基于时滞和多维相依风险模型的最优期望 - 方差比例再保险

杨潇潇, 梁志彬*, 张彩斌

南京师范大学数学科学学院, 南京 210023

E-mail: xxyang_93@163.com, liangzhibin111@hotmail.com, zhang-caibin@163.com

收稿日期: 2016-06-14; 接受日期: 2016-09-30; 网络出版日期: 2017-04-27; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11471165)、江苏省自然科学基金 (批准号: BK20141442) 和江苏省普通高校研究生科研创新 (批准号: KYLX15-0723) 资助项目

摘要 本文考虑基于时滞和多维复合 Poisson 相依风险模型的最优比例再保险问题, 以最大化终端财富值的期望 - 方差效用为目标, 在博弈论的框架下构建时间不一致问题, 并探讨该问题下的子博弈 Nash 均衡策略. 通过随机控制理论以及相应的广义 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程, 本文得到了保险业务数量 $n = 2$ 情形下最优策略和值函数的显式表达; 同时通过降维的方法得到 $n = 3$ 情形下最优结果的解析解, 这类降维的方法同样适用于 $n > 3$ 的情形. 最后, 通过一些数值例子和图表来进一步说明所获得的结论, 并探讨模型中某些重要参数对最优结果的影响.

关键词 时滞 多维相依风险 期望 - 方差效用 时齐策略 广义 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程 比例再保险

MSC (2010) 主题分类 62P05, 93E20, 91B30

1 引言

保险索赔给保险公司所带来的 (巨大) 风险, 使得风险管理和风险控制成为保险公司的重要议题, 而再保险则是保险公司进行风险控制和风险规避的非常有效的工具和手段. 因此, 再保险安排在保险业务的健康发展中起着举足轻重的作用. 在开展再保险业务时, 保险公司以减少潜在利润为代价, 将它的部分风险转移给另一方. 然而分出业务过多会显著地降低净利润水平, 分出业务过少承担风险过高则会导致偿付不足甚至引发破产. 因此, 如何选择合理的最优再保险决策, 在最大限度地提高回报率的同时最大可能地降低风险, 成为了每一个保险决策者高度关注的问题.

近几十年来, 已经有大量文献研究最优再保险问题. 例如, Højgaard 和 Taksar^[1] 通过最大化收益回报来确定保险公司的最优比例再保险策略. Schmidli^[2] 和 Liang^[3] 以最小化破产概率为目标, 考虑了保险公司的最优比例再保险问题, 其中累积索赔过程是由带漂移的 Brown 运动刻画的. Kaluszka^[4,5] 主要研究了不同均值 - 方差保费原理下的最优再保险问题. Centeno^[6,7]、Hald 和 Schmidli^[8] 以及 Liang 和 Guo^[9] 则致力于研究鞅方法下使调节系数最大化的最优再保险问题.

英文引用格式: Yang X X, Liang Z B, Zhang C B. Optimal mean-variance reinsurance with delay and multiple classes of dependent risks (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 723–756, doi: 10.1360/SCM-2016-0388

此外, 利用期望 - 方差理论框架来寻求最优再保险策略是保险精算领域另一个重要的研究课题. 期望 - 方差准则由 Markowitz^[10] 首次提出, 现已成为数理金融理论发展的里程碑之一. Markowitz^[10] 对一系列的 (风险) 资产寻求最佳的投资组合, 期望在固定时间区间内实现预期回报与风险 (如方差) 之间的最优平衡. 到目前为止, 在金融领域, 已有很多基于期望 - 方差准则及其相关拓展的很不错的文献. 例如, 基于一些已知的结论, Li 和 Ng^[11] 及 Zhou 和 Li^[12] 分别解决了多期和连续时间模型下的期望 - 方差问题.

虽然目前在期望 - 方差理论框架下已有大量考虑最优再保险问题的文献, 但仍然存在至少两方面的问题值得我们进一步去思考与探讨. 首先, 已有的大部分关于最优再保险的工作都是基于不同保险业务之间相互独立的假设进行的, 然而在实际的保险市场中, 不同的保险业务之间总会以某种方式相互联系影响着. 举一个典型的例子, 地震、飓风或海啸这三种大型自然灾害常会导致很多类型保险业务索赔的同时发生, 如医疗索赔、死亡索赔和家庭财产索赔等. 这个例子刻画了某一事件发生导致不同保单类型发生索赔的情形. 为了更好地用数学来描述这种不同类别保险业务之间相互依赖的关系, 相依风险模型被提出. 近年来, 研究相依风险模型的工作越来越多, 如文献 [13–15] 以及它们中引用的参考文献. 然而基于相依风险模型考虑最优再保险问题的文献却很少. Bai 等^[16] 在相应的扩散逼近风险模型中通过最小化破产概率寻求最优限额损失再保险策略; Liang 和 Yuen Kam^[17] 采用方差保费原理, 同时考虑了复合 Poisson 模型和扩散逼近模型下的最优比例再保险问题; Yuen Kam 等^[18] 在 Liang 和 Yuen Kam^[17] 的工作基础上, 考虑了期望保费原理下的最优再保险, 且保险人的盈余过程是由多个相依风险的复合 Poisson 过程刻画; Ming 和 Liang^[19] 同样考虑了复合 Poisson 相依风险模型下的期望 - 方差再保险问题, 并得出了相应的最优结果.

另一方面, 已有的考虑最优再保险的文献大多只是基于当时 (即决策时) 的信息来确定相关最优策略, 而没有将时滞即过去的信息考虑进来. 然而实际情形中, 过去的信息总会或多或少地影响着投资者或者保险人的决策. 例如, 在对股票等风险资产进行投资时, 投资者不仅关心股票现在的价格, 更关心在过去一段时间内股票的价格走势等相关信息. 如果在过去一段时间内股票价格持续走高, 那么投资者将趋向于买入更多的股票. 相反地, 如果之前股票价格处于回落状态, 那么投资者将倾向于卖掉手中的股票去投资于其他资产. 因此, 将过去的部分信息考虑进模型中可帮助我们作出更合理的决策. 例如, Chang 等^[20] 假设金融市场是具有有界记忆的; Federico^[21] 假设养老基金的管理中存在与绩效相关的资本流入/流出行为发生; Elsanousi 等^[22]、Øksendal 和 Sulem^[23] 以及 David^[24] 则利用动态规划原理或随机最大值原理, 为解决具有时滞的随机控制问题提供了相关理论基础; Mao 和 Sabanis^[25] 用具有时滞效用的几何 Brown 运动模型来研究金融期权估值问题; Shen 等^[26] 研究了具有时滞的随机最优控制问题, 其中控制状态方程是由平均场 (mean-field) 跳扩散随机时滞微分方程刻画的. 到目前为止, 很多学者研究了金融领域的相关优化问题, 但只有少数文献基于带时滞效应的模型来考虑最优再保险问题. 例如, Shen 和 Zeng^[27] 考虑了期望 - 方差准则下带时滞效应的最优投资再保险问题; A 和 Li^[28] 在 Heston 随机波动模型下考虑了带时滞效应的最优投资和限额损失再保险问题.

受上述研究的启发, 本文以最大化终端财富值的期望 - 方差效用为目标, 进一步探讨了基于时滞和多维相依风险的复合 Poisson 模型下的最优比例再保险问题. 由于目标函数的表达式是二次函数的期望形式, 根据文献 [29], 我们知道此类问题属于时间不一致问题, 所以, Bellman 最优原理在这里不再适用. 因此, 我们在博弈论框架下探讨该问题并寻找对应的子博弈 Nash 均衡策略. 最早从 Strotz^[30] 研究 Ramsay 确定性问题开始, 在博弈 Nash 均衡理论框架下研究时间不一致问题已经具有很长的历史. 近年来, 很多学者对这种理论和方法很感兴趣, 发表了大量与这种理论和方法相关的论文. 例如, Ekeland 和 Lazrak^[31] 以及 Ekeland 和 Privu^[32] 从博弈 Nash 均衡理论的角度考虑了确定性和随机

模型中的双曲线贴现下的最优消费和投资. 据我们所知, 这两篇文献首次给出了连续时间模型下均衡概念的精确定义. 本文将利用随机控制理论和广义 HJB 方程, 在博弈论框架下去探求均衡再保险策略和相应值函数的显式解或者解析解. 由于本文将再保险比例限制在区间 $[0, 1]$, 所以, 我们针对 $n = 2$ 和 $n \geq 3$ 两种情形, 分别使用“截断”和“降维”两种方法给出了详细的分析求解过程.

接下来的内容主要有 5 节: 第 2 节给出模型和具体要解决的问题. 第 3 和 4 节得到了保险业务数量 $n = 2$ 情形下最优策略和值函数的显式表达. 对于 $n = 3$ 的情形, 我们利用“降维”的方法给出了相应的最优策略以及值函数的解析表达, “降维”方法同样可以用来求解 $n > 3$ 情形下相应的最优结果. 第 5 节通过一些数例和图表来进一步说明所获得的结论, 并探讨模型参数对最优策略的影响. 最后在第 6 节对本文进行总结与展望.

