \quad \mu_{n+1} = e^{-2u} \lambda_3 B_{3,n+1}. \quad (5.38)$$

由 (5.37) 的第 3 和 4 式消去 ω_{34} , 根据 (5.22) 和 (5.37) 的第 1 式可得 $v - a = \lambda_3 \mu_3 + \lambda_4 \mu_4$, 即有

$$a = v - \lambda_3 \mu_3 - \lambda_4 \mu_4. \quad (5.39)$$

取 (5.37) 第 1 式的外微分, 利用 (5.34) 和 (5.37) 可得

$$\left(\theta_2 - dv - \mu_3 \theta_3 - \mu_4 \theta_4 - \sum \mu_k \theta_k \right) \wedge \theta_1 = 0.$$

故可设

$$\theta_2 - dv - \mu_3 \theta_3 - \mu_4 \theta_4 - \sum \mu_k \theta_k + (b - C_0) \theta_1 = c_0 \theta_1. \quad (5.40)$$

利用 (5.22)、(5.32) 和 (5.33), 由 (5.31) 和 (5.35) 可得

$$\left[d(\lambda_3 B_{3\alpha} + \lambda_4 B_{4\alpha}) - 2(\lambda_3 B_{3\alpha} + \lambda_4 B_{4\alpha}) du + e^{2u} \omega_{1\alpha} + \sum (\lambda_3 B_{3\beta} + \lambda_4 B_{4\beta}) \omega_{\beta\alpha} + \lambda_3 B_{3,n+1} \theta_\alpha \right] \wedge \theta_1 = 0.$$

根据 (5.38), 上式说明 $(d\mu_\alpha + \omega_{1\alpha} + \sum \mu_\beta \omega_{\beta\alpha} + \mu_{n+1} \theta_\alpha) \wedge \theta_1 = 0$, 可设

$$d\mu_\alpha + \omega_{1\alpha} + \sum \mu_\beta \omega_{\beta\alpha} + \mu_{n+1} \theta_\alpha + \left(\mu_3 B_{3\alpha} + \mu_4 B_{4\alpha} + \sum \mu_k B_{k\alpha} \right) \theta_1 = c_\alpha \theta_1. \quad (5.41)$$

同理, 利用 (5.22) 和 (5.33), 由 (5.31) 和 (5.36) 可得

$$\left[d(\lambda_3 B_{3,n+1}) - 2\lambda_3 B_{3,n+1} du + e^{2u} \omega_{1,n+1} - e^{2u} \sum \mu_\alpha \theta_\alpha \right] \wedge \theta_1 = 0.$$

根据 (5.38), 上式说明 $(d\mu_{n+1} + \omega_{1,n+1} - \sum \mu_\alpha \theta_\alpha) \wedge \theta_1 = 0$, 可设

$$d\mu_{n+1} + \omega_{1,n+1} - \sum \mu_\alpha \theta_\alpha + \mu_3 B_{3,n+1} \theta_1 = c_{n+1} \theta_1. \quad (5.42)$$

根据 (5.26), $\omega_{1,n+1} \wedge \theta_1 \wedge \theta_3 = 0$, 所以有

$$\left(d\mu_{n+1} - \sum \mu_\alpha \theta_\alpha \right) \wedge \theta_1 \wedge \theta_3 = 0. \quad (5.43)$$

由 (5.25) 和 (5.26) 可知, $de_2 = e^{-u}(\bar{e}_0 - ae_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4)dt$. 所以, e_2 仅依赖于 t . 令

$$E_2 = E_2(t) = e_2, \quad E_0 = E_0(t) = E'_2 = e^{-u}(\bar{e}_0 - ae_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4). \quad (5.44)$$

由 (5.22) 可见 E_0 是单位向量函数, 所以,

$$\langle E_2, E_2 \rangle = \langle E_2, E_0 \rangle = 0, \quad \langle E_0, E_0 \rangle = 1, \quad \langle E'_0, E_2 \rangle = -\langle E_0, E'_2 \rangle = -1. \quad (5.45)$$

利用 (5.37), 从 (5.25) 得到

$$E'_0 = -v\bar{e}_0 + e_1 + be_2 + \mu_3 e_3 + \mu_4 e_4 + \sum \mu_k e_k + \sum \mu_\beta e_\beta + \mu_{n+1} \bar{e}_{n+1}.$$

令

$$C_0 = C_0(t) = -\frac{1}{2} \langle E'_0, E'_0 \rangle = -\frac{1}{2} \left(v^2 - 2b + \mu_3^2 + \mu_4^2 + \sum \mu_k^2 + \sum \mu_\alpha^2 + \mu_{n+1}^2 \right), \quad (5.46)$$

$$E_1 = E'_0 - C_0 E_2 = -v\bar{e}_0 + e_1 + (b - C_0)e_2 + \mu_3 e_3 + \mu_4 e_4 + \sum \mu_k e_k + \sum \mu_\alpha e_\alpha + \mu_{n+1} \bar{e}_{n+1}. \quad (5.47)$$

则由 (5.45), 有

$$\langle E_1, E_1 \rangle = \langle E'_0, E'_0 \rangle + 2C_0 = 0, \quad \langle E_1, E_2 \rangle = -1, \quad \langle E_1, E_0 \rangle = 0. \quad (5.48)$$

由定义式 (5.44) 和 (5.47) 直接计算 $\langle E_1, E_0 \rangle$ 可知, $\langle E_1, E_0 \rangle = 0$ 与 (5.39) 是等价的.

将 (5.39) 代入 (5.44) 第 2 式, E_0 可表达成

$$E_0 = e^{-u}[(\bar{e}_0 - ve_2) + \lambda_3(e_3 + \mu_3 e_2) + \lambda_4(e_4 + \mu_4 e_2)]. \quad (5.49)$$

这提示我们取 $\mathbb{R}_1^{n+2}$ 的伪么正标架 $\{E_1, E_2, \tilde{e}_0, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4, \tilde{e}_k, \tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_{n+1}\}$, 其中 E_1 由 (5.47) 定义, $E_2 = e_2$, 而

$$\begin{aligned} \tilde{e}_0 &= \bar{e}_0 - ve_2, & \tilde{e}_3 &= e_3 + \mu_3 e_2, & \tilde{e}_4 &= e_4 + \mu_4 e_2, \\ \tilde{e}_k &= e_k + \mu_k e_2, & \tilde{e}_\alpha &= e_\alpha + \mu_\alpha e_2, & \tilde{e}_{n+1} &= \bar{e}_{n+1} + \mu_{n+1} e_2. \end{aligned} \quad (5.50)$$

反过来, 由上可得

$$\begin{aligned} e_1 &= v\tilde{e}_0 + E_1 + (b - C_0)E_2 - \mu_3 \tilde{e}_3 - \mu_4 \tilde{e}_4 - \sum \mu_k \tilde{e}_k - \sum \mu_\alpha \tilde{e}_\alpha - \mu_{n+1} \tilde{e}_{n+1}, \\ e_2 &= E_2, \quad \bar{e}_0 = \tilde{e}_0 + vE_2, \quad e_3 = \tilde{e}_3 - \mu_3 E_2, \quad e_4 = \tilde{e}_4 - \mu_4 E_2, \\ e_k &= \tilde{e}_k - \mu_k E_2, \quad e_\alpha = \tilde{e}_\alpha - \mu_\alpha E_2, \quad \bar{e}_{n+1} = \tilde{e}_{n+1} - \mu_{n+1} E_2. \end{aligned} \quad (5.51)$$

下面来推导标架 $\{E_1, E_2, \tilde{e}_0, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4, \tilde{e}_k, \tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_{n+1}\}$ 的运动方程.

