图映射的负极限集

孙太祥, 席鸿建*

广西财经学院信息与统计学院, 南宁 530003

E-mail: stxhql@gxu.edu.cn, x3009h@163.com

收稿日期: 2016-04-21; 接受日期: 2016-08-30; 网络出版日期: 2016-11-14; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11461003) 资助项目

摘要 设 G 是一个图, $f: G \rightarrow G$ 是一个连续映射. 若 G 上的一个点列 $\theta = (x_0, x_{-1}, \dots, x_{-n}, \dots)$ 满足 $f(x_{-n}) = x_{-n+1}$ (对任意的正整数 n), 则称 θ 为 f 过 x_0 的负轨道. θ 的 α -极限集就是 θ 的所有极限点集 $\alpha(\theta, f)$. 本文证明 f 的每个负轨道的 α -极限集都是 G 上某个点的 ω -极限集. 此外, 本文还构造一个例子说明上述结论对无穷树 (dendrite) 映射不成立.

关键词 图映射 α -极限集 ω -极限集 负轨道

MSC (2010) 主题分类 37E25, 37B40, 54H20

1 引言

设 (X, d) 是一个度量空间. 对任意的 $Y \subset X$, 分别用 $\bar{Y}$ 和 $\text{diam}Y$ 表示 Y 在 X 上的闭包和 Y 的直径. 对任意的 $y \in X$, $Y \subset X$ 和 $\varepsilon > 0$, 记 $B(y, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ 和 $B(Y, \varepsilon) = \bigcup_{y \in Y} B(y, \varepsilon)$. 设 $\mathbb{N}$ 表示正整数集, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

设 $C^0(X)$ 是 X 上的连续自映射集. 对任意的 $f \in C^0(X)$, 设 f^0 是 X 上的恒等映射, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 记 $f^n = f \circ f^{n-1}$ 为 f 和 f^{n-1} 的复合映射. 若点 $x \in X$ 满足 $f^n(x) = x$, 且当 $n \geq 2$ 时, 对每个 $1 \leq i < n$, $f^i(x) \neq x$, 则称 x 为 f 的具有周期 n 的周期点. 点 x 在 f 下的轨道为 $O(x, f) \equiv \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}_+\}$. 记

$$\omega(x, f) = \left\{ y \in X : \text{存在一列正整数 } n_1 < n_2 < n_3 < \dots \text{ 使得 } \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) = y \right\},$$

称其为 x 在 f 下的 ω -极限集. 若 G 上的一个点列 $\theta = (x_0, x_{-1}, \dots, x_{-n}, \dots)$ 满足 $f(x_{-n}) = x_{-n+1}$ (对任意的 $n \in \mathbb{N}$), 则称 θ 为 f 过 x_0 的负轨道. 记

$$\alpha(\theta, f) = \left\{ y \in X : \text{存在一列正整数 } n_1 < n_2 < n_3 < \dots \text{ 使得 } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{-n_k} = y \right\},$$

称其为 θ 在 f 下的 α -极限集. 一般来讲, 过 x 的负轨道不一定存在, 即便存在, 也不一定唯一.

若一个度量空间 X 同胚于区间 $[0, 1]$ (或开区间 $(0, 1)$, 或单位圆 S^1), 则称 X 是一个弧 (或开弧, 或圆). 设 A 是一个弧, $h: [0, 1] \rightarrow A$ 是一个同胚, 则称点 $h(0)$ 和 $h(1)$ 为 A 的端点, 记为 $\text{End}(A) = \{h(0),$

英文引用格式: Sun T X, Xi H J. Negative limit sets of graph maps (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 591–598, doi: 10.1360/SCM-2016-0259

$h(1)\}$. 若在紧致连通的度量空间 G 上存在有限条弧 $A_1, \dots, A_n$ ($n \geq 1$), 使得 $G = \bigcup_{i=1}^n A_i$, 且对任意的 $1 \leq i < j \leq n$, $A_i \cap A_j = \text{End}(A_i) \cap \text{End}(A_j)$, 则称 G 是一个图. 若图 T 不包含圆, 则称 T 为树. 图 (或树, 或区间) 上的连续自映射称为图映射 (或树映射, 或区间映射).