2 模型和最优问题

2.1 模型

假设一家保险公司拥有一份保险组合业务, 该业务由 $n (\geq 2)$ 种不同的保险业务构成, 如车险、意外伤害保险、健康保险和火灾保险等, 且这些保险业务彼此并不独立. 对于第 i ($i = 1, 2, \dots, n$) 类保险业务, 令随机变量 X_{ij} ($j = 1, 2, \dots$) 表示其第 j 次索赔的索赔额度, 假设它们独立同分布, 且分布函数为 $F_i(x)$, 其中, 当 $X \leq 0$ 时, $F_i(x) = 0$; 当 $x > 0$ 时, $0 < F_i(x) < 1$. 那么, 第 i 类保险业务的累积索赔过程为

$$S_i(t) = \sum_{j=1}^{\tilde{N}_i(t)} X_{ij},$$

其中 $\tilde{N}_i(t)$ 表示第 i 类风险业务到 t 时刻为止的索赔次数. 类似地, 我们假设 $\{X_{ij}; i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots\}$ 与计数过程 $\{\tilde{N}_i(t); i = 1, 2, \dots, n\}$ 相互独立.

对于不同的险种, 假设其对应的索赔次数过程通过以下方式相互依赖:

$$\tilde{N}_i(t) = N_i(t) + N(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中 $N_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 和 $N(t)$ 是 $n+1$ 个独立的 Poisson 过程, 且过程对应的强度分别为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 和 λ_0 . 因此, 这 n 类风险业务的总索赔额为

$$S_t = \sum_{i=1}^n S_i(t) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{N_i(t)+N(t)} X_{ij} \right). \quad (2.1)$$

为了书写方便, 记

$$\begin{aligned} a_i &= E[S_i(t)] = (\lambda_i + \lambda_0)\mu_i, \\ \sigma_i^2 &= \text{Var}[S_i(t)] = (\lambda_i + \lambda_0)\beta_i, \end{aligned}$$

其中

$$\mu_i = E[X_i], \quad \beta_i = E[X_i^2].$$

那么, 我们定义保险公司到 t 时刻的盈余过程为

$$R_t = u + ct - S_t,$$

其中 u 表示初始盈余, c 为保费率, S_t 代表到 t 时刻为止的累积索赔额过程. 对于第 i ($i = 1, 2, \dots, n$) 类业务, 假设保费是基于期望保费原理, 按照 $c_i = (1 + \theta_i)a_i$ 连续收取的, 其中 θ_i 是保险人的安全附加系数. 所以,

$$c = \sum_{i=1}^n c_i.$$

因此, 保险人的盈余过程 $\{R_t\}_{t \geq 0}$ 可以用以下的随机微分方程来刻画:

$$dR_t = cdt - dS_t = \sum_{i=1}^n c_i dt - \sum_{i=1}^n dS_i(t).$$

假设保险人可以通过购买再保险的方式来控制自身业务风险. 记 $q_{it} \in [0, 1]$ 表示保险公司在 t 时刻对于第 i 类风险的自留比例, 而时刻 t 的再保险保费率为

$$\tilde{c}(q_t) = \sum_{i=1}^n (1 + \eta_i)(1 - q_{it})a_i,$$

其中 $q_t = (q_{1t}, q_{2t}, \dots, q_{nt})$, η_i 是再保险人对于第 i 类风险的安全附加系数. 不失一般性, 假设 $\eta_i > \theta_i$, 即考虑所谓的非便宜再保险. 那么保险人的自留保费为

$$c(q_t) = c - \tilde{c}(q_t) = \sum_{i=1}^n (\xi_i a_i + (1 + \eta_i)q_{it}a_i),$$

其中 $\xi_i = \theta_i - \eta_i$.

此外, 假设该保险公司用盈余购买利率为 $r_0(t)$ (≥ 0) 的无风险资产进行投资, 且 $r_0(t)$ 关于 t 一致有界. 记 $\{R_t^q, t \geq 0\}$ 表示保险人在采取再保险策略 $q_t = (q_{1t}, q_{2t}, \dots, q_{nt})$ 之后相应的盈余过程或者财富过程, 则 R_t^q 可以由下面的偏微分方程来刻画:

$$dR_t^q = \left[r_0(t)R_t^q + \sum_{i=1}^n (\xi_i a_i + (1 + \eta_i)q_{it}a_i) \right] dt - \sum_{i=1}^n q_{it}dS_i(t).$$

接下来, 考虑资本的即时流入或流出对原本财富过程的影响. 我们用 $X^q(t)$ 来表示具有时滞效用的保险人的财富过程. 记函数 $f(t, X^q(t) - \bar{Y}^q(t), X^q(t) - Z^q(t))$ 表示资本的流入/流出总额, 其中

$$Y^q(t) = \int_{-\delta}^0 e^{As} X^q(t+s) ds, \quad \bar{Y}^q(t) = \frac{Y^q(t)}{\int_{-\delta}^0 e^{As} ds}, \quad Z^q(t) = X^q(t-\delta),$$

且 A (≥ 0) 和 δ (≥ 0) 分别是给定的平均参数和时滞参数, 积分项中的 $e^{A\delta}$ 代表指数衰减因子. $Y^q(t)$ 、 $\bar{Y}^q(t)$ 和 $Z^q(t)$ 分别反映了在时间段 $[t-\delta, t]$ 内资本的综合、平均和逐点时滞信息, $X^q(t) - \bar{Y}^q(t)$ 则刻画 $t-\delta$ 到 t 时间内财富的平均表现, $X^q(t) - Z^q(t)$ 刻画在区间 $[t-\delta, t]$ 内财富的绝对表现. 这种与过去财富表现密切联系的资本流入或流出行为在实际的金融投资市场中经常发生. 例如, 若过去一段时间公司经营状况良好, 此时保险人自然会有更大的收益, 那么保险人会拿出部分收益向股东支付红利或奖励管理者, 这对应资本流出的情形, 即 $f > 0$, 也就是 $X^q(t) > Y^q(t)$ 且 $X^q(t) > Z^q(t)$. 相反, 如果过去的经营表现不佳, 保险人会进行注资或者融资来弥补相应的损失, 以达到期初的目标, 这是对应的资本流入情形, 此时 $f < 0$, 即 $X^q(t) < Y^q(t)$ 且 $X^q(t) < Z^q(t)$. 因此, 保险人的财富过程 $X^q(t)$ 为

$$dX^q(t) = \left[r_0(t)X^q(t) + \sum_{i=1}^n (\xi_i a_i + (1 + \eta_i)q_{it}a_i) \right] dt$$

$$-f(t, X^q(t) - \bar{Y}^q(t), X^q(t) - Z^q(t))dt - \sum_{i=1}^n q_{it} dS_i(t). \quad (2.2)$$

为了问题讨论方便, 考虑 f 为线性函数, 即

$$\begin{aligned} f(t, X^q(t) - \bar{Y}^q(t), X^q(t) - Z^q(t)) &= \alpha_1(t)(X^q(t) - \bar{Y}^q(t)) + \alpha_2(X^q(t) - Z^q(t)) \\ &= \alpha_1(t) \left(X^q(t) - \frac{Y^q(t)}{\int_{-\delta}^0 e^{As} ds} \right) + \alpha_2(X^q(t) - Z^q(t)) \\ &= (\alpha_1(t) + \alpha_2)X^q(t) - \tilde{\alpha}_1(t)Y^q(t) - \alpha_2 Z^q(t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 $\alpha_1(t) (\geq 0)$ 关于 t 一致有界, $\alpha_2 (\geq 0)$ 是一个常数, 且

$$\tilde{\alpha}_1(t) = \frac{\alpha_1(t)}{\int_{-\delta}^0 e^{As} ds}.$$

将函数 f 的表达式 (2.3) 代入过程 $X^q(t)$ 即 (2.2), 此时考虑再保险的具有时滞效应的财富过程为

$$\begin{cases} dX^q(t) = \left[(r_0(t) - \alpha_1(t) - \alpha_2)X^q(t) + \tilde{\alpha}_1(t)Y^q(t) \right. \\ \quad \left. + \alpha_2 Z^q(t) + \sum_{i=1}^n (\xi_i a_i + (1 + \eta_i)q_{it}a_i) \right] dt - \sum_{i=1}^n q_{it} dS_i(t), \\ dY^q(t) = [X^q(t) - AY^q(t) - e^{-A\delta}Z^q(t)]dt, \\ X^q(t) = x, \quad Y^q(t) = y, \quad Z^q(t) = z. \end{cases} \quad (2.4)$$

此外, 我们假设当 $t \in [-\delta, 0]$ 时, $X^q(t) = x > 0$, 也就是说, 保险公司在 $-\delta$ 时刻已经拥有了财富 x 且在时间段 $[-\delta, 0]$ 内未进行任何业务运营.