首先, 由 (5.44)、(5.49) 和 (5.50), 注意到 $\theta_1 = e^{-u}dt$, 有

$$dE_2 = E_0 dt = \theta_1(\tilde{e}_0 + \lambda_3 \tilde{e}_3 + \lambda_4 \tilde{e}_4). \quad (5.52)$$

同时, 根据 (5.25) 和 (5.40)–(5.42), 由 (5.50) 和 (5.51) 可得

$$d\tilde{e}_0 = \theta_1 E_1 + c_0 \theta_1 E_2 + \tilde{\theta}_3 \tilde{e}_3 + \tilde{\theta}_4 \tilde{e}_4 + \sum \tilde{\theta}_k \tilde{e}_k - \theta_1 \sum \mu_\alpha \tilde{e}_\alpha - \mu_{n+1} \theta_1 \tilde{e}_{n+1}, \quad (5.53)$$

$$\begin{cases} d\tilde{e}_\alpha = c_\alpha \theta_1 E_2 + \mu_\alpha \theta_1 \tilde{e}_0 - \tilde{B}_{3\alpha} \theta_1 \tilde{e}_3 - \tilde{B}_{4\alpha} \theta_1 \tilde{e}_4 - \theta_1 \sum B_{k\alpha} \tilde{e}_k + \sum \omega_{\alpha\beta} \tilde{e}_\beta - \theta_\alpha \tilde{e}_{n+1}, \\ d\tilde{e}_{n+1} = c_{n+1} \theta_1 E_2 + \mu_{n+1} \theta_1 \tilde{e}_0 - \tilde{B}_{3,n+1} \theta_1 \tilde{e}_3 - \tilde{B}_{4,n+1} \theta_1 \tilde{e}_4 + \sum \theta_\alpha \tilde{e}_\alpha, \end{cases} \quad (5.54)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_3 &= \theta_3 - (v\lambda_3 + \mu_3)\theta_1, & \tilde{\theta}_4 &= \theta_4 - (v\lambda_4 + \mu_4)\theta_1, & \tilde{\theta}_k &= \theta_k - \mu_k \theta_1, \\ \tilde{B}_{3\alpha} &= B_{3\alpha} - \lambda_3 \mu_\alpha, & \tilde{B}_{4\alpha} &= B_{4\alpha} - \lambda_4 \mu_\alpha, & \tilde{B}_{3,n+1} &= B_{3,n+1} - \lambda_3 \mu_{n+1}, & \tilde{B}_{4,n+1} &= -\lambda_4 \mu_{n+1}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

其次, 因为 $E_1 = E_1(t)$ 是类光向量, $\langle dE_1, E_1 \rangle = 0$, 并且由 (5.52) 和 (5.53), 有

$$\langle dE_1, E_2 \rangle = 0, \quad \langle dE_1, \tilde{e}_0 \rangle = c_0 \theta_1, \quad \langle dE_1, \tilde{e}_\alpha \rangle = c_\alpha \theta_1, \quad \langle dE_1, \tilde{e}_{n+1} \rangle = c_{n+1} \theta_1,$$

所以可设

$$dE_1 = \theta_1 \left(c_0 \tilde{e}_0 + c_3 \tilde{e}_3 + c_4 \tilde{e}_4 + \sum c_k \tilde{e}_k + \sum c_\alpha \tilde{e}_\alpha + c_{n+1} \tilde{e}_{n+1} \right). \quad (5.56)$$

最后, 利用 (5.52)–(5.54) 和 (5.56), 可设

$$\begin{cases} d\tilde{e}_3 = \lambda_3\theta_1 E_1 + c_3\theta_1 E_2 - \tilde{\theta}_3\tilde{e}_0 + \tilde{\omega}_{34}\tilde{e}_4 + \sum \tilde{\omega}_{3k}\tilde{e}_k + \theta_1 \sum \tilde{B}_{3\alpha}\tilde{e}_\alpha + \tilde{B}_{3,n+1}\theta_1\tilde{e}_{n+1}, \\ d\tilde{e}_4 = \lambda_4\theta_1 E_1 + c_4\theta_1 E_2 - \tilde{\theta}_4\tilde{e}_0 - \tilde{\omega}_{34}\tilde{e}_3 + \sum \tilde{\omega}_{4k}\tilde{e}_k + \theta_1 \sum \tilde{B}_{4\alpha}\tilde{e}_\alpha + \tilde{B}_{4,n+1}\theta_1\tilde{e}_{n+1}, \\ d\tilde{e}_j = c_j\theta_1 E_2 - \tilde{\theta}_j\tilde{e}_0 - \tilde{\omega}_{3j}\tilde{e}_3 - \tilde{\omega}_{4j}\tilde{e}_4 + \sum \tilde{\omega}_{jk}\tilde{e}_k + \theta_1 \sum B_{j\alpha}\tilde{e}_\alpha. \end{cases} \quad (5.57)$$

下面指标 $r, s, t = 3, 4, \dots, p$. 采用分块矩阵记法, 令

$$E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} \tilde{e}_0 \\ \tilde{e}_r \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} \tilde{e}_\alpha \\ \tilde{e}_{n+1} \end{pmatrix}. \quad (5.58)$$

数值函数矩阵 C_1 和 C_2 的分块形式为

$$\begin{aligned} C_1 &= e^{-u} \left(c_0 \middle| \begin{array}{cccc} c_3 & c_4 & c_5 & \cdots & c_p \end{array} \right. \\ &\quad \left. \begin{array}{c} 1 \\ \lambda_3 & \lambda_4 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) =: e^{-u} \begin{pmatrix} c_0 & c_s \\ 1 & \lambda_s \end{pmatrix}, \\ C_2 &= e^{-u} \left(\begin{array}{ccc} c_{p+1} & \cdots & c_n \\ 0 & \cdots & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} c_{n+1} \\ 0 \end{array} \right) =: e^{-u} \begin{pmatrix} c_\beta & c_{n+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.59)$$

其中 $\lambda_k = 0$. 类似地, C_3 、 C_4 和 B 的分块形式为

$$C_3 = C_1^\top \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_4 = C_2^\top \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = e^{-u} \begin{pmatrix} -\mu_\beta & -\mu_{n+1} \\ \tilde{B}_{r\beta} & \tilde{B}_{r,n+1} \end{pmatrix},$$

其中 “ $\top$ ” 表示矩阵的转置, $\tilde{B}_{j\beta} = B_{j\beta}$, $\tilde{B}_{k,n+1} = 0$. 矩阵值 1- 形式 Ω_1 和 Ω_2 的分块形式为

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\theta}_s \\ \tilde{\theta}_r & \tilde{\omega}_{rs} \end{pmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{pmatrix} \omega_{\alpha\beta} & -\theta_\alpha \\ \theta_\beta & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.60)$$

采用上面的分块矩阵记号, 由 (5.56)、(5.52)–(5.54) 和 (5.57), 有下面的引理.