设 G 是一个给定的图. 取 G 上的度量 d 使得对任意的 $x \in G$ 和任意的 $\varepsilon > 0$, 开球 $B(x, \varepsilon) \equiv \{y \in G : d(y, x) < \varepsilon\}$ 总是连通的. 对任意的有限集 S , 用 $|S|$ 表示 S 的元素个数. 对任意的 $x \in G$, 记

$$\text{val}(x) = \lim_{r \rightarrow +0} |\partial B(x, r)|,$$

称其为 x 的原子价. 若 $\text{val}(x) > 2$ (或 $\text{val}(x) = 1$), 则称 x 是 G 的一个分支点 (或端点). 用 $\text{End}(G)$ 和 $\text{Br}(G)$ 分别表示 G 的端点集和分支点集. 取 G 的一个包含 $\text{End}(G) \cup \text{Br}(G)$ 的有限子集 $V(G)$ 使得对 $G - V(G)$ 的任意连通分支 E , 闭包 $\bar{E}$ 是一个弧, 这样的 $V(G)$ 称为 G 的顶点集, $G - V(G)$ 的每个连通分支的闭包称为 G 的边. 为方便起见, 我们假定 G 的每条边的长度大于 1. 对 G 的任一条边 I 及任意的 $a, b \in I$, 用 $[a, b]_I$ (或简记为 $[a, b]$) 表示 I 中包含 $\{a, b\}$ 的最小的连通闭子集, 称其为 G 的一个闭区间. 这样, 一个闭区间总是一条边的子集. 记 $(a, b] = [b, a] = [a, b] - \{a\}$ 和 $(a, b) = [a, b] - \{b\}$. 设 G 是一个图, $A, B \subset G$ 是两个闭区间, $f \in C^0(G)$, 若存在闭区间 $L \subset A$ 使得 $f(L) = B$, 则记 $f(A) \supset B$.

在动力系统研究中, α -极限集和 ω -极限集有着极其重要的作用. Hero^[1] 研究了区间映射, 得到了下面结果.

定理 A (参见文献 [1, 推论]) 设 I 是一个紧致区间, $f \in C^0(I)$, 则下面两条等价:

- (1) 对 f 的某个负轨道 θ , $\alpha(\theta, f)$ 包含一个非回归点;
- (2) f 有一个非 2 方幂周期的周期点.

众所周知, 对于区间映射 f , 拓扑熵 $h(f) > 0$ 当且仅当 f 有一个非 2 方幂周期的周期点 (参见文献 [2, 第 VIII 章的命题 34]).

Balibrea 等^[3] 研究了区间映射的 α -极限集, 得到了下面定理.

定理 B (参见文献 [3, 推论 7]) 设 I 是一个紧致区间, $f \in C^0(I)$, 则 f 的每个负轨道的 α -极限集都是 I 上某个点的 ω -极限集.

近年来, 已有众多学者对图映射的动力学性质进行了研究 (参见文献 [4–11]). Sun 等^[12] 研究了图映射的吸引中心. Ye 等^[13] 研究了图映射的中心深度和非游荡集的结构. Sun 等^[14] 证明了图映射 f 的拓扑熵 $h(f) > 0$ 当且仅当 f 的某个负轨道的 α -极限集包含一个非回归点. Mai 和 Shao^[15] 证明了每个图映射的 ω -极限集族在 Hausdorff 度量下是闭的. Sun 等^[16] 得到了图映射 f 的每个负轨道 θ 满足 $R(f) \subset \alpha(\theta, f) \subset \bar{R}(f)$, 其中 $R(f) = \{x : x \in \omega(x, f)\}$ 是 f 的回归点集. 本文的目的是将定理 B 推广到图映射上.

2 图映射的每个 α -极限集都是一个 ω -极限集

本节假设 G 是一个图, $f \in C^0(G)$. 下面的定理是本文的主要结果, 它的证明方法来源于文献 [15].

定理 2.1 f 的每个负轨道的 α -极限集都是 G 上某个点的 ω -极限集.

现设 $\theta = (x_0, x_{-1}, x_{-2}, \dots, x_{-n}, \dots)$ 是 f 的一个给定的负轨道. 为了证明定理 2.1, 我们需要下列引理.

引理 2.2 $\alpha(\theta, f)$ 是 G 的闭子集且 $f(\alpha(\theta, f)) = \alpha(\theta, f)$.

证明 设 $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \in \alpha(\theta, f)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$, 则对每个 $n \in \mathbb{N}$, 存在 θ 的子点列 $x_{-k_m}^{(n)}$, 使得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_{-k_m}^{(n)} = z_n.$$

不失一般性, 我们可以假定对每个 $n \in \mathbb{N}$, 有 $d(x_{-k_n}^{(n)}, z_n) < 1/n$. 从而,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{-k_n}^{(n)} = z,$$

这说明 $\alpha(\theta, f)$ 是 G 的闭子集.