定义 1 假设过程 $X^q(s)$ ($0 \leq s \leq t$) 定义在可测状态空间 $(\mathcal{X}, \mathcal{G}_X)$, 策略 $q_t = (q_{1t}, q_{2t}, \dots, q_{nt})$ 取值空间为 $(\mathcal{Q}, \mathcal{G}_X)$, 其中 $\mathcal{Q} = [0, 1]^n$. 我们称策略 q_t 是可行策略, 如果它满足以下条件:

- (1) $q_t = (q_{1t}, q_{2t}, \dots, q_{nt})$ 是 $\mathcal{F}_t$ -可测的;
- (2) 对于 $i = 1, 2, \dots, n$, $q_{it} \in [0, 1]$;
- (3) 关于 $(X^q(t), Y^q(t))$ 的方程 (2.4) 有唯一的强解.

我们用 $\mathcal{A}$ 来表示所有可行策略的集合.

2.2 最优问题

本文的最优准则是最大化终端财富效用, 其中效用函数采用“期望 - 方差”形式, 所以, 我们的目标函数为

$$\begin{aligned} J(t, x, y, z, q) &= \mathbb{E}_{t,x,y,z}[X^q(T) + \theta Y^q(T)] - \frac{\gamma}{2} \text{Var}_{t,x,y,z}[X^q(T) + \theta Y^q(T)] \\ &\triangleq \mathbb{E}_{t,x,y,z}[F(t, X^q(T) + \theta Y^q(T))] + G(t, \mathbb{E}_{t,x,y,z}[X^q(T) + \theta Y^q(T)]), \end{aligned} \quad (2.5)$$

其中

$$\begin{cases} F(t, x) = x - \frac{\gamma}{2}x^2, \\ G(t, x) = \frac{\gamma}{2}x^2, \end{cases}$$

风险厌恶系数 $\gamma (> 0)$ 是给定的常数, $E_{t,x,y,z}[\cdot]$ 和 $\text{Var}_{t,x,y,z}[\cdot]$ 分别是基于初值为 x 、 y 和 z 的条件期望和条件方差, 这里常数 $\theta (\geq 0)$ 是 $X^q(T)$ 和 $Y^q(T)$ 的权重. 通过引入权重 $\theta (\geq 0)$, 同时考虑到终端财富 $X^q(T)$ 以及时间段 $[T - \delta, T]$ 内的累积财富 $Y^q(T)$, 这可以帮助我们更合理地进行相关决策. 接下来需要找到最优策略 q^* 使得以下等式成立:

$$V(t, x, y, z) = \sup_{q \in \mathcal{Q}} J(t, x, y, z, q). \quad (2.6)$$

正如引言部分所叙述, 由于本文采用的目标函数表达式是基于函数 $G(\cdot)$ 的期望形式, 根据文献 [29] 可知, 此类问题属于时间不一致问题, 因此, 我们需要在构建的博弈理论框架下把时间不一致问题转化为时间一致问题, 并通过寻找子博弈完美 Nash 均衡策略来解决文中提出的最优问题. 我们先给出均衡策略的定义.

定义 2 给定一个策略 $\tilde{q}$ (一般可视为候选均衡策略), 构建一个新的策略 q_h 为

$$q_h(s, u) = \begin{cases} q(s, u), & t \leq s < t + h, \quad u \in \mathbb{R}, \\ \tilde{q}(s, u), & t + h \leq s \leq T, \quad u \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

其中 $h > 0$, u 表示 s 时刻财富过程 X^q 的值. 如果对于任意的 $q \in \mathcal{Q}$ 和 $(t, x, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3$,

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \frac{J(t, x, y, z, \tilde{q}) - J(t, x, y, z, q_h)}{h} \geq 0$$

成立, 则称 $\tilde{q}$ 为均衡策略. 此时均衡值函数定义为

$$\tilde{V}(t, x, y, z) = J(t, x, y, z, \tilde{q}). \quad (2.7)$$

Chang 等 [20] 提到, 考虑时滞的最优控制问题往往是无限维问题, 所以要想得到最优结果, 我们必须附加一些额外条件, 例如, 值函数 V 只与 x 和 y 有关. 然而, $Y^q(t)$ 是与 $Z^q(t)$ 有关的过程, 所以, 下文将会给出使得值函数 V 只依赖于 (t, x, y) 成立的具体条件. 在接下来的讨论中, 我们考虑本文中的值函数 V 具有如下形式:

$$V(t, x, y, z) = V(t, x, y).$$

令 $C^{1,2,2}([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ 表示满足以下条件的函数的集合: 函数 $\varphi(t, x, y)$ 本身及其偏导数 $\varphi_t(t, x, y)$ 、 $\varphi_x(t, x, y)$ 、 $\varphi_y(t, x, y)$ 、 $\varphi_{xx}(t, x, y)$ 、 $\varphi_{yy}(t, x, y)$ 和 $\varphi_{xy}(t, x, y)$ 均在定义域 $[0, T] \times \mathbb{R}^2$ 上连续. 对于函数 $\varphi(t, x, y) \in C^{1,2,2}$ 和固定的再保险策略 $q \in \mathcal{Q}$, 跳扩散模型 (2.4) 的有限微分算子为

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^q \varphi(t, x, y) &= \varphi_t(t, x, y) + \varphi_x(t, x, y) \\ &\quad \times \left[(r_0(t) - \alpha_1(t) - \alpha_2)x + \tilde{\alpha}_1(t)y + \alpha_2z \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n (\xi_i a_i + (1 + \eta_i) a_i q_{it}) \right] + (x - Ay - e^{-A\delta} z) \varphi_y(t, x, y) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \lambda_i E[\varphi(t, x - q_{it} X_i, y) - \varphi(t, x, y)] \\ &\quad + \lambda_0 E \left[\varphi \left(t, x - \sum_{i=1}^n q_{it} X_i, y \right) - \varphi(t, x, y) \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

接下来, 我们定义广义 HJB 系统.

定义 3 对于 Nash 均衡问题的广义 HJB 系统定义如下:

$$\begin{cases} \sup_q \left\{ \mathcal{A}^q V(t, x, y) - \frac{\gamma}{2} \mathcal{A}^q g^2(t, x, y) + \gamma g \mathcal{A}^q g(t, x, y) \right\} = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ \mathcal{A}^{\tilde{q}} g(t, x, y) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ V(T, x, y) = x + \theta y, \\ g(T, x, y) = x + \theta y, \end{cases} \quad (2.9)$$

其中

$$g(t, x, y) = E_{t,x,y,z}[X^{\tilde{q}}(T) + \theta Y^{\tilde{q}}(T)], \quad (2.10)$$

$$\tilde{q} = \arg \sup_q \left\{ \mathcal{A}^q V(t, x, y) - \frac{\gamma}{2} \mathcal{A}^q g^2(t, x, y) + \gamma g \mathcal{A}^q g(t, x, y) \right\}. \quad (2.11)$$

接下来的定理给出了广义 HJB 系统的解与最优值之间的联系.

定理 1 (验证定理) 假设 (ϕ, g) 是定义 3 中广义 HJB 系统的一个解, 且策略 $\tilde{q}$ 满足 (2.11), 那么 $\tilde{q}$ 是一个均衡策略, 且 ϕ 是对应的均衡值函数, 也就是说 $\phi(t, x, y) = \tilde{V}(t, x, y)$. 此外, g 可以通过 (2.10) 表示出来.

定理 1 的证明与文献 [33] 中的相似, 所以, 我们在这里省略详细的证明过程.

注 1 在介绍完均衡策略和均衡值函数之后, 我们自然产生这样的疑问: 原始的时间不一致问题转化为博弈论理论框架下的时间一致问题之后, 这两者存在什么样的关系呢? 均衡策略 $\tilde{q}$ 和均衡值函数 $\tilde{V}$ 与 Bellman 原理下的最优策略 q^* 和最优策略 V 又存在什么样的联系呢? 根据文献 [29, 命题 8.1] 可知, 对于每一个时间不一致的最优问题, 都存在一个标准的时间一致控制问题与之对应, 且时间不一致问题的值函数和最优策略与对应时间一致问题的均衡值函数和均衡策略是一致的. 因此, 在接下来的讨论中, 在博弈论框架下所求出的均衡策略和均衡值函数即为对应的最优策略和值函数, 并分别用 q^* 和 V 表示.

我们注意到, 在定义 1 中, 由于我们要求集合 $\mathcal{Q}$ 中的策略满足约束 $q_{it} \in [0, 1]$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 因为这个约束的存在, 我们不能直接得到最优策略和相应的值函数. 因此, 我们定义一个新的可行策略集合 $\tilde{\mathcal{A}}$, 其中 $\tilde{\mathcal{A}}$ 包含的可行策略 $q_t = (q_{1t}, q_{2t}, \dots, q_{nt})$ 取值空间为 $(\tilde{\mathcal{Q}}, \mathcal{G}_X)$, 其中 $\tilde{\mathcal{Q}} = \mathbb{R}^n$, 且同样满足定义 1(1) 和 1(3) 条件. 在接下来的第 3 节里, 我们将在 $\tilde{\mathcal{A}}$ 中寻找最优策略 $\hat{q}_t = (\hat{q}_{1t}, \hat{q}_{2t}, \dots, \hat{q}_{nt})$ 和值函数 $\hat{V}(t, x, y)$.