引理 5.2 标架 $\{E_1, E_2, \tilde{e}_0, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4, \tilde{e}_k, \tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_{n+1}\}$ 满足下面的运动方程:

$$\begin{pmatrix} dE \\ dF_1 \\ dF_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & dtC_1 & dtC_2 \\ dtC_3 & \Omega_1 & dtB \\ dtC_4 & -dtB^\top & \Omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}. \quad (5.61)$$

以引理 5.2 为基础, 现在来寻求满足 (4.1) 的单参数伪么正标架 $\{E_1, E_2, E_0, E_r, E_\alpha, E_{n+1}\}$.

取 (5.61) 的外微分, 可见反对称矩阵 Ω_1 和 Ω_2 满足 $d\Omega_1 = \Omega_1 \wedge \Omega_1$, $d\Omega_2 = \Omega_2 \wedge \Omega_2$, 故有正交矩阵值函数 $U_1 \in O(p-1)$, $U_2 \in O(n-p+1)$, 满足

$$dU_1 = -U_1\Omega_1, \quad dU_2 = -U_2\Omega_2. \quad (5.62)$$

令 $\tilde{F}_1 = U_1 F_1$, $\tilde{F}_2 = U_2 F_2$, 则由 (5.61) 和 (5.62), 有

$$\begin{pmatrix} dE \\ d\tilde{F}_1 \\ d\tilde{F}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & dt\tilde{C}_1 & dt\tilde{C}_2 \\ dt\tilde{C}_3 & 0 & dt\tilde{B} \\ dt\tilde{C}_4 & -dt\tilde{B}^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \end{pmatrix}, \quad (5.63)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{C}}_1 = \mathbf{C}_1 \mathbf{U}_1^\top, \quad \tilde{\mathbf{C}}_2 = \mathbf{C}_2 \mathbf{U}_2^\top, \quad \tilde{\mathbf{C}}_3 = \mathbf{U}_1 \mathbf{C}_3, \quad \tilde{\mathbf{C}}_4 = \mathbf{U}_2 \mathbf{C}_4, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{U}_1 \mathbf{B} \mathbf{U}_2^\top.$$

方程 (5.63) 说明 $\tilde{F}_1$ 和 $\tilde{F}_2$ 仅依赖于 t , 从而, $\tilde{\mathbf{C}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{C}}_4, \tilde{\mathbf{B}}$ 也仅依赖于 t . 若设

$$\tilde{F}_1 = \mathbf{U}_1 \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{E}_0 \\ \tilde{E}_r \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_2 = \mathbf{U}_2 \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} E_\alpha \\ E_{n+1} \end{pmatrix}, \quad (5.64)$$

则 $\{E_1, E_2, \tilde{E}_0, \tilde{E}_r, E_\alpha, E_{n+1}\}$ 是平凡丛 $\mathbb{R}_1^{n+2}$ 的仅依赖于 t 的单参数伪么正标架. 上式说明

$$W_1 = \text{span}\{\tilde{E}_0, \tilde{E}_r\} = \text{span}\{\tilde{e}_0, \tilde{e}_r\}, \quad W_2 = \text{span}\{E_\alpha, E_{n+1}\} = \text{span}\{\tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_{n+1}\}, \quad (5.65)$$

它们都是 $\mathbb{R}_1^{n+2}$ 的仅依赖于 t 的欧氏子丛.

引理 5.3 存在 W_1 的仅依赖于 t 的么正标架 $\{E_0, E_r\}$, 使得 $\{E_1, E_2, E_0, E_r, E_\alpha, E_{n+1}\}$ 满足 (4.1), 其中由 (4.5) 定义的矩阵 $B \neq 0$.

证明 根据 (5.59), 可设 (5.63) 中仅依赖于 t 的矩阵

$$\tilde{\mathbf{C}}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{C}_0 & \tilde{C}_s \\ \tilde{D}_0 & \tilde{D}_s \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}}_2 = \mathbf{C}_2 \mathbf{U}_2^\top = \begin{pmatrix} C_\beta & C_{n+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \bar{B}_{0\beta} & \bar{B}_{0,n+1} \\ \bar{B}_{r\beta} & \bar{B}_{r,n+1} \end{pmatrix},$$

则由上式及 (5.63) 和 (5.64), 可得

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} E'_1 \\ E'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_0 & \tilde{C}_s \\ \tilde{D}_0 & \tilde{D}_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_0 \\ \tilde{E}_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_\beta & C_{n+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_\beta \\ E_{n+1} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \tilde{E}'_0 \\ \tilde{E}'_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{D}_0 & \tilde{C}_0 \\ \tilde{D}_r & \tilde{C}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B}_{0\beta} & \bar{B}_{0,n+1} \\ \bar{B}_{r\beta} & \bar{B}_{r,n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_\beta \\ E_{n+1} \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (5.66)$$

因此, 由 (5.44) 第 2 式定义的 $E_0 = E'_2$ 满足

$$E_0 = E'_2 = \tilde{D}_0 \tilde{E}_0 + \sum \tilde{D}_s \tilde{E}_s \in W_1.$$

结合 (5.47) 和 (5.66), 有

$$\begin{aligned} E_1 + C_0 E_2 &= E'_0 \\ &= \tilde{D}'_0 \tilde{E}_0 + \sum \tilde{D}'_s \tilde{E}_s + \left(\tilde{D}_0^2 + \sum \tilde{D}_r^2 \right) E_1 + \left(\tilde{D}_0 \tilde{C}_0 + \sum \tilde{D}_r \tilde{C}_r \right) E_2 \\ &\quad + \sum \left(\tilde{D}_0 \bar{B}_{0\alpha} + \sum \tilde{D}_r \bar{B}_{r\alpha} \right) E_\alpha + \left(\tilde{D}_0 \bar{B}_{0,n+1} + \sum \tilde{D}_r \bar{B}_{r,n+1} \right) E_{n+1}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