设 $x \in \alpha(\theta, f)$, 则存在 θ 的子点列 x_{-k_n} ($k_n > 1$), 使得 $x_{-k_n} \rightarrow x$. 从而,

$$f(x_{-k_n}) = x_{-k_n+1} \rightarrow f(x),$$

这说明 $f(x) \in \alpha(\theta, f)$. 另一方面, 不失一般性, 可以假定 $x_{-k_n-1} \rightarrow y$. 故有 $y \in \alpha(\theta, f)$ 和 $x = f(y)$, 这说明 $x \in f(\alpha(\theta, f))$. 证毕. $\square$

引理 2.3 若 $\alpha(\theta, f)$ 是 G 的一个有限子集, 则对任意的 $y \in \alpha(\theta, f)$, $\alpha(\theta, f) = \omega(y, f)$.

证明 因为 $f(\alpha(\theta, f)) = \alpha(\theta, f)$ 且 $\alpha(\theta, f)$ 是一个有限集, 所以, $\alpha(\theta, f)$ 的每个点都是 f 的周期点. 设 $y \in \alpha(\theta, f)$. 如果 $O(y, f) \neq \alpha(\theta, f)$, 那么 $A = \alpha(\theta, f) - O(y, f) \neq \emptyset$. 记

$$\varepsilon = \frac{\min\{d(u, v) : u, v \in \alpha(\theta, f), u \neq v\}}{3},$$

则存在 θ 的一个子点列 x_{-k_n} ($k_n > 1$), 使得 $x_{-k_n} \in B(O(y, f), \varepsilon)$ 且 $x_{-k_n+1} \in B(A, \varepsilon)$. 不失一般性, 我们可以假定 $x_{-k_n} \rightarrow u$ 且 $x_{-k_n+1} \rightarrow v$. 从而, $u \in O(y, f)$, $v \in A$ 且 $f(u) = v$, 这是矛盾的. 证毕. $\square$

以下假定 $\alpha(\theta, f)$ 是一个无限集且对任意的 $x \in \alpha(\theta, f)$, $\omega(x, f) \neq \alpha(\theta, f)$. 易见存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得对任意的 $i, j \geq N$ ($i \neq j$), 都有 $x_{-i} \neq x_{-j}$. 从而, 对任意的 $0 < \varepsilon < 1/3$ 和 $y \in \alpha(\theta, f)$, $(B(y, \varepsilon) - \{y\}) \cap \{x_{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ 是一个无限集. 设 $\varepsilon \in (0, 1/3)$, 记

$$\mathbf{S}(\varepsilon) = \{A \subset B(\alpha(\theta, f), \varepsilon) \subset G : A \text{ 是连通的}, A = \overline{A} \text{ 且 } 0 < \text{diam} A < \varepsilon\}$$

且

$$\mathbf{T}(\varepsilon) = \{A \in \mathbf{S}(\varepsilon) : A \cap \{x_{-n} : n \in \mathbb{N}\} \text{ 是一个无限集}\}.$$

定义 2.4 (参见文献 [15, 定义 3.3]) 设 $A, B \in \mathbf{S}(\varepsilon)$. 若存在 $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathbf{S}(\varepsilon)$, 使得 $A_0 = A$, $A_n = B$, 且对任意的 $0 \leq i \leq n-1$, 都有 $f(A_i) \supset A_{i+1}$, 则记为 $A \xrightarrow{(f, \varepsilon)} B$.

引理 2.5 (参见文献 [15, 引理 3.5]) 设 $1/3 > \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_n \geq \dots > 0$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, $A_n \in \mathbf{S}(\varepsilon_n)$ (对任意的 $n \in \mathbb{N}$). 若对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 有 $A_n \xrightarrow{(f, \varepsilon_n)} A_{n+1}$ 且 $\alpha(\theta, f) \subset B(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j, \varepsilon_n)$, 则存在某个 $x \in G$, 使得 $\alpha(\theta, f) = \omega(x, f)$.

引理 2.6 (参见文献 [8, 引理 2.4]) 若 J 和 $L = [a, b]$ 是 G 的两个闭区间, 使得 $f(J)$ 包含点 $x \in (a, b)$ 和 (a, b) 外的点, 则 $f(J) \supset [a, x]$ 或 $f(J) \supset [x, b]$.