3 集合 $\tilde{\mathcal{A}}$ 内的最优解

本节考虑下面这个最优问题:

$$\hat{V}(t, x, y) = J(t, x, y, z, \hat{q}) = \sup_q J(t, x, y, z, q). \quad (3.1)$$

为了简便, 我们用记号 r_0 、 α_1 和 $\tilde{\alpha}_1$ 分别代替 $r_0(t)$ 、 $\alpha_1(t)$ 和 $\tilde{\alpha}_1(t)$. 根据有限微分算子 (2.8), 我们可以得到

$$-\frac{\gamma}{2} \mathcal{A}^q g^2(t, x, y) = -\frac{\gamma}{2} \left\{ 2g(t, x, y)g_t(t, x, y) + 2g(t, x, y)g_x(t, x, y) \left[(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2)x + \tilde{\alpha}_1 y + \alpha_2 z \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^n (\xi_i a_i + (1 + \eta_i) a_i q_{it}) \Big] + 2g(t, x, y) g_y(t, x, y) (x - Ay - e^{-A\delta}) \\
 & + \sum_{i=1}^n \lambda_i E[g^2(t, x - q_{it} X_i, y) - g^2(t, x, y)] \\
 & + \lambda_0 E \left[g^2 \left(t, x - \sum_{i=1}^n q_{it} X_i, y \right) - g^2(t, x, y) \right] \Big\}, \\
 \gamma g \mathcal{A}^q g(t, x, y) = & \gamma g(t, x, y) \left\{ g_t(t, x, y) + \left[(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2)x + \tilde{\alpha}_1 y \right. \right. \\
 & + \alpha_2 z + \sum_{i=1}^n (\xi_i a_i + (1 + \eta_i) a_i q_{it}) \Big] g_x(t, x, y) \\
 & + (x - Ay - e^{-A\delta}) g_y(t, x, y) + \sum_{i=1}^n \lambda_i E[g(t, x - q_{it} X_i, y) - g(t, x, y)] \\
 & \left. \left. + \lambda_0 E \left[g \left(t, x - \sum_{i=1}^n q_{it} X_i, y \right) - g(t, x, y) \right] \right\} \right\}.
 \end{aligned}$$

因此, 广义 HJB 系统可以重新表示为

$$\left\{ \begin{aligned} & \sup_q \left\{ \hat{V}_t(t, x, y) + \Delta_1(q_t, t) \hat{V}_x(t, x, y) + \Delta_2(t) \hat{V}_y(t, x, y) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \left\{ E[\hat{V}(t, x - q_{it} X_i, y) - \hat{V}(t, x, y)] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\gamma}{2} E[g^2(t, x - q_{it} X_i, y) - g^2(t, x, y)] + \gamma g(t, x, y) E[g(t, x - q_{it} X_i, y) - g(t, x, y)] \right\} \right. \\ & \quad + \lambda_0 \left\{ E \left[\hat{V} \left(t, x - \sum_{i=1}^n q_{it} X_i, y \right) - \hat{V}(t, x, y) \right] - \frac{\gamma}{2} E \left[g^2 \left(t, x - \sum_{i=1}^n q_{it} X_i, y \right) - g^2(t, x, y) \right] \right. \\ & \quad \left. \left. + \gamma g(t, x, y) E \left[g \left(t, x - \sum_{i=1}^n q_{it} X_i, y \right) - g(t, x, y) \right] \right\} \right\} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & g_t(t, x, y) + \Delta_1(\hat{q}_t, t) g_x(t, x, y) + \Delta_2(t) g_y(t, x, y) + \sum_{i=1}^n \lambda_i E[g(t, x - \hat{q}_{it} X_i, y) - g(t, x, y)] \\ & \quad + \lambda_0 E \left[g \left(t, x - \sum_{i=1}^n \hat{q}_{it} X_i, y \right) - g(t, x, y) \right] = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & \hat{V}(T, x, y) = x + \theta y, \\ & g(T, x, y) = x + \theta y, \end{aligned} \right. \quad (3.2)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} & \Delta_1(q_t, t) = (r_0 - \alpha_1 - \alpha_2)x + \tilde{\alpha}_1 y + \alpha_2 z + \sum_{i=1}^n [\xi_i a_i + (1 + \eta_i) a_i q_{it}], \\ & \Delta_2 = x - Ay - e^{-A\delta}, \\ & q_t = (q_{1t}, q_{2t}, \dots, q_{nt}), \\ & \hat{q}_t = (\hat{q}_{1t}, \hat{q}_{2t}, \dots, \hat{q}_{nt}). \end{aligned} \right.$$

因为 $\hat{V}$ 和 g 均为 $E_{t,x,y,z}[X^{\hat{q}}(T) + \theta Y^{\hat{q}}(T)]$ 和 $E_{t,x,y,z}[(X^{\hat{q}}(T) + \theta Y^{\hat{q}}(T))^2]$ 的函数. 根据 $\hat{V}$ 和 g 的

终端条件, 我们假设函数 $\hat{V}$ 和 g 具有如下的表达式:

$$\begin{cases} \hat{V}(t, x, y) = K(t)(x + \theta y)^2 + P_1(t)(x + \theta y) + L_1(t), \\ g(t, x, y) = P_2(t)(x + \theta y) + L_2(t), \end{cases} \quad (3.3)$$

且满足边界条件

$$\begin{cases} P_1(T) = P_2(T) = 1, \\ K(T) = L_1(T) = L_2(T) = 0. \end{cases}$$

通过对函数 $\hat{V}$ 和 g 分别关于 t 、 x 和 y 求偏导, 我们可以得到

$$\begin{cases} \hat{V}_t(t, x, y) = \dot{K}(t)(x + \theta y)^2 + \dot{P}_1(t)(x + \theta y) + \dot{L}_1(t), \\ \hat{V}_x(t, x, y) = 2K(t)(x + \theta y) + P_1(t), \\ \hat{V}_y(t, x, y) = 2\theta K(t)(x + \theta y) + \theta P_1(t) = \theta V_x(t, x, y), \\ \hat{V}_{xx}(t, x, y) = 2K(t), \\ g_t(t, x, y) = \dot{P}_2(t)(x + \theta y) + \dot{L}_2(t), \\ g_x(t, x, y) = P_2(t), \\ g_{xx}(t, x, y) = \theta P_2(t) = \theta g_x(t, x, y), \end{cases}$$

其中

$$\dot{\varphi}(t) \triangleq \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t}.$$

通过计算可以得到

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\hat{V}(t, x - q_{it}X_i, y) - \hat{V}(t, x, y)] = K(t)[\beta_i q_{it}^2 - 2(x + \theta y)\mu_i q_{it}] - P_1(t)\mu_i q_{it}, \\ \mathbb{E}\left[\hat{V}\left(t, x - \sum_{i=1}^n q_{it}X_i, y\right) - \hat{V}(t, x, y)\right] \\ = K(t)\left[\sum_{i=1}^n \beta_i q_{it}^2 + \sum_{i \neq j} \mu_i \mu_j q_{it} q_{jt} - 2(x + \theta y) \sum_{i=1}^n \mu_i q_{it}\right] - P_1(t) \sum_{i=1}^n \mu_i q_{it}, \\ \mathbb{E}[g^2(t, x - q_{it}X_i, y) - g^2(t, x, y)] = P_2^2(t)[\beta_i q_{it}^2 - 2(x + \theta y)\mu_i q_{it}] - 2P_2(t)L_2(t)\mu_i q_{it}, \\ \mathbb{E}\left[g^2\left(t, x - \sum_{i=1}^n q_{it}X_i, y\right) - g^2(t, x, y)\right] \\ = P_2^2(t)\left[\sum_{i=1}^n \beta_i q_{it}^2 + \sum_{i \neq j} \mu_i \mu_j q_{it} q_{jt} - 2(x + \theta y) \sum_{i=1}^n \mu_i q_{it}\right] - 2P_2(t)L_2(t) \sum_{i=1}^n \mu_i q_{it}, \\ \mathbb{E}[g(t, x - q_{it}X_i, y) - g(t, x, y)] = -P_2(t)\mu_i q_{it}, \\ \mathbb{E}\left[g\left(t, x - \sum_{i=1}^n q_{it}X_i, y\right) - g(t, x, y)\right] = -P_2(t) \sum_{i=1}^n \mu_i q_{it}. \end{cases}$$

将以上结果代入 (3.2), 我们可以得到, 对 $0 \leq t \leq T$, 广义 HJB 系统可以表示为

$$\begin{cases} \sup_q \left\{ \dot{K}(t)(x + \theta y)^2 + \dot{P}_1(t)(x + \theta y) + \dot{L}_1(t) + \Delta_3(q_t, t)[2K(t)(x + \theta y) + P_1(t)] \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 q_{it}^2 + \sum_{i \neq j} \lambda_0 \mu_i \mu_j q_{it} q_{jt} \right] (2K(t) - \gamma P_2^2(t)) \right\} = 0, \\ \dot{P}_2(t)(x + \theta y) + \dot{L}_2(t) + \Delta_3(\hat{q}_t, t)P_2(t) = 0, \\ P_1(T) = P_2(T) = 1, \\ K(T) = L_1(T) = L_2(T) = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