这说明 $\tilde{D}_0$ 和 $\tilde{D}_r$ 是常数, 并且 $(\tilde{D}_0, \tilde{D}_3, \dots, \tilde{D}_p) \in S^{p-2}$, 可扩充成 $\mathbb{R}^{p-1}$ 的么正基, 得到常数正交矩阵

$$U_0 = \begin{pmatrix} \tilde{D}_0 & \tilde{D}_s \\ \tilde{D}_{r0} & \tilde{D}_{rs} \end{pmatrix} \in O(p-1).$$

取 W_1 的仅依赖于 t 的么正标架 $\{E_0, E_r\}$, 其中

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ E_r \end{pmatrix} = U_0 \begin{pmatrix} \tilde{E}_0 \\ \tilde{E}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{D}_0 & \tilde{D}_s \\ \tilde{D}_{r0} & \tilde{D}_{rs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_0 \\ \tilde{E}_s \end{pmatrix}. \quad (5.68)$$

由 (5.63)、(5.66) 和 (5.67) 可知标架 $\{E_1, E_2, E_0, E_r, E_\alpha, E_{n+1}\}$ 满足 (4.1), 其中

$$\begin{aligned} C_0 &= \tilde{D}_0 \tilde{C}_0 + \sum \tilde{D}_s \tilde{C}_s, & C_r &= \tilde{D}_{r0} \tilde{C}_0 + \sum \tilde{D}_{rs} \tilde{C}_s, \\ B_{r\alpha} &= \tilde{D}_{r0} \bar{B}_{0\alpha} + \sum \tilde{D}_{rs} \bar{B}_{s\alpha}, & B_{r,n+1} &= \tilde{D}_{r0} \bar{B}_{0,n+1} + \sum \tilde{D}_{rs} \bar{B}_{s,n+1}. \end{aligned}$$

还要证明由 (4.5) 定义的矩阵 $B \neq 0$. 由上式和 (5.66)–(5.68) 可知,

$$\begin{pmatrix} E'_0 \\ E'_r \end{pmatrix} = U_0 \begin{pmatrix} \tilde{E}'_0 \\ \tilde{E}'_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & C_0 \\ 0 & C_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{r\beta} & B_{r,n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_\beta \\ E_{n+1} \end{pmatrix}.$$

如果所有的 $B_{r\beta}$ 和 $B_{r,n+1}$ 均为零, 则 (5.63) 中的 $\tilde{B} = 0$, 从而 (5.61) 中的 $B = 0$. 于是, $\mu_\alpha = \mu_{n+1} = 0$. 代入到 (5.42), 得 $\omega_{1,n+1} \wedge \theta_1 = 0$, 与 (5.26) 矛盾. $\square$

5.3 唯一性定理

设引理 5.3 中的局部标架 $\{E_1, E_2, E_0, E_r, E_\alpha, E_{n+1}\}$ 定义在单连通坐标邻域 O 上, 局部坐标为 $(t, x^2, \dots, x^n)$, $p_0 \in O$ 是一个固定点. 因为 U_0 是常数矩阵, 根据 (5.62), 有

$$d(U_0 U_1) = -(U_0 U_1) \Omega_1, \quad dU_2 = -U_2 \Omega_2. \quad (5.69)$$

给定初始条件 $(U_0 U_1)(p_0) = I_{p-1}$, $U_2(p_0) = I_{n-p+1}$, 上述微分方程在 O 上有唯一解

$$U_0 U_1 = \begin{pmatrix} y^0 & u_{0s} \\ y^r & u_{rs} \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} u_{\alpha\beta} & z^\alpha \\ u_{0\beta} & z^{n+1} \end{pmatrix}. \quad (5.70)$$

由 (5.60) 和 (5.69) 得到

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\theta}_t \\ -\tilde{\theta}_r & \tilde{\omega}_{rt} \end{pmatrix} &= \Omega_1 = -(U_0 U_1)^\top d(U_0 U_1) = - \begin{pmatrix} y^0 & y^s \\ u_{0r} & u_{sr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dy^0 & du_{0t} \\ dy^s & du_{st} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \omega_{\alpha\beta} & -\theta_\alpha \\ \theta_\beta & 0 \end{pmatrix} &= \Omega_2 = -U_2^\top dU_2 = - \begin{pmatrix} u_{\gamma\alpha} & u_{0\alpha} \\ z^\gamma & z^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\gamma\beta} & dz^\gamma \\ du_{0\beta} & dz^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

根据初始条件, $y^0(p_0) = 1$, $z^{n+1}(p_0) = 1$. 上式说明, 在 p_0 附近,

$$\tilde{\theta}_r = \sum u_{sr} dy^s - u_{0r} (y^0)^{-1} \sum y^s dy^s, \quad \theta_\alpha = \sum u_{\beta\alpha} dz^\beta - u_{0\alpha} (z^{n+1})^{-1} \sum z^\beta dz^\beta.$$

反过来由 (5.69), 有

$$dy^r = \sum u_{rs} \tilde{\theta}_s, \quad dz^\alpha = \sum u_{\alpha\beta} \theta_\beta.$$

故 $\text{span}\{\tilde{\theta}_r\} = \text{span}\{dy^r\}$, $\text{span}\{\theta_\alpha\} = \text{span}\{dz^\alpha\}$, 存在定义在 O 上的函数 $\varphi \neq 0$, $\psi \neq 0$, 使得

$$\tilde{\theta}_3 \wedge \cdots \wedge \tilde{\theta}_p = \varphi dy^3 \wedge \cdots \wedge dy^p, \quad \theta_{p+1} \wedge \cdots \wedge \theta_n = \psi dz^{p+1} \wedge \cdots \wedge dz^n.$$

同时, 由 (5.55), 有 $\theta_1 \wedge \tilde{\theta}_3 \wedge \cdots \wedge \tilde{\theta}_p = \theta_1 \wedge \theta_3 \wedge \cdots \wedge \theta_p$. 结合 (5.26) 第 1 式和 (5.40), 有

$$\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3 \wedge \cdots \wedge \theta_p \wedge \theta_{p+1} \wedge \cdots \wedge \theta_n$$

$$= \varphi \psi e^{-u} dt \wedge dv \wedge dy^3 \wedge \cdots \wedge dy^p \wedge dz^{p+1} \wedge \cdots \wedge dz^n \neq 0. \quad (5.71)$$

因此, $(t, v, y^3, \dots, y^p, z^{p+1}, \dots, z^n)$ 可以作为 M 的局部坐标, 其中 $(y^3, \dots, y^p)$ 和 $(z^{p+1}, \dots, z^n)$ 分别是欧氏球面 S^{p-2} 和 S^{n-p} 的坐标.