若 $[y, x_{-n}] \in \mathbf{T}(\varepsilon)$ 是一个闭区间, 且满足 $y \in \alpha(\theta, f)$ 和 $(y, x_{-n}) \cap V(G) = \emptyset$, 则称 $[y, x_{-n}]$ 是一个 $\theta(\varepsilon)$ -弧.

引理 2.7 设 $A = [y, x_{-\tau}]$ 是一个 $\theta(\varepsilon)$ -弧, 则存在 $x \in (y, x_{-\tau})$ 和 $B \in \mathbf{T}(\varepsilon)$, 使得 $[x, x_{-\tau}] \xrightarrow{(f, \varepsilon)} B$.

证明 分下面三种情形证明.

情形 1 y 是一个具有周期 m 的周期点. 设 $\text{val}(y) = k$. 取 $\varepsilon/2 > \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_{3k+1} > 0$, 使得

$$B(y, \varepsilon_0) \cap V(G) \subset \{y\}, \quad \alpha(\theta, f) - B(O(y, f), 2\varepsilon_0) \neq \emptyset,$$

且对任意的 $1 \leq i \leq 3k+1$ 和 $1 \leq j \leq m$, 当 $d(y, w) < \varepsilon_i$ 时, 有

$$d(f^j(y), f^j(w)) < \varepsilon_{i-1}.$$

设 $\eta = \min\{\varepsilon_{3k+1}, \varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i : 1 \leq i \leq 3k+1\}/3$, 则存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得对任意的 $n \geq N$, 有

$$x_{-n} \in B(\alpha(\theta, f), \eta).$$

取 $\lambda > \mu \geq N$, 使得 $x_{-\mu} \notin B(O(y, f), \varepsilon_0)$ 和 $x_{-\lambda} \in A \cap B(y, \eta)$, 则存在 $0 < n_0 < n_1 < \cdots < n_{3k}$, 使得 $\lambda - n_{3k}m > \mu$, 且对任意的 $0 \leq i \leq n_j - 1$ 和 $0 \leq j \leq 3k$, 有

$$x_{-\lambda+im} \in B(y, \varepsilon_{3k+1-j}) \quad \text{和} \quad x_{-\lambda+n_jm} \in B(y, \varepsilon_{3k-j}) - B(y, \varepsilon_{3k+1-j}).$$

从而存在 $0 \leq s < t < r < l \leq 3k$, 使得 $x_{-\lambda+n_sm}, x_{-\lambda+n_tm}, x_{-\lambda+n_rm}$ 和 $x_{-\lambda+n_lm}$ 位于 $B(y, \varepsilon_0) - \{y\}$ 的同一个连通分支内. 取 $x \in (y, x_{-\tau})$, 使得 $\{f^{im}(x) : 0 \leq i \leq n_l\} \subset B(y, \eta)$. 记 $B = [f^{n_lm}(x), x_{-\lambda+n_lm}]$. 因为 $B(x_{-\lambda+n_tm}, \eta) \cap \alpha(\theta, f) \neq \emptyset$, 所以存在 $B \in \mathbf{T}(\varepsilon)$ 使得 $[x, x_{-\tau}] \xrightarrow{(f, \varepsilon)} B$.

情形 2 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $f^N(y)$ 是一个周期点. 易证存在 $x_{-k} \in A$ 具有 $k > N$, 使得 $[f^N(y), x_{-k+N}]$ 是个 $\theta(\varepsilon)$ -弧, 且对 $0 \leq i \leq N$, $\text{diam} f^i([y, x_{-k}]) < \varepsilon$. 根据情形 1, 存在 $x' \in (f^N(y), x_{-k+N})$ 和 $B \in \mathbf{T}(\varepsilon)$ 使得 $[x', x_{-k+N}] \xrightarrow{(f, \varepsilon)} B$. 取 $x \in f^{-N}(x') \cap (y, x_{-\tau})$, 则 $[x, x_{-\tau}] \xrightarrow{(f, \varepsilon)} B$.