其中

$$\Delta_3(q_t, t) = (r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)x + (\tilde{\alpha}_1 - A\theta)y + (\alpha_2 - \theta e^{-A\delta})z + \sum_{i=1}^n (\xi_i a_i + \eta_i a_i q_{it}).$$

显然, 如果 $\Delta_3(q_t, t)$ 中 z 的系数为 0, 即下面的等式成立:

$$\alpha_2 = \theta e^{-A\delta}, \quad (3.5)$$

那么 HJB 系统 (3.4) 的解与 z 无关. 此时,

$$\Delta_3(q_t, t) = (r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)x + (\tilde{\alpha}_1 - A\theta)y + \sum_{i=1}^n (\xi_i a_i + \eta_i a_i q_{it}).$$

为了简便, 假设

$$h(q_t) = \Delta_3(q_t, t)[2K(t)(x + \theta y) + P_1(t)] + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 q_{it}^2 + \sum_{i \neq j} \lambda_0 \mu_i \mu_j q_{it} q_{jt} \right] (2K(t) - \gamma P_2^2(t)). \quad (3.6)$$

对 $h(q_t)$ 关于 q_{it} 求导可以得到

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial q_{it}} = \eta_i a_i [2K(t)(x + \theta y) + P_1(t)] + \left[\sigma_i^2 q_{it} + \sum_{j \neq i} \lambda_0 \mu_i \mu_j q_{jt} \right] (2K(t) - \gamma P_2^2(t)), \\ \frac{\partial^2 h}{\partial q_{it}^2} = \sigma_i^2 (2K(t) - \gamma P_2^2(t)), \\ \frac{\partial^2 h}{\partial q_{it} \partial q_{jt}} = \lambda_0 \mu_i \mu_j (2K(t) - \gamma P_2^2(t)), \quad i \neq j, \\ i, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

显然, 相应的 Hesse 矩阵为

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial q_{1t}^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial q_{1t} \partial q_{2t}} & \cdots & \frac{\partial^2 h}{\partial q_{1t} \partial q_{nt}} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial q_{2t} \partial q_{1t}} & \frac{\partial^2 h}{\partial q_{2t}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 h}{\partial q_{2t} \partial q_{nt}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 h}{\partial q_{nt} \partial q_{1t}} & \frac{\partial^2 h}{\partial q_{nt} \partial q_{2t}} & \cdots & \frac{\partial^2 h}{\partial q_{nt}^2} \end{pmatrix} = (2K(t) - \gamma P_2^2(t))B,$$

其中

$$B = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \lambda_0 \mu_1 \mu_2 & \cdots & \lambda_0 \mu_1 \mu_n \\ \lambda_0 \mu_2 \mu_1 & \sigma_2^2 & \cdots & \lambda_0 \mu_2 \mu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_0 \mu_n \mu_1 & \lambda_0 \mu_n \mu_2 & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

引理 1 对于 $i = 1, 2, \dots, n$, (3.6) 函数 $h(q_t)$ 是一个关于 $q_t = (q_{1t}, q_{2t}, \dots, q_{nt})$ 的凹函数.

证明 文献 [18, 引理 4.1] 表明 B 是一个正定矩阵. 在接下来的引理 3 中, 我们可以证明得到 $K(t) = 0$ 且 $P_2(t) > 0$. 因此, 矩阵 H 是负定的, 即 $h(q_t)$ 是一个关于 q_t 的凹函数. $\square$

根据引理 1 可知, 下方所示线性方程组的解正是函数 $h(q_t)$ 取得最大值的点 $\hat{q}_t = (\hat{q}_{1t}, \hat{q}_{2t}, \dots, \hat{q}_{nt})$:

$$\begin{cases} \Delta_4(t) \sigma_1^2 q_{1t} + \lambda_0 \Delta_4(t) \mu_1 \mu_2 q_{2t} + \cdots + \lambda_0 \Delta_4(t) \mu_1 \mu_n q_{nt} = \Delta_5(t) \eta_1 a_1, \\ \lambda_0 \Delta_4(t) \mu_2 \mu_1 q_{1t} + \Delta_4(t) \sigma_2^2 q_{2t} + \cdots + \lambda_0 \Delta_4(t) \mu_2 \mu_n q_{nt} = \Delta_5(t) \eta_2 a_2, \\ \vdots \\ \lambda_0 \Delta_4(t) \mu_i \mu_1 q_{1t} + \lambda_0 \Delta_4(t) \mu_i \mu_2 q_{2t} + \cdots + \lambda_0 \Delta_4(t) \mu_i \mu_n q_{nt} = \Delta_5(t) \eta_i a_i, \\ \vdots \\ \lambda_0 \Delta_4(t) \mu_n \mu_1 q_{1t} + \lambda_0 \Delta_4(t) \mu_n \mu_2 q_{2t} + \cdots + \Delta_4(t) \sigma_n^2 q_{nt} = \Delta_5(t) \eta_n a_n, \end{cases} \quad (3.7)$$

其中

$$\begin{cases} \Delta_4(t) = 2K(t) - \gamma P_2^2(t), \\ \Delta_5(t) = -[2K(t)(x + \theta y) + P_1(t)]. \end{cases} \quad (3.8)$$

通过观察, 我们发现矩阵 H 正是线性方程组 (3.7) 的系数矩阵. 假设 H_i 是把矩阵 H 中第 i 列换成方程组的常数项 $(\Delta_5(t) \eta_1 a_1, \Delta_5(t) \eta_2 a_2, \dots, \Delta_5(t) \eta_n a_n)^T$ 所得到的矩阵. 记

$$\begin{cases} \Gamma = |H| = \Delta_4(t)^n |B| \neq 0, \\ \Gamma_i = |H_i| = \Delta_5(t) \cdot \Delta_4(t)^{n-1} |B_i|, \end{cases}$$

其中 B_i 是把矩阵 B 中第 i 列换成方程组的常数项 $(\eta_1 a_1, \eta_2 a_2, \dots, \eta_n a_n)^T$ 所得到的矩阵. 根据 Cramer 法则, 我们得到方程组 (3.7) 的唯一解为

$$\hat{q}_{it} = \frac{\Gamma_i}{\Gamma} = \frac{|B_i|}{|B|} \frac{\Delta_5(t)}{\Delta_4(t)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.9)$$

为了得到 $\hat{q}_t = (\hat{q}_{1t}, \hat{q}_{2t}, \dots, \hat{q}_{nt})$ 的显式解, 我们首先需要知道 $\Delta_4(t)$ 和 $\Delta_5(t)$. 在接下来引理 2 的证明中, 我们可以得到 $\Delta_4(t)$ 和 $\Delta_5(t)$ 的具体表达.

引理 2 当等式 $\tilde{\alpha}_1 - A\theta = \theta(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)$ 成立时, 值函数 $\hat{V}(t, x, y)$ 是关于 $x + \theta y$ 的线性函数.

证明 为了证明这个结论, 我们证明 $K(t) = 0$ 即可.

改写表达式 (3.9) 可以得到

$$\begin{aligned}\hat{q}_{it} &= \frac{|B_i|}{|B|} \frac{\Delta_5(t)}{\Delta_4(t)} = \frac{|B_i|}{|B|} \left(-\frac{2K(t)(x+\theta y) + P_1(t)}{2K(t) - \gamma P_2^2(t)} \right) \\ &\triangleq A_i \cdot \left(\frac{2K(t)(x+\theta y) + P_1(t)}{2K(t) - \gamma P_2^2(t)} \right),\end{aligned}\quad (3.10)$$

其中

$$A_i = -\frac{|B_i|}{|B|}.$$

将 (3.10) 中 q_{it} 的表达式代回到 (3.4) 中可以得到

$$\begin{aligned}0 &= \dot{K}(t)(x+\theta y)^2 + \dot{P}_1(t)(x+\theta y) + \dot{L}_1(t) + [2K(t)(x+\theta y) + P_1(t)] \\ &\quad \times \left[(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)x + (\tilde{\alpha}_1 - A\theta)y \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n \left(\xi_1 a_i + \eta_i a_i A_i \cdot \frac{2K(t)(x+\theta y) + P_1(t)}{2K(t) - \gamma P_2^2(t)} \right) \right] \\ &\quad + \frac{[2K(t)(x+\theta y) + P_1(t)]^2}{2(2K(t) - \gamma P_2^2(t))} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 A_i^2 + \sum_{i \neq j} \lambda_0 \mu_i \mu_j A_i A_j \right),\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}0 &= \dot{P}_2(t)(x+\theta y) + \dot{L}_2(t) + P_2(t) \left[(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)x + (\tilde{\alpha}_1 - A\theta)y \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n \left(\xi_1 a_i + \eta_i a_i A_i \cdot \frac{2K(t)(x+\theta y) + P_1(t)}{2K(t) - \gamma P_2^2(t)} \right) \right].\end{aligned}$$

由于

$$\tilde{\alpha}_1 - A\theta = \theta(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta), \quad (3.11)$$

通过计算可知 (3.11) 可以写为

$$(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)x + (\tilde{\alpha}_1 - A\theta)y = (r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(x + \theta y).$$