由 (5.58)、(5.64)、(5.68) 和 (5.70) 得到

$$\tilde{e}_0 = y^0 E_0 + \sum y^r E_r, \quad \tilde{e}_{n+1} = \sum z^\alpha E_\alpha + z^{n+1} E_{n+1}.$$

再由 (5.51) 得

$$\bar{e}_0 = v E_2 + y^0 E_0 + \sum y^r E_r, \quad \bar{e}_{n+1} = -\mu_{n+1} E_2 + \sum z^\alpha E_\alpha + z^{n+1} E_{n+1}.$$

最后, 由 (5.2) 得

$$x = e_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{e}_0 + \bar{e}_{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(v - \mu_{n+1}) E_2 + y^0 E_0 + \sum y^r E_r + \sum z^\alpha E_\alpha + z^{n+1} E_{n+1} \right], \quad (5.72)$$

$$e_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{e}_0 - \bar{e}_{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(v + \mu_{n+1}) E_2 + y^0 E_0 + \sum y^r E_r - \sum z^\alpha E_\alpha - z^{n+1} E_{n+1} \right]. \quad (5.73)$$

令 $\bar{v} = v - \mu_{n+1}$. 由 (5.43) 可知,

$$d\mu_{n+1} \wedge \theta_1 \wedge \theta_3 \wedge \theta_{p+1} \wedge \cdots \wedge \theta_n = 0,$$

从而,

$$d\bar{v} \wedge \theta_1 \wedge \theta_3 \wedge \theta_{p+1} \wedge \cdots \wedge \theta_n = dv \wedge \theta_1 \wedge \theta_3 \wedge \theta_{p+1} \wedge \cdots \wedge \theta_n.$$

类似于 (5.71), $(t, \bar{v}, y^3, \dots, y^p, z^{p+1}, z^n)$ 也可以作为 M 的局部坐标. 将 (5.72) 中的 $\bar{v} = v - \mu_{n+1}$ 重新写成 v , 我们看到 $x = e_0$ 满足 (4.6). 因此有下面的唯一性定理.

定理 5.4 设 $x: M \rightarrow S_1^{n+1}$ 是等距浸入, $x(M)$ 是 S_1^{n+1} 中的 III 型非脐 Lorentz 等参超曲面, 则局部来说 $x(M)$ 是定理 4.2 中某个超曲面的平行超曲面 (或它的开子集), 至多相差一个 Lorentz 运动 (取决于 (4.1) 中初始标架 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_0, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}\}$ 的选择).

当 $p = n$ 时, 以上各式中指标含 α, β 和 γ 的项消失. 而 S^{n-p} 成为单点集 $\{z^{n+1} = 1\}$. 引理 5.3 中的标架 $\{E_1, E_2, E_0, E_r, E_\alpha, E_{n+1}\}$ 现在满足 (4.21), 而 (5.72) 和 (5.73) 成为

$$x = e_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(v - \mu_{n+1}) E_2 + y^0 E_0 + \sum y^r E_r + E_{n+1} \right], \quad (5.74)$$

$$e_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(v + \mu_{n+1}) E_2 + y^0 E_0 + \sum y^r E_r - E_{n+1} \right]. \quad (5.75)$$

如前, 将 (5.74) 中的 $\bar{v} = v - \mu_{n+1}$ 重新写成 v , 可见 $x = e_0$ 满足 (4.22). 因此有下面的唯一性定理.

定理 5.5 设 $x(M)$ 是 S_1^{n+1} 中的 III 型全脐 Lorentz 等参超曲面, 形算子的最小多项式是 $(\lambda - 1)^3$, 则局部来说 $x(M)$ 是定理 4.4 中的某个超曲面 (或它的开子集), 至多相差一个 Lorentz 运动.

由 (5.74) 和 (5.75) 可见, $\tilde{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + e_{n+1})$ 具有形如 (4.24) 的表达式. 因此有下面的推论 (参见文献 [12]).

推论 5.6 设 $x(M)$ 是 S_1^{n+1} 中的 III 型全脐 Lorentz 等参超曲面, 形算子的最小多项式是 λ^3 , 则局部来说 $x(M)$ 是推论 4.5 中的某个超曲面或其开子集, 至多相差一个 Lorentz 运动.

当 $p = 3$ 时, 在第 5.1 小节各式中指标含 i, j 和 k 的项消失. 而在第 5.2 小节各式中指标含 $4, i, j$ 和 k 的项消失, 指标 $r, s, t = 3$. 采用类似但更为简单的方法, 可以证明下面的唯一性定理, 参见文献 [14].

定理 5.7 设 $x(M)$ 是 S_1^{n+1} 中的 III 型半脐 Lorentz 等参超曲面, 形算子的最小多项式是 $(\lambda - 1)^3(\lambda + 1)$, 则局部来说 $x(M)$ 是定理 4.6 中的某个超曲面 (或它的开子集), 至多相差一个 Lorentz 运动.

6 III 型 Lorentz 等参超曲面的例子

万学远^[15]研究了满足条件 $\omega_{i\alpha} = 0$ ($\forall i, \alpha$) 的 III 型非脐 Lorentz 等参超曲面, 其中 $\omega_{i\alpha}$ 是基本公式 (5.1) 中的联络形式. 在几何上, 条件 $\omega_{i\alpha} = 0$ ($\forall i, \alpha$) 等价于特征分布 $V_{-1} = \{X \in TM \mid \mathbb{A}X = -X\}$ 在 TM 中平行, 即 $\nabla V_2 \subset V_2$. 在 Riemann 球面 S^{n+1} 中, 当 $g = 2$ 时这一条件自动成立. 下面的例子说明在 Lorentz 球面 S_1^{n+1} 中, 情况更为复杂: 存在非脐 Lorentz 等参超曲面 M 使得 V_{-1} 不平行.

例 6.1 V_{-1} 不平行的 III 型非脐 Lorentz 等参超曲面.

设在常微分方程组 Cauchy 问题 (4.1) 中, $p = 4, n \geq 6$. 当 $C_0, C_r, C_\alpha, C_{n+1}, B_{r\alpha}$ 和 $B_{r,n+1}$ 是常数时, 容易求解. 如果 $C_0 = C_r = C_\alpha = C_{n+1} = B_{r,n+1} = 0$, 而除了 $B_{35} = B_{46} = 1$ 之外, 其余的 $B_{r\alpha} = 0$, 则 (4.1) 成为

$$E'_1 = 0, \quad E'_2 = E_0, \quad E'_0 = E_1, \quad E'_3 = E_5, \quad E'_4 = E_6, \quad E'_5 = -E_3, \quad E'_6 = -E_4, \quad E'_\gamma = 0, \quad (6.1)$$

其中指标 $\gamma = 7, \dots, n+1$, 下同. 易见它的解是

$$\begin{aligned} E_1 &= \varepsilon_1, \quad E_2 = \frac{1}{2}t^2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + t\varepsilon_0, \quad E_0 = t\varepsilon_1 + \varepsilon_0, \quad E_3 = \cos t\varepsilon_3 + \sin t\varepsilon_5, \\ E_4 &= \cos t\varepsilon_4 + \sin t\varepsilon_6, \quad E_5 = -\sin t\varepsilon_3 + \cos t\varepsilon_5, \quad E_6 = -\sin t\varepsilon_4 + \cos t\varepsilon_6, \quad E_\gamma = \varepsilon_\gamma. \end{aligned}$$