情形 3 $O(y, f)$ 是一个无限集. 取 $a \in \alpha(\theta, f) - \omega(y, f)$ (因为 $\alpha(\theta, f) \neq \omega(y, f)$). 记

$$\xi = \min \left\{ d(a, \omega(y, f)), \frac{\varepsilon}{3} \right\} \quad (> 0).$$

设 $0 < \mu < \xi/8$, 使得对一切 $x \in G$, 都有 $f(B(x, \mu)) \subset B(f(x), \xi/8)$. 取 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n \geq N$ 时, $f^n(y) \in B(\omega(y, f), \mu)$ 和 $x_{-n} \in B(\alpha(\theta, f), \mu)$. 设 $x_{-s} \in B(a, \mu)$ 具有 $s > N$, 则存在 $s + N < n_1 < n_2 < \cdots$, 使得对任意的 $k \in \mathbb{N}$ 和 $0 \leq i \leq N$, 有 $x_{-n_k} \in (y, x_{-\tau})$ 和 $d(f^i(y), f^i(x_{-n_k})) < \mu$. 对每个 $k \in \mathbb{N}$, 存在相应的 $m_k > N$, 使得 $d(f^{m_k}(y), f^{m_k}(x_{-n_k})) \geq \mu$ 且当 $0 \leq i \leq m_k - 1$ 时, 有

$$d(f^i(y), f^i(x_{-n_k})) < \mu.$$

记 $y_k = f^{m_k}(y)$ (对每个 $k \in \mathbb{N}$). 通过取子列, 我们可以假定 $y_k \rightarrow w$, $y_{k+1} \in (w, y_k)$ (对每个 $k \in \mathbb{N}$),

$$\text{diam}[w, y_1] < \frac{\mu}{2}, \quad (w, y_1) \cap V(G) = \emptyset.$$

易见存在 $x \in (y, x_{-n_4})$, 使得 $f^{n_4}(x) \in (y_5, y_3)$, 且当 $0 \leq i \leq m_4 - 1$ 时, 有 $f^i(x) \in (f^i(y), f^i(x_{-n_4}))$. 由引理 2.6 可知,

$$f([f^{m_4-1}(x), f^{m_4-1}(x_{-n_4})]) \supset [w, y_5] \quad \text{或} \quad f([f^{m_4-1}(x), f^{m_4-1}(x_{-n_4})]) \supset [y_3, y_1].$$

因为 $[w, y_5], [y_3, y_1] \in \mathbf{T}(\varepsilon)$, 所以存在 $B \in \{[w, y_5], [y_3, y_1]\}$, 使得 $[x, x_{-\tau}] \xrightarrow{(f, \varepsilon)} B$. 证毕. $\square$

对任意的 $A \in \mathbf{T}(\varepsilon)$, 记

$$\mathbf{T}(\varepsilon, A) = \{A' \in \mathbf{S}(\varepsilon) : A \xrightarrow{(f, \varepsilon)} A' \text{ 且存在 } A'' \in \mathbf{T}(\varepsilon) \text{ 使得 } A' = A'' \text{ 或 } A' \xrightarrow{(f, \varepsilon)} A''\}$$

和

$$\Gamma(\varepsilon, A) = \bigcup \{A' : A' \in \mathbf{T}(\varepsilon, A)\}.$$

引理 2.8 (参见文献 [15, 引理 3.8(3)]) 设 $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon/2$, 使得对任意的 $x \in G$, 有

$$f(B(x, \varepsilon_1)) \subset B(f(x), \varepsilon).$$

若 $A \in \mathbf{T}(\varepsilon)$ 和 $B \in \mathbf{T}(\varepsilon, A)$ 满足 $\text{diam} B < \varepsilon_1$, 则 $f(B) \in \mathbf{T}(\varepsilon, A)$.

引理 2.9 设 $A = [y, x_{-s}]$ 是一个 $\theta(\varepsilon)$ -弧, 则 $\alpha(\theta, f) \subset \overline{\Gamma(\varepsilon, A)}$.

证明 设 $\mu > 0$, 使得当 $u, v \in G$ 且满足 $d(u, v) < \mu$ 时, $d(f(u), f(v)) < \varepsilon/3$. 取 $x_{-s} \in A$ 使得 $[y, x_{-s}]$ 和 $f([y, x_{-s}])$ 都是 $\theta(\varepsilon)$ -弧, 且 $f([y, x_{-s}]) \in \mathbf{T}(\varepsilon, A)$. 用反证法, 假设 $\alpha(\theta, f) - \overline{\Gamma(\varepsilon, A)} \neq \emptyset$, 则存在 $a \in \alpha(\theta, f)$ 和 $\delta > 0$, 使得 $B(a, \delta) \cap \Gamma(\varepsilon, A) = \emptyset$.