分别针对元素 $(x + \theta y)^2$ 和 $(x + \theta y)$ 进行变量分离并化简, 可以得到

$$\begin{cases} \dot{P}_2(t) + P_2(t) \left[r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta + \sum_{i=1}^n \eta_i a_i \frac{A_i \cdot 2K(t)}{2K(t) - \gamma P_2^2(t)} \right] = 0, \\ P_2(T) = 1, \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} \dot{L}_2(t) + P_2(t) \sum_{i=1}^n \left(\xi_i a_i + \eta_i a_i \frac{A_i \cdot P_1(t)}{2K(t) - \gamma P_2^2(t)} \right) = 0, \\ L_2(T) = 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\begin{cases} \dot{K}(t) + 2K(t) \left[r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta + \sum_{i=1}^n \eta_i a_i \frac{A_i \cdot 2K(t)}{2K(t) - \gamma P_2^2(t)} \right] \\ \quad + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 A_i^2 + \sum_{i \neq j} \lambda_0 \mu_i \mu_j A_i A_j \right] \frac{4K^2(t)}{2K(t) - \gamma P_2^2(t)} = 0, \\ K(T) = 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} \dot{P}_1(t) + P_1(t) \left[r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta + \sum_{i=1}^n \eta_i a_i \frac{A_i \cdot 2K(t)}{2K(t) - \gamma P_2^2(t)} \right] \\ + 2K(t) \sum_{i=1}^n \left[\xi_i a_i + \eta_i a_i \frac{A_i \cdot P_1(t)}{2K(t) - \gamma P_2^2(t)} \right] \\ + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 A_i^2 + \sum_{i \neq j} \lambda_0 \mu_i \mu_j (A_i A_j) \right] \frac{2P_1(t) \cdot 2K(t)}{2K(t) - \gamma P_2^2(t)} = 0, \\ P_1(T) = 1, \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} \dot{L}_1(t) + P_1(t) \sum_{i=1}^n \left[\xi_i a_i + \eta_i a_i \frac{A_i \cdot P_1(t)}{2K(t) - \gamma P_2^2(t)} \right] \\ + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 A_i^2 + \sum_{i \neq j} \lambda_0 \mu_i \mu_j A_i A_j \right] \frac{P_1^2(t)}{2K(t) - \gamma P_2^2(t)} = 0, \\ L_1(T) = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

联立方程组 (3.12) 和 (3.14) 可以求得

$$K(t) = 0 \quad \text{和} \quad P_2(t) = e^{\int_t^T (r_0(s) - \alpha_1(s) - \alpha_2 + \theta) ds}$$

分别是方程 (3.14) 和 (3.12) 的解. 到这里我们给出了引理 2 完整的证明. $\square$

注 2 目前已得的结论均是基于两个重要的假设, 即 (3.5) 和 (3.11), 这两个假设的成立使得原始问题从无限维转化为有限维并得以解决. 事实上, 根据 Shen 和 Zeng^[27] 所叙述的, 我们可以将这两个条件看成: 保险人为了达到预期目标而预先确定的外部条件. 也就是说, 保险人可以先确定平均参数 A 和滞后时间 δ , 从而计算出对应的综合 (平均、逐点) 时滞信息 $Y^q(t)$ ($\bar{Y}^q(t)$ 、 $Z^q(t)$). 接下来保险人可以选取目标函数中 X 和 Y 的权重 θ , 最后令

$$\alpha_2 = \theta e^{A\delta}$$

和

$$\alpha_1(t) = \frac{\theta \int_{-\delta}^0 e^{-As} ds}{1 + \theta \int_{-\delta}^0 e^{-As} ds} (r_0(t) + A + \theta - \alpha_2)$$

作为函数 f 表达式中 $X^q(t) - \bar{Y}^q(t)$ 和 $X^q(t) - Z^q(t)$ 的系数.

引理 3 方程组 (3.12)–(3.16) 在 $t \in [0, T]$ 可行域内的解分别为 $P_2(t)$ 、 $L_2(t)$ 、 $K(t)$ 、 $P_1(t)$ 和 $L_1(t)$ 且解唯一.

证明 类似于文献 [34] 中唯一性的证明, 由于 $P_1(t)$ 、 $L_1(t)$ 和 $L_2(t)$ 都是 $K(t)$ 和 $P_2(t)$ 的函数, 所以, 我们只需证明 $P_2(t)$ 和 $K(t)$ 的唯一性即可. 由于篇幅所限, 我们只给出 $P_2(t)$ 唯一性的详细证明, 关于 $K(t)$ 的证明可类似得出.

对 $P_2(t)$ 使用 Itô 引理, 我们可以得到

$$\begin{aligned} P_2(t) &= 1 - \int_t^T [\dot{P}_2(s)] ds \\ &= 1 + \int_t^T \left[(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta) P_2(s) + \sum_{i=1}^n \eta_i a_i \frac{A_i \cdot 2K(s)}{2K(s) - \gamma P_2^2(s)} \cdot P_2(s) \right] ds. \end{aligned}$$

假设 $P_2(t)$ 和 $P_2^*(t)$ 均是方程组 (3.12) 的解, 那么,

$$\begin{aligned}
 |P_2(t) - P_2^*(t)| &= \left| \int_t^T \left[(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(P_2(s) - P_2^*(s)) + \sum_{i=1}^n 2\eta_i a_i A_i \cdot K(s) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \left(\frac{P_2(s)}{2K(s) - \gamma P_2^2(s)} - \frac{P_2^*(s)}{2K(s) - \gamma (P_2^*(s))^2} \right) \right] ds \right| \\
 &= \left| \int_t^T \left[(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta) + \sum_{i=1}^n 2\eta_i a_i A_i \cdot \frac{K(s)(2K(s) + \gamma P_2(s)P_2^*(s))}{(2K(s) - \gamma P_2^2(s))(2K(s) - \gamma (P_2^*(s))^2)} \right] \right. \\
 &\quad \left. \times (P_1(s) - P_1^*(s)) ds \right| \\
 &\leq M_1 \int_t^T |P_1(s) - P_1^*(s)| ds,
 \end{aligned}$$

其中 M_1 是正常数. 因为 $r_0(t)$ 和 $\alpha_1(t)$ 均关于 t 一致有界, 所以最后一步的不等号成立. 根据 Gronwall 不等式可得 $P_2(t) = P_2^*(t)$. 因此, $P_2(t)$ 是微分方程组 (3.12) 的唯一解. $\square$

根据引理 3 的证明以及 (3.4) 表示的广义 HJB 系统, 我们可以得到如下等式关系:

$$\begin{cases} \dot{P}_1(t) + (r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)P_1(t) = 0, \\ \dot{P}_2(t) + (r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)P_2(t) = 0, \\ P_1(T) = P_2(T) = 1, \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} \dot{L}_1(t) + \sum_{i=1}^n (\xi_i a_i + \eta_i a_i \hat{q}_{it}) P_1(t) + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \hat{q}_i^2 + \sum_{i \neq j} \lambda_0 \mu_i \mu_j \hat{q}_{it} \hat{q}_{jt} \right] (-\gamma P_2^2(t)) = 0, \\ \dot{L}_2(t) + \sum_{i=1}^n (\xi_i a_i + \eta_i a_i \hat{q}_{it}) P_2(t) = 0, \\ L_1(T) = L_2(T) = 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

解以上方程组得

$$\begin{cases} P_1(t) = P_2(t) = e^{\int_t^T (r_0(s) - \alpha_1(s) - \alpha_2 + \theta) ds}, \\ L_1(t) = \int_t^T \left[\sum_{i=1}^n \left(\xi_i a_i e^{\int_s^T (r_0(\tau) - \alpha_1(\tau) - \alpha_2 + \theta) d\tau} + \eta_i a_i \frac{|B_i|}{\gamma |B|} \right) \right. \\ \quad \left. - \frac{\gamma}{2} \int_t^T \left[\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \left(\frac{|B_i|}{\gamma |B|} \right)^2 + \sum_{i \neq j} \lambda_0 \mu_i \mu_j \frac{|B_i| |B_j|}{\gamma^2 |B|^2} \right] ds, \right. \\ \left. L_2(t) = \int_t^T \left[\sum_{i=1}^n \left(\xi_i a_i e^{\int_s^T (r_0(\tau) - \alpha_1(\tau) - \alpha_2 + \theta) d\tau} + \eta_i a_i \frac{|B_i|}{\gamma |B|} \right) \right] ds. \right. \end{cases} \quad (3.19)$$

根据以上讨论, 我们可以得到以下命题:

命题 1 根据引理 3 和结论 (3.19), 我们得到集合 $\tilde{\mathcal{A}}$ 内的最优策略为

$$\hat{q}_{it} = \frac{|B_i|}{\gamma |B|} e^{-\int_t^T (r_0(s) - \alpha_1(s) - \alpha_2 + \theta) ds}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.20)$$

且值函数为

$$\hat{V}(t, x, y) = P_1(t)(x + \theta y) + L_1(t), \quad (3.21)$$

其中 $P_1(t)$ 和 $L_1(t)$ 的表达式如 (3.19) 所示.