记 $S_+^2 = \{(y^0, y^3, y^4) \in S^2 \mid y^0 > 0\}$ 为正半球面, $\Omega = \mathbb{R}^2 \times S_+^2 \times S^{n-4}$. 根据定理 4.2, 向量函数

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[vE_2 + (y^0E_0 + y^3E_3 + y^4E_4) + \left(z^5E_5 + z^6E_6 + \sum z^\gamma E_\gamma \right) \right] \quad (6.2)$$

定义了浸入 $x: \Omega \rightarrow S_1^{n+1}$, $x(\Omega)$ 是 Lorentz 超曲面. 现在 (4.10) 成为

$$\psi = \psi(t, v, y, z) = y^3z^5 + y^4z^6. \quad (6.3)$$

除了一个零测度集 $K = \{(t, v, y, z) \in \Omega \mid \psi = 0\}$ 之外, $M = x(\Omega \setminus K)$ 是 III 型 Lorentz 等参超曲面.

取 S_+^2 的正交参数 (u, w) , 使得 $(y^0, y^3, y^4) = (\cos u, \sin u \cos w, \sin u \sin w)$, $u \in (0, \pi/2)$, 则

$$(dy^0, dy^3, dy^4) = (-\sin u, \cos u \cos w, \cos u \sin w)du + (0, -\sin w, \cos w) \sin u dw. \quad (6.4)$$

再设

$$(dz^5, \dots, dz^n, dz^{n+1}) = \sum (e_\alpha^5, \dots, e_\alpha^n, e_\alpha^{n+1})\omega_\alpha, \quad (6.5)$$

其中 $\{\omega_\alpha\}$ 是 T^*S^{n-4} 的局部么正标架. 令 $\{Z_\alpha\}$ 是它的对偶标架. 由 (6.1)–(6.5) 可得

$$\begin{aligned} \psi &= \sin u(z^5 \cos w + z^6 \sin w), \quad \psi_u \equiv d\psi \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) = \psi \cot u, \\ \psi_w &\equiv d\psi \left(\frac{\partial}{\partial w} \right) = -y^4z^5 + y^3z^6, \quad \psi_\alpha \equiv d\psi(Z_\alpha) = y^3e_\alpha^5 + y^4e_\alpha^6, \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned}
dx\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y^0 E_1 + v E_0 - z^5 E_3 - z^6 E_4 + y^3 E_5 + y^4 E_6), & dx\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} E_2, \\
dx\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[-\sin u E_0 + \cos u(\cos w E_3 + \sin w E_4)], \\
dx\left(\frac{\partial}{\partial w}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin u(-\sin w E_3 + \cos w E_4), & dx(Z_\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_\alpha^5 E_5 + e_\alpha^6 E_6 + \sum e_\alpha^\gamma E_\gamma\right).
\end{aligned} \tag{6.7}$$

于是, 单位法向量

$$e_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(v - 2\psi \sec u) E_2 + (y^0 E_0 + y^3 E_3 + y^4 E_4) - \left(z^5 E_5 + z^6 E_6 + \sum z^\gamma E_\gamma \right) \right],$$

从而

$$\begin{aligned}
e_{n+1} + x &= \sqrt{2}[(v - \psi \sec u) E_2 + (y^0 E_0 + y^3 E_3 + y^4 E_4)], \\
e_{n+1} - x &= -\sqrt{2} \left[\psi \sec u E_2 + \left(z^5 E_5 + z^6 E_6 + \sum z^\gamma E_\gamma \right) \right].
\end{aligned}$$

采用定理 4.2 证明过程中的方法, 由上 2 式和 (6.7) 可以得到

$$\begin{aligned}
(\mathbb{A} + \text{id})(Z_\alpha) &= -2\psi_\alpha \sec u \frac{\partial}{\partial v}, & (\mathbb{A} + \text{id})\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) &= 2 \frac{\partial}{\partial v}, \\
(\mathbb{A} - \text{id})\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) &= 2 \csc u \left(\psi \sec u \frac{\partial}{\partial u} + \psi_w \csc u \frac{\partial}{\partial w} \right), & (\mathbb{A} - \text{id})\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) &= 0, \\
(\mathbb{A} - \text{id})\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) &= -2\psi \sec^2 u \csc u \frac{\partial}{\partial v}, & (\mathbb{A} - \text{id})\left(\frac{\partial}{\partial w}\right) &= -2\psi_w \sec u \frac{\partial}{\partial v}.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

故有

$$(\mathbb{A} + \text{id})\left(Z_\alpha + \psi_\alpha \sec u \frac{\partial}{\partial v}\right) = 0, \tag{6.9}$$

$$(\mathbb{A} - \text{id})\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = 0, \quad (\mathbb{A} - \text{id})\left(\psi_w \frac{\partial}{\partial u} - \psi \sec u \csc u \frac{\partial}{\partial w}\right) = 0. \tag{6.10}$$

现在来研究 M 上特征分布 V_{-1} 的平行性. 根据 (6.7) 可知, $\sqrt{2} \frac{\partial}{\partial u}$ 和 $\sqrt{2} \csc u \frac{\partial}{\partial w}$ 是相互正交的单位类空向量, 从而,

$$\left| \sqrt{2} \left(\psi_w \frac{\partial}{\partial u} - \psi \sec u \csc u \frac{\partial}{\partial w} \right) \right|^2 = \psi_w^2 + \psi^2 \sec^2 u.$$

令

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial v}, \quad X_4 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\psi_w^2 + \psi^2 \sec^2 u}} \left(\psi_w \frac{\partial}{\partial u} - \psi \sec u \csc u \frac{\partial}{\partial w} \right), \quad X_\alpha = \sqrt{2} \left(Z_\alpha + \psi_\alpha \sec u \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