取 $1 < t_1 < n_1 < t_2 < n_2 < \cdots < t_k < n_k < \cdots$, 使得对每个 $k \in \mathbb{N}$, 有

$$x_{-t_k} \in B(a, \delta), \quad x_{-n_k-1} \in [y, x_{-s}], \quad x_{-n_k} = f(x_{-n_k-1}) \in \Gamma(\varepsilon, A),$$

从而对每个 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $t_k < m_k \leq n_k$, 使得 $x_{-m_k} \in O(x_{-n_k}, f) \cap \Gamma(\varepsilon, A)$ 且 $x_{-m_k+1} \notin \Gamma(\varepsilon, A)$.

设 $x_{-m_k} \in A_k$ (对某个 $A_k \in \mathbf{T}(\varepsilon, A)$), 则由引理 2.8 可知, $\text{diam } A_k \geq \mu$. 通过取子列, 我们可以假定对每个 $k \in \mathbb{N}$, 有 $x_{-m_{k+1}} \in [c, x_{-m_k}]$, $d(c, x_{-m_{k+1}}) \leq d(c, x_{-m_k})/2 < \mu/2$ 和 $(c, x_{-m_k}] \cap V(G) = \emptyset$, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{-m_k} = c$.

因为 $c \neq x_{-m_k}$ (对每个 $k \in \mathbb{N}$), 所以 $c \in \alpha(\theta, f)$. 从而 $c \notin A_k$ (对每个 $k \in \mathbb{N}$) (否则, 若对某个 $k \in \mathbb{N}$, 有 $c \in A_k$, 则 $f([c, x_{-m_k}]) \subset f(A_k)$ 且由引理 2.8 可知 $f([c, x_{-m_k}]) \in \mathbf{T}(\varepsilon, A)$, 可推出 $x_{-m_k+1} = f(x_{-m_k}) \in \Gamma(\varepsilon, A)$, 这是矛盾的), 且 $[x_{-m_k}, x_{-m_1}] \subset A_k$. 由引理 2.7 知, 存在 $x \in (c, x_{-m_1}]$, $x_{-n_k} \in (c, x]$ 和 $B \in \mathbf{T}(\varepsilon)$, 使得 $[x_{-n_k}, x_{-m_1}] \supset [x, x_{-m_1}] \xrightarrow{(f, \varepsilon)} B$. 这说明 $[x_{-n_k}, x_{-m_1}] \in \mathbf{T}(\varepsilon, \mathbf{A})$. 由引理 2.8 可推出 $f([x_{-m_k}, x_{-m_1}]) \in \mathbf{T}(\varepsilon, A)$. 从而有

$$x_{-m_k+1} = f(x_{-n_k}) \in \Gamma(\varepsilon, A).$$

这是矛盾的. 证毕. □

定理 2.1 的证明 假定 $\alpha(\theta, f)$ 是一个无限集, 且对任意的 $x \in \alpha(\theta, f)$, 有 $\omega(x, f) \neq \alpha(\theta, f)$. 设

$$\frac{1}{4} > \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \cdots \geq \varepsilon_n \geq \cdots,$$

使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, 且对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 和 $x \in G$, 有 $f(B(x, \varepsilon_{n-1})) \subset B(f(x), \varepsilon_n)$. 取 $z_1, z_2, \dots \in \alpha(\theta, f)$ 使得 $\overline{\{z_n, z_{n+1}, \dots\}} = \alpha(\theta, f)$ (对每个 $n \in \mathbb{N}$). 对每个 z_n , 由引理 2.9 知, 存在一个 $\theta(\varepsilon_n)$ -弧 A_n , 一个 $\theta(\varepsilon_{n+1})$ -弧 A_{n+1} , $B_n \in \mathbf{S}(\varepsilon_n)$ 和 $A'_n \in \mathbf{T}(\varepsilon_n)$, 使得

$$A_n \xrightarrow{(f, \varepsilon_n)} B_n \xrightarrow{(f, \varepsilon_n)} A'_n \supset A_{n+1} \quad \text{且} \quad d(B_n, z_n) < \frac{\varepsilon_n}{3}.$$

从而, 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$B_n \xrightarrow{(f, \varepsilon_n)} B_{n+1} \quad \text{且} \quad \alpha(\theta, f) \subset B\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} B_j, \varepsilon_n\right).$$

由引理 2.5 可推出, 存在 $x \in G$ 使得 $\alpha(\theta, f) = \omega(x, f)$. 证毕. □

现在构造一个无穷树 (dendrite) D 和一个自映射 $g \in C^0(D)$, 使得定理 2.1 对 g 不成立.