此外, 如果不考虑时滞信息, 即参数 $\alpha_1(t) = \alpha_2 = \theta = 0$, 那么最优策略及对应的值函数为

$$\hat{q}_{it} = \frac{|B_i|}{\gamma|B|} e^{-\int_t^T r_0(s) ds}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.22)$$

$$\hat{V}(t, x, y) = e^{-\int_t^T r_0(s) ds} x + L_1(t), \quad (3.23)$$

其中

$$\begin{aligned} L_1(t) = & \int_t^T \left[\sum_{i=1}^n \left(\xi_i a_i e^{\int_s^T r_0(\tau) d\tau} + \eta_i a_i \frac{|B_i|}{\gamma|B|} \right) \right] ds \\ & - \frac{\gamma}{2} \int_t^T \left[\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \left(\frac{|B_i|}{\gamma|B|} \right)^2 + \sum_{i \neq j} \lambda_0 \mu_i \mu_j \frac{|B_i| |B_j|}{\gamma^2 |B|^2} \right] ds. \end{aligned} \quad (3.24)$$

这里需要注意的是, 我们目前得到的最优策略和值函数都是在集合 $\tilde{\mathcal{A}}$ 内求得的, 此时的策略 q 是在 $\tilde{\mathcal{Q}} = \mathbb{R}^n$ 内取值的. 为了解决第 2.2 小节中提出的原始最优问题, 在接下来的第 4 节里, 我们将在 $\mathcal{Q} = [0, 1]^n$ 内寻求属于集合 $\mathcal{A}$ 的最优策略和值函数.

4 集合 $\mathcal{A}$ 内的最优解

根据 (3.20) 中 $\hat{q}_{it}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 的表达, 我们不能直接判断 $\hat{q}_{it} \in [0, 1]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 是否成立. 在给出原始问题的最优策略前, 我们首先给出引理 4, 它将在接下来的讨论中发挥至关重要的作用.

引理 4 设连续严格凹函数 $\phi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 定义在闭凸集 $\mathcal{E}$ 上. 如果函数 $\phi(x)$ 的驻点落在 $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{E}$ 上, 那么函数的最大值点一定在 $\partial\mathcal{E}$ 上, 即 $\mathcal{E}$ 的边界上取得.

证明 由于函数 $\phi(x)$ 是连续且严格凹的, 而且 $\mathcal{E}$ 是一个闭凸集, 那么总存在一点 $x^* \in \mathcal{E}$ 使得对任意的 $x \in \mathcal{E}$, 总有

$$\phi(x^*) \geq \phi(x)$$

成立, 即 $\phi(x^*)$ 是函数 $\phi(x)$ 在集合 $\mathcal{E}$ 内的最大值点.

下面利用反证法来证明结论. 假设严格凹函数 $\phi(x)$ 的最大值点在 $\mathcal{E}$ 内部取得, 那么该最大值点一定是 $\phi(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的驻点. 根据文献 [18, 引理 3.2] 的证明可知, 若函数存在驻点, 则一定是唯一的. 然而题设中已强调驻点是落在 $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{E}$ 上, 所以假设不成立, 即最大值点 x^* 一定落在 $\mathcal{E}$ 的边界 $\partial\mathcal{E}$ 上. $\square$

在接下来的两个小节中, 我们将着力解决当保险业务数量 $n = 2$ 和 $n > 2$ 时原问题的最优解. 我们首先讨论 $n = 2$ 的情形.

4.1 $n = 2$ 的情形

为了便于讨论, 假设 $r_0(t) = r_0$, $\alpha_1(t) = \alpha_1$, 那么 (3.6) ($h(q_t) = h(q_{1t}, q_{2t})$) 可以改写为

$$\begin{aligned} h(q_t) = & [(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(x + \theta y) + \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2] e^{(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(T-t)} \\ & + (\eta_1 a_1 q_{1t} + \eta_2 a_1 q_{2t}) e^{(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(T-t)} \\ & - \frac{\gamma}{2} e^{2(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(T-t)} [\sigma_1^2 q_{1t}^2 + \sigma_2^2 q_{2t}^2 + 2\lambda_0 \mu_1 \mu_2 q_{1t} q_{2t}]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

根据引理 3 的结论, 线性方程组 (3.7) 可以改写为

$$\begin{cases} \sigma_1^2 q_{1t} + \lambda_0 \mu_1 \mu_2 q_{2t} = \frac{\eta_1 a_1}{\gamma} e^{-(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(T-t)}, \\ \lambda_0 \mu_2 \mu_1 q_{1t} + \sigma_2^2 q_{2t} = \frac{\eta_2 a_2}{\gamma} e^{-(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(T-t)}, \end{cases} \quad (4.2)$$

从而得到方程组 (4.2) 的解为

$$\begin{cases} \hat{q}_{1t} = \frac{\eta_1 a_1 \sigma_2^2 - \eta_2 a_2 \lambda_0 \mu_1 \mu_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \lambda_0^2 \mu_1^2 \mu_2^2} \frac{1}{\gamma} e^{-(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(T-t)}, \\ \hat{q}_{2t} = \frac{\eta_2 a_2 \sigma_1^2 - \eta_1 a_1 \lambda_0 \mu_1 \mu_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \lambda_0^2 \mu_1^2 \mu_2^2} \frac{1}{\gamma} e^{-(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(T-t)}. \end{cases} \quad (4.3)$$

令

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{\eta_1 a_1 \sigma_2^2 - \eta_2 a_2 \lambda_0 \mu_1 \mu_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \lambda_0^2 \mu_1^2 \mu_2^2}, \\ Q_2 = \frac{\eta_2 a_2 \sigma_1^2 - \eta_1 a_1 \lambda_0 \mu_1 \mu_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \lambda_0^2 \mu_1^2 \mu_2^2}, \end{cases} \quad (4.4)$$

及

$$\begin{aligned} t_1 &= T - \frac{1}{r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta} \ln \frac{Q_1}{\gamma}, \quad \text{当 } \gamma < Q_1 < \gamma e^{(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)T}, \\ t_2 &= T - \frac{1}{r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta} \ln \frac{Q_2}{\gamma}, \quad \text{当 } \gamma < Q_2 < \gamma e^{(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)T}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

当 $Q_1 \leq \gamma$ ($Q_2 \leq \gamma$) 时, 令 $t_1 = T$ ($t_2 = T$); 类似地, 当 $Q_1 \geq \gamma e^{(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)T}$ ($Q_2 \geq \gamma e^{(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)T}$) 时, 令 $t_1 = 0$ ($t_2 = 0$).

根据文献 [18, 引理 4.2] 的结论, 我们可以得到如下不等式:

$$\frac{\lambda_0 \mu_1 \mu_2 a_2}{\sigma_2^2 a_1} \leq \frac{\lambda_0 \mu_1 \mu_2 a_2 + \sigma_1^2 a_2}{\sigma_2^2 a_1 + \lambda_0 \mu_1 \mu_2 a_1} \leq \frac{\sigma_1^2 a_2}{\lambda_0 \mu_1 \mu_2 a_1}.$$

因此, 为了在集合 $\mathcal{A}$ 中寻求最优策略, 我们分别对以下 4 种情形进行讨论:

情形 1

$$\eta_1 < \frac{\lambda_0 \mu_1 \mu_2 a_2}{\sigma_2^2 a_1} \eta_2;$$

情形 2

$$\frac{\lambda_0 \mu_1 \mu_2 a_2}{\sigma_2^2 a_1} \eta_2 \leq \eta_1 < \frac{\lambda_0 \mu_1 \mu_2 a_2 + \sigma_1^2 a_2}{\sigma_2^2 a_1 + \lambda_0 \mu_1 \mu_2 a_1} \eta_2;$$

情形 3

$$\frac{\lambda_0 \mu_1 \mu_2 a_2 + \sigma_1^2 a_2}{\sigma_2^2 a_1 + \lambda_0 \mu_1 \mu_2 a_1} \eta_2 \leq \eta_1 \leq \frac{\sigma_1^2 a_2}{\lambda_0 \mu_1 \mu_2 a_1} \eta_2;$$

情形 4

$$\eta_1 > \frac{\sigma_1^2 a_2}{\lambda_0 \mu_1 \mu_2 a_1} \eta_2.$$

由于文章篇幅限制, 我们接下来只给出 $r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta \geq 0$ 情形下关于最优策略 $q_t^* = (q_{1t}^*, q_{2t}^*)$ 和值函数 $V(t, x, y)$ 的详细讨论.