由 (6.8) 可见, $\{(\mathbb{A} + \text{id})(\frac{\partial}{\partial t}), (\mathbb{A} + \text{id})(\frac{\partial}{\partial v}), (\mathbb{A} + \text{id})(\frac{\partial}{\partial u}), (\mathbb{A} + \text{id})(\frac{\partial}{\partial w})\}$ 是线性无关的. 因此, 由 (6.9), 有 $V_{-1} = \text{span}\{X_\alpha\}$. 同理, 由 (6.8)–(6.10) 可知, 特征分布

$$V_1 = \{X \in TM \mid \mathbb{A}X = X\} = \text{span}\{X_2, X_4\}.$$

设 $\Theta = (\omega_{4\alpha})$ 是基本公式 (5.1) 中由联络形式 $\{\omega_{4\alpha}\}$ 构成的矩阵. 容易明白 Θ 的秩与 V_1 中单位类空特征向量 X_4 的取法无关, 也与 V_{-1} 的么正标架 $\{X_\alpha\}$ 的取法无关. 令 $e_4 = dx(X_4)$, $e_\alpha = dx(X_\alpha)$. 由 (6.7), 可得

$$e_4 = \frac{1}{\sqrt{\psi_w^2 + \psi^2 \sec^2 u}} [-\psi_w \sin u E_0 + (\psi_w \cos u \cos w + \psi \sec u \sin w) E_3]$$

$$+ (\psi_w \cos u \sin w - \psi \sec u \cos w) E_4],$$

$$e_\alpha = \psi_\alpha \sec u E_2 + e_\alpha^5 E_5 + e_\alpha^6 E_6 + \sum e_\alpha^\gamma E_\gamma.$$

由上式和 (6.1), 简单计算可得

$$\omega_{4\alpha} = \langle de_4, e_\alpha \rangle = \frac{\tan u}{\sqrt{\psi_w^2 + \psi^2 \sec^2 u}} (z^6 e_\alpha^5 - z^5 e_\alpha^6) dt. \quad (6.11)$$

断言 $\omega_{4\alpha}$ 不全为零, 从而特征分布 V_{-1} 不平行. 事实上, 由 (6.5) 可知,

$$(z^5)^2 + \sum (e_\alpha^5)^2 = (z^6)^2 + \sum (e_\alpha^6)^2 = 1, \quad z^5 z^6 + \sum e_\alpha^5 e_\alpha^6 = 0.$$

如果所有的 $\omega_{4\alpha} = 0$, 则由 (6.11) 和上式得到

$$\sum e_\alpha^5 (z^6 e_\alpha^5 - z^5 e_\alpha^6) = z^6 = 0, \quad \sum e_\alpha^6 (z^6 e_\alpha^5 - z^5 e_\alpha^6) = -z^5 = 0.$$

这与在 M 上 $\psi = y^3 z^5 + y^4 z^6 \neq 0$ 矛盾.

注 6.2 由 (6.8) 可得

$$(\mathbb{A} - \text{id})^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = -4 \sec u \csc^2 u (\psi^2 \sec^2 u + \psi_w^2) \frac{\partial}{\partial v}.$$

当 ψ 和 ψ_w 不全为零时, $(\mathbb{A} - \text{id})^2 (\mathbb{A} + \text{id}) \neq 0$. 令 $\tilde{K} = \{(t, v, y, z) \in \Omega \mid \psi = \psi_w = 0\}$. 因为 $\tilde{K} \subset K$, 所以有更大的 III 型非脐 Lorentz 等参超曲面 $\tilde{M} = x(\Omega \setminus \tilde{K}) \supset M$.

在欧氏球面中, 一个超曲面是等参的当且仅当它的主曲率是常数. 但是在 Lorentz 球面中情形有所不同, Lorentz 超曲面的主曲率是常数并不能保证它是 Lorentz 等参超曲面. 事实上, $x(\Omega)$ 是 Lorentz 超曲面. 由 (6.8) 可见在点 $p \in x(\tilde{K})$ 处, 最小多项式是 $(\lambda - 1)(\lambda + 1)$, 而在点 $p \in x(\Omega \setminus \tilde{K})$ 处, 最小多项式是 $(\lambda - 1)^3(\lambda + 1)$. 因此, $x(\Omega)$ 的主曲率是常数 1 和 -1 . 按 Lorentz 等参超曲面的定义, 在每一点 $p \in x(\Omega)$ 形算子的最小多项式必须相同, 所以, $x(\Omega)$ 不是 Lorentz 等参超曲面.

例 6.3 III 型全脐 Lorentz 等参超曲面.

显然, $E_1 = \varepsilon_1$, $E_2 = \frac{1}{2}t^2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + t\varepsilon_0$, $E_0 = t\varepsilon_1 + \varepsilon_0$, $E_3 = \cos t\varepsilon_3 + \sin t\varepsilon_{n+1}$, $E_i = \varepsilon_i$, $E_{n+1} = -\sin t\varepsilon_3 + \cos t\varepsilon_{n+1}$ 满足常微分方程组 Cauchy 问题

$$E'_1 = 0, \quad E'_2 = E_0, \quad E'_0 = E_1, \quad E'_3 = E_{n+1}, \quad E'_i = 0, \quad E'_{n+1} = -E_3; \quad E_A(0) = \varepsilon_A, \quad (6.12)$$

其中指标 $i = 4, \dots, n$, $A = 0, 1, \dots, n+1$.

令 $\Omega = \mathbb{R}^2 \times (0, \pi/2) \times S^{n-3}$, $(y^3, \dots, y^n)$ 是 S^{n-3} 上点的位置向量. 根据推论 4.5 知, 映射

$$x: \Omega \rightarrow S_1^{n+1}: (t, v, u, y) \mapsto x = vE_2 + \cos uE_0 + \sin u \left(y^3 E_3 + \sum y^i E_i \right) \quad (6.13)$$

是一个浸入, $x(\Omega)$ 是 S_1^{n+1} 中的 Lorentz 超曲面. 如前, 设

$$(dy^3, dy^4, \dots, dy^n) = \sum (e_i^3, e_i^4, \dots, e_i^n) \omega_i, \quad (6.14)$$

其中 $\{\omega_i\}$ 是 T^*S^{n-3} 的局部么正标架. 令 $\{Y_i\}$ 是它的对偶标架. 由 (6.12)–(6.14), 有

$$dx \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \cos u E_1 + v E_0 + y^3 \sin u E_{n+1}, \quad dx \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) = E_2,$$

$$dx\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = -\sin u E_0 + \cos u \left(y^3 E_3 + \sum y^i E_i\right), \quad dx(Y_i) = \sin u \left(e_i^3 E_3 + \sum e_i^j E_j\right). \quad (6.15)$$

因此, 单位法向量是

$$e_{n+1} = y^3 \tan u E_2 + E_{n+1}.$$

因为 $de_{n+1} = dx \circ \mathbb{A}$, $dx(\frac{\partial}{\partial v}) = E_2$, 由上式及 (6.12) 和 (6.14) 可得

$$dx \circ \mathbb{A}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = y^3 \tan u E_0 - E_3, \quad \mathbb{A}\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = 0, \quad (6.16)$$

$$\mathbb{A}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = y^3 \sec^2 u \frac{\partial}{\partial v}, \quad \mathbb{A}(Y_i) = e_i^3 \tan u \frac{\partial}{\partial v},$$

$$(y^3)^2 + \sum (e_i^3)^2 = 1, \quad y^3 y^j + \sum e_i^3 e_i^j = 0. \quad (6.17)$$

结合 (6.15) 和 (6.17), 有

$$dx\left(y^3 \sec u \frac{\partial}{\partial u} + \csc u \sum e_i^3 Y_i\right) = E_3 - y^3 \tan u E_0 = -dx \circ \mathbb{A}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right).$$

因此,

$$\mathbb{A}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = -\left(y^3 \sec u \frac{\partial}{\partial u} + \csc u \sum e_i^3 Y_i\right), \quad \mathbb{A}^2\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = -\sec u [1 + (y^3)^2 \tan^2 u] \frac{\partial}{\partial v}.$$

上式说明 $M = x(\Omega)$ 是 III 型全脐 Lorentz 等参超曲面, 形算子 $\mathbb{A}$ 的最小多项式为 λ^3 .