例 2.10 在 $\mathbb{R}^2$ 上, 对任意的 $k \in \mathbb{N}$, 记

$$L_k = \left\{ (x, y) : y = \frac{x}{k}, 0 \leq x \leq \frac{1}{k} \right\}, \quad T_k = \left\{ (x, y) : y = -\frac{x}{k}, -\frac{1}{k} \leq x \leq 0 \right\}.$$

记 $A = \{(0, y) : 0 \leq y \leq 1\}$, 则 $D = A \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} (L_k \cup T_k))$ 是一个无穷树 (dendrite). 对任意的 $k \in \mathbb{N}$ 和 $n \geq k$, 记

$$\begin{aligned} P_{kn} &= \left(\frac{1}{4k} + \frac{1}{4k+n}, \frac{1}{4k^2} + \frac{1}{k(4k+n)} \right), \\ P_{k,-n} &= \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{4k+n}, \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k(4k+n)} \right), \\ P_k &= \left(\frac{1}{4k}, \frac{1}{4k} \right), \quad P_{-k} = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2} \right) \in L_k \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} Q_{kn} &= \left(-\frac{1}{4k} - \frac{1}{4k+n}, \frac{1}{4k^2} + \frac{1}{k(4k+n)} \right), \\ Q_{k,-n} &= \left(-\frac{1}{k} + \frac{1}{4k+n}, \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k(4k+n)} \right), \\ Q_k &= \left(-\frac{1}{4k}, \frac{1}{4k^2} \right), \quad P_{-k} = \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2} \right) \in T_k. \end{aligned}$$

对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 设 $M_n = (0, 1/4 + 1/(4n+1))$, $M_{-n} = (0, 1 - 1/(4n+1))$. 记 $M = (0, 1/4)$, $Q = (0, 1)$, $O = (0, 0)$ (见图 1).

现在定义 $g \in C^0(D)$ 如下 (其中 $A \rightarrow B$ 表示 $g(A) = B$):

图 1 例 2.10 中的无穷树 D

(1) 对任意的 $n, k \in \mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned} & \cdots \rightarrow M_{-k} \rightarrow Q_{1,-k} \rightarrow Q_{2,-k} \rightarrow \cdots \rightarrow Q_{k,-k} \rightarrow P_{k,-k} \rightarrow \cdots \rightarrow P_{2,-k} \rightarrow P_{1,-k} \rightarrow \cdots \\ & \rightarrow M_{-3} \rightarrow Q_{1,-3} \rightarrow Q_{2,-3} \rightarrow Q_{3,-3} \rightarrow P_{3,-3} \rightarrow P_{2,-3} \rightarrow P_{1,-3} \\ & \rightarrow M_{-2} \rightarrow Q_{1,-2} \rightarrow Q_{2,-2} \rightarrow P_{2,-2} \rightarrow P_{1,-2} \\ & \rightarrow M_{-1} \rightarrow Q_{1,-1} \rightarrow P_{1,-1} \\ & \rightarrow M_1 \rightarrow Q_{1,1} \rightarrow P_{1,1} \\ & \rightarrow M_2 \rightarrow Q_{1,2} \rightarrow Q_{2,2} \rightarrow P_{2,2} \rightarrow P_{1,2} \\ & \rightarrow M_3 \rightarrow Q_{1,3} \rightarrow Q_{2,3} \rightarrow Q_{3,3} \rightarrow P_{3,3} \rightarrow P_{2,3} \rightarrow P_{1,3} \rightarrow \cdots \\ & \rightarrow M_k \rightarrow Q_{1,k} \rightarrow Q_{2,k} \rightarrow \cdots \rightarrow Q_{k,k} \rightarrow P_{k,k} \rightarrow \cdots \rightarrow P_{2,k} \rightarrow P_{1,k} \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} & \cdots \rightarrow P_{-n} \rightarrow P_{-n+1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_{-1} \rightarrow Q \rightarrow Q_{-1} \rightarrow \cdots \rightarrow Q_{-n+1} \rightarrow Q_{-n} \rightarrow \cdots \\ & \cdots \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow M \rightarrow Q_1 \rightarrow \cdots \rightarrow Q_{n-1} \rightarrow Q_n \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

(2) $f(O) = O$ 且 g 在其余的地方是线性的.

设 $\theta = (M_1, P_{1,-1}, Q_{1,-1}, M_{-1}, \dots, P_{1,-k}, P_{2,-k}, \dots, P_{k,-k}, Q_{k,-k}, \dots, Q_{2,-k}, Q_{1,-k}, M_{-k}, \dots)$. 易证

$$\{P_{-n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q_{-n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{O, Q\} \subset \alpha(\theta, g).$$

以下我们证明: 对任意的 $x \in D$, $Q \notin \omega(x, g)$.

如果 $x \in \{P_{-n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q_{-n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{O, Q\}$, 那么 $\omega(x, g) = \{O\}$.

如果 $x \in D - \{P_{-n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q_{-n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{O, Q\}$, 那么存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$x \in \Phi = [O, M_{-n}] \cup \left(\bigcup_{k=1}^n ([O, Q_{k,-n}] \cup [O, P_{k,-n}]) \right) \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} ([O, P_{k,k}] \cup [O, Q_{k,k}]) \right),$$

其中 $[u, v]$ 表示 D 上端点集为 $\{u, v\}$ 的唯一弧. 因为 $g(\Phi) \subset \Phi$, 所以 $Q \notin \omega(x, g)$.

致谢 感谢审稿人提出的意见和建议.

参考文献

- 1 Hero M. Special α -limit points for maps of the interval. Proc Amer Math Soc, 1992, 116: 1015–1022
- 2 Block L S, Coppel W A. Dynamics in One Dimension. Berlin: Springer-Verlag, 1992
- 3 Balibrea F, Dvornikova G, Lampart M, et al. On negative limit sets for one-dimensional dynamics. Nonlinear Anal, 2012, 75: 3262–3267
- 4 Blokh A. On transitive maps of one-dimensional branched manifolds (in Russian). In: Differential-Difference Equations and Problems of Mathematical Physics, vol. 131. Kiev: Akademiia Nauk Ukrain, 1984, 3–9
- 5 Blokh A. Dynamical systems on one-dimensional branched manifolds, I. J Soviet Math, 1990, 48: 500–508
- 6 Blokh A. Dynamical systems on one-dimensional branched manifolds, II. J Soviet Math, 1990, 48: 668–674
- 7 Blokh A. Dynamical systems on one-dimensional branched manifolds, III. J Soviet Math, 1990, 49: 875–883
- 8 Llibre J, Misiurewicz M. Horseshoes, entropy and periods for graph maps. Topology, 1993, 32: 649–664
- 9 Mai J, Shao S. The structure of graph maps without periodic points. Topology Appl, 2007, 154: 2714–2728
- 10 Mai J, Sun T. ω -Limit set of a graph map. Topology Appl, 2007, 154: 2306–2311

- 11 Mai J, Sun T. Non-wandering points and the depth for graph maps. *Sci China Ser A*, 2007, 50: 1808–1814
- 12 孙太祥, 席鸿建, 陈占和, 等. 图映射的吸引中心与拓扑熵. *数学进展*, 2004, 33: 540–546
- 13 Ye X. Non-wandering points and the depth of a graph map. *J Aust Math Soc*, 2000, 69: 143–152
- 14 Sun T, Su G, Liang H, et al. Topological entropy and special α -limit points of graph maps. *Discrete Dyn Nat Soc*, 2011, 2011: 642–663
- 15 Mai J, Shao S. Spaces of ω -limit sets of graph maps. *Fund Math*, 2007, 196: 91–100
- 16 Sun T, Xi H, Liang H. Special α -limit points and unilateral γ -limit points for graph maps. *Sci China Math*, 2011, 54: 2013–2018

Negative limit sets of graph maps

SUN TaiXiang & XI HongJian

Abstract Let G be a graph and $f : G \rightarrow G$ be a continuous map. A sequence $\theta = (x_0, x_{-1}, \dots, x_{-n}, \dots)$ of points in G is called a negative orbit through x_0 of f if $f(x_{-n}) = x_{-n+1}$ for every positive integer n . The α -limit set of θ is the set $\alpha(\theta, f)$ of all limit points of θ . In this paper, we show that the α -limit set of every negative orbit of f is an ω -limit set of some point in G . Besides, we illustrate that the above result does not hold for a dendrite map.

Keywords graph map, α -limit set, ω -limit set, negative orbit

MSC(2010) 37E25, 37B40, 54H20

doi: 10.1360/SCM-2016-0259