例 6.4 III 型半脐 Lorentz 等参超曲面.

容易求解常微分方程组 Cauchy 问题

$$E'_1 = 0, \quad E'_2 = E_0, \quad E'_0 = E_1, \quad E'_3 = E_4, \quad E'_4 = -E_3, \quad E'_\gamma = 0; \quad E_A(0) = \varepsilon_A, \quad (6.18)$$

其中 $\gamma = 5, \dots, n+1$, $A = 0, 1, \dots, n+1$.

下面指标 $\alpha = 4, \dots, n$, $\beta = 4, \dots, n$. 令 $\Omega = \mathbb{R}^2 \times (-\pi/2, \pi/2) \times S^{n-3}$, $(z^4, \dots, z^{n+1}) \in S^{n-3}$. 根据定理 4.6, 可得

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(v E_2 + \cos u E_0 + \sin u E_3 + \sum z^\alpha E_\alpha + z^{n+1} E_{n+1} \right). \quad (6.19)$$

定义的映射 $x: \Omega \rightarrow S_1^{n+1}$ 给出了 S_1^{n+1} 中的 Lorentz 超曲面 $x(\Omega)$. 像前面一样可得单位法向量

$$e_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(v - 2z^4 \tan u) E_2 + \cos u E_0 + \sin u E_3 + \sum z^\alpha E_\alpha + z^{n+1} E_{n+1} \right]. \quad (6.20)$$

若设 $\{\omega_\alpha\}$ 是 T^*S^{n-3} 的局部么正标架, $\{Y_i\}$ 是它的对偶标架, 则

$$(dz^4, \dots, dz^n, dz^{n+1}) = \sum (e_\alpha^4, \dots, e_\alpha^n, e_\alpha^{n+1}) \omega_\alpha. \quad (6.21)$$

从 (6.19) 和 (6.20) 可计算出 $e_{n+1} \pm x$. 然后像例 6.1 中一样, 利用上式和 (6.18) 可以得到

$$(\mathbb{A} + \text{id})\left(Z_\alpha + e_\alpha^4 \tan u \frac{\partial}{\partial v}\right) = 0, \quad (\mathbb{A} - \text{id})\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = 0,$$

$$(\mathbb{A} - \text{id})\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = -2z^4 \sec^2 u \frac{\partial}{\partial v}, \quad (\mathbb{A} - \text{id})\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 2z^4 \sec u \frac{\partial}{\partial u}.$$

设 K 是 Ω 中满足 $z^4 = 0$ 的点, 则 $M = x(\Omega \setminus K)$ 是 III 型半脐 Lorentz 等参超曲面. 在 K 上, $x(\Omega)$ 是 I 型的. 这再次说明主曲率是常数的 Lorentz 超曲面 $x(\Omega)$ 不一定是 Lorentz 等参超曲面.

参考文献

- 1 Cartan É. Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante. *Ann Mat Pura Appl* (4), 1938, 17: 177–191
- 2 Cartan É. Sur des familles remarquables d'hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques. *Math Z*, 1939, 45: 335–367
- 3 Münzner H F. Isoparametrische hyperflächen in sphären, I; II. *Math Ann*, 1980, 251: 57–71; 1981, 256: 215–232
- 4 O'Neil B. *Semi-Riemannian Geometry*. New York: Academic Press, 1983
- 5 Nomizu K. On isoparametric hypersurfaces in the Lorentzian space forms. *Jpn J Math*, 1981, 7: 217–226
- 6 Hahn J. Isoparametric hypersurfaces in the pseudo-Riemannian space forms. *Math Z*, 1984, 187: 195–208
- 7 Magid M. Lorentzian isoparametric hypersurfaces. *Pacific J Math*, 1985, 118: 165–197
- 8 Xiao L. Lorentzian isoparametric hypersurfaces in H_1^{n+1} . *Pacific J Math*, 1999, 189: 377–397
- 9 Li Z. Lorentzian isoparametric hypersurfaces in the Lorentzian sphere S_1^{n+1} . In: *Recent Development in Geometry and Analysis*. Beijing-Boston: Higher Education Press; International Press, 2012, 267–328
- 10 陈良才. Lorentz 球面 S_1^{n+1} 中的 III 型 Lorentz 等参超曲面. 硕士学位论文. 南昌: 南昌大学, 2009
- 11 黎镇琦, 姜全德. S_1^{n+1} 中 II 型 Lorentz 等参超曲面的完全分类. *南昌大学学报 (理科版)*, 2012, 36: 205–214
- 12 黎镇琦, 尹佳斌, 万学远. S_1^{n+1} 中的 III 型全脐 Lorentz 等参超曲面. *南昌大学学报 (理科版)*, 2014, 38: 511–520
- 13 章慧芬, 钟建环, 黎镇琦. 4 维 Lorentz 球面中的 Lorentz 等参超曲面. *南昌大学学报 (理科版)*, 2007, 31: 209–213
- 14 但萍萍, 黎镇琦. S_1^{n+1} 中的 III 型半脐 Lorentz 等参超曲面. *南昌大学学报 (理科版)*, 2016, 40: 511–523
- 15 万学远. S_1^{n+1} 中 III 型全脐与半脐 Lorentz 等参超曲面. 硕士学位论文. 南昌: 南昌大学, 2014

Lorentzian isoparametric hypersurfaces in the Lorentzian sphere S_1^{n+1}

Zhenqi Li

Abstract There are many research papers for isoparametric hypersurfaces in Riemannian space forms and almost perfect results have already been got till now. In the late 20th century, the Lorentzian isoparametric hypersurfaces in the Lorentzian space $\mathbb{R}_1^{n+1}$ and the Lorentzian hyperbolic space H_1^{n+1} have been completely classified. Continuing with our previous work, we investigate Lorentzian isoparametric hypersurfaces in the Lorentzian sphere S_1^{n+1} in this paper. Then complete classification and analytic expression are given for all kinds of Lorentzian isoparametric hypersurfaces in S_1^{n+1} .

Keywords isoparametric hypersurfaces, Lorentzian sphere, Lorentzian isoparametric hypersurfaces

MSC(2010) 53C50, 53B25

doi: 10.1360/N012017-00195