情形 1 此时 $\hat{q}_{1t} < 0$, $\hat{q}_{2t} \geq 0$, 因此 $q_{1t}^* = 0$. 记

$$h_{1_0}(q_{2t}) = h(0, q_{2t}).$$

将 $q_{1t}^* = 0$ 代入 $h(q_{1t}, q_{2t})$ 可以得到 $h_{1_0}(q_{2t})$ 取最大值的点为

$$\hat{q}_{2t}^{1_0} = \frac{\eta_2 a_2}{\gamma \sigma_2^2} e^{-(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(T-t)}. \quad (4.6)$$

令

$$t_3 = T - \frac{1}{r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta} \ln \frac{\eta_2 a_2}{\gamma \sigma_2^2}.$$

(1) 当 $0 \leq t \leq t_3$ 时, $\hat{q}_{2t}^{1_0} \leq 1$, 所以 $q_t^* = (0, \hat{q}_{2t}^{1_0})$. 将 $(0, \hat{q}_{2t}^{1_0})$ 代入 (3.19) 和 (3.21) 可得

$$V(t, x, y) = D_1(t, x, y) + D_2(t) + C_1,$$

其中

$$D_1(t, x, y) = e^{(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(T-t)}(x + \theta y) + \frac{\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2}{r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta} [e^{(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(T-t)} - 1], \quad (4.7)$$

$$D_2(t) = \frac{\eta_2^2 a_2^2}{2\gamma \sigma_2^2} (T - t), \quad (4.8)$$

且 C_1 是个常数, 将在后面通过值函数的连续性给予确定. 类似于 C_1 , C_i ($i = 2, 3, \dots, 12$) 均是常数, 同样将会在后面给出具体取值.

(2) 当 $t_3 < t \leq T$ 时, $\hat{q}_{2t}^{1_0} > 1$, 所以 $q_t^* = (0, 1)$. 将 $(0, 1)$ 代入 (3.19) 和 (3.21) 可得

$$V(t, x, y) = D_1(t, x, y) + D_3(t) - D_4(t),$$

其中

$$D_3(t) = \frac{\eta_2 a_2}{r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta} [e^{(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(T-t)} - 1], \quad (4.9)$$

且

$$D_4(t) = \frac{\gamma \sigma_2^2}{4(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)} [e^{2(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(T-t)} - 1]. \quad (4.10)$$

令

$$C_1 = -D_2(t_3) + D_3(t_3) - D_4(t_3), \quad (4.11)$$

则有

$$D_2(t_3) + C_1 = D_3(t_3) - D_4(t_3). \quad (4.12)$$

情形 2 此时 $\hat{q}_{1t} \geq 0$, $\hat{q}_{2t} \geq 0$, 且 $Q_2 \geq Q_1$, 所以 $t_1 \geq t_2$.

(1) 当 $0 \leq t \leq t_2$ 时, $\hat{q}_{1t} \leq 1$ 且 $\hat{q}_{2t} \leq 1$, 所以 $q_t^* = (\hat{q}_{1t}, \hat{q}_{2t})$. 将 $(\hat{q}_{1t}, \hat{q}_{2t})$ 代入 (3.19) 和 (3.21) 可得

$$V(t, x, y) = D_1(t, x, y) + D_5(t) + C_2,$$

其中

$$D_5(t) = \left(\frac{2\eta_1 a_1 Q_1 + 2\eta_2 a_2 Q_2 - \sigma_1^2 Q_1^2 - \sigma_2^2 Q_2^2 - 2\lambda_0 \mu_1 \mu_2 Q_1 Q_2}{2\gamma} \right) (T - t). \quad (4.13)$$

当 $t \geq t_2$ 时, $\hat{q}_{2t} \geq 1$, 所以 $q_{2t}^* = 1$. 记

$$h_{2_1}(q_{1t}) = h(q_{1t}, 1).$$

将 $q_{2t}^* = 1$ 代入 $h(q_{1t}, q_{2t})$, 我们可以得到 $h_{2_1}(q_{1t})$ 取最大值的点为

$$\hat{q}_{1t}^{2_1} = \frac{\eta_1 a_1 e^{-(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(T-t)} - \gamma \lambda_0 \mu_1 \mu_2}{\gamma \sigma_1^2}. \quad (4.14)$$

令

$$t_4 = T - \frac{1}{r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta} \ln \frac{\eta_1 a_1}{\gamma \lambda_0 \mu_1 \mu_2},$$

及

$$t_5 = T - \frac{1}{r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta} \ln \frac{\eta_1 a_1}{\gamma(\sigma_1^2 + \lambda_0 \mu_1 \mu_2)}. \quad (4.15)$$

易证得 $t_4 \leq t_2 \leq t_5$.

(2) 当 $t_2 < t \leq t_5$ 时, $\hat{q}_{1t}^{2_1} \in [0, 1]$, 因此 $q_t^* = (\hat{q}_{1t}^{2_1}, 1)$. 将 $(\hat{q}_{1t}^{2_1}, 1)$ 代入 (3.19) 和 (3.21) 得到

$$V(t, x, y) = D_1(t, x, y) + D_3(t) + D_6(t) - D_7(t) + C_3, \quad (4.16)$$

其中

$$D_6(t) = \int_t^T \eta_1 a_1 \hat{q}_{1s}^{2_1} e^{(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(T-s)} ds, \quad (4.17)$$

$$D_7(t) = \frac{\gamma}{2} \int_t^T [\sigma_2^2 + \sigma_1^2 (\hat{q}_{1s}^{2_1})^2 + 2\lambda_0 \mu_1 \mu_2 \hat{q}_{1s}^{2_1}] e^{2(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(T-s)} ds. \quad (4.18)$$

(3) 当 $t_5 < t \leq T$ 时, $\hat{q}_{1t}^{2_1} > 1$, 所以 $q_t^* = (1, 1)$. 将 q_t^* 代入 (3.19) 和 (3.21) 得到

$$V(t, x, y) = D_1(t, x, y) + D_3(t) + D_8(t) - D_9(t),$$

其中

$$D_8(t) = \frac{\eta_1 a_1}{r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta} [e^{(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(T-t)} - 1], \quad (4.19)$$

及

$$D_9(t) = \frac{\gamma(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\lambda_0 \mu_1 \mu_2)}{4(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)} [e^{2(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(T-t)} - 1]. \quad (4.20)$$

令

$$C_2 = D_3(t_2) - D_5(t_2) + D_6(t_2) - D_6(t_5) - D_7(t_2) + D_7(t_5) + D_8(t_5) - D_9(t_5), \quad (4.21)$$

及

$$C_3 = -D_6(t_5) + D_7(t_5) + D_8(t_5) - D_9(t_5), \quad (4.22)$$

那么有

$$D_5(t_2) + C_2 = D_3(t_2) + D_6(t_2) - D_7(t_2) + C_3, \quad (4.23)$$

且

$$D_3(t_5) + D_6(t_5) - D_7(t_5) + C_3 = D_3(t_5) + D_8(t_5) - D_9(t_5). \quad (4.24)$$

情形 3 此时 $\hat{q}_{1t} \geq 0$, $\hat{q}_{2t} \geq 0$, 但是 $Q_2 \leq Q_1$, 所以 $t_1 \leq t_2$.

(1) 当 $0 \leq t \leq t_1$ 时, $\hat{q}_{1t} \leq 1$ 且 $\hat{q}_{2t} \leq 1$, 因此 $q_t^* = (\hat{q}_{1t}, \hat{q}_{2t})$. 将 $(\hat{q}_{1t}, \hat{q}_{2t})$ 代入 (3.19) 和 (3.21) 可得

$$V(t, x, y) = D_1(t, x, y) + D_5(t) + C_4.$$

由于 $t \geq t_1$, $\hat{q}_{1t} \geq 1$, 所以 $q_{1t}^* = 1$. 记

$$h_{11}(q_{2t}) = h(1, q_{2t}).$$

将 $q_{1t}^* = 1$ 代入 $h(q_{1t}, q_{2t})$ 可得 $h_{11}(q_{2t})$ 取最大值的点为

$$\hat{q}_{2t}^{11} = \frac{\eta_2 a_2 e^{-(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(T-t)} - \gamma \lambda_0 \mu_1 \mu_2}{\gamma \sigma_2^2}. \quad (4.25)$$

令

$$t_6 = T - \frac{1}{r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta} \ln \frac{\eta_2 a_2}{\gamma \lambda_0 \mu_1 \mu_2},$$

及

$$t_7 = T - \frac{1}{r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta} \ln \frac{\eta_2 a_2}{\gamma(\sigma_2^2 + \lambda_0 \mu_1 \mu_2)}. \quad (4.26)$$

易证明得 $t_6 \leq t_1 \leq t_7$.

(2) 当 $t_1 < t \leq t_7$ 时, $\hat{q}_{2t}^{11} \in [0, 1]$, 所以 $q_t^* = (1, \hat{q}_{2t}^{11})$. 将 $(1, \hat{q}_{2t}^{11})$ 代入 (3.19) 和 (3.21), 可得

$$V(t, x, y) = D_1(t, x, y) + D_8(t) + D_{10}(t) - C_{11}(t) + C_5, \quad (4.27)$$

其中

$$D_{10}(t) = \int_t^T \eta_2 a_2 \hat{q}_{2s}^{11} e^{(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(T-s)} ds, \quad (4.28)$$

$$D_{11}(t) = \frac{\gamma}{2} \int_t^T [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 (\hat{q}_{2s}^{11})^2 + 2\lambda_0 \mu_1 \mu_2 \hat{q}_{2s}^{11}] e^{2(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(T-s)} ds. \quad (4.29)$$

(3) 当 $t_7 < t \leq T$ 时, $\hat{q}_{2t}^{11} > 1$, 所以 $q_t^* = (1, 1)$. 根据 (3.19) 和 (3.21) 可得

$$V(t, x, y) = D_1(t, x, y) + D_3(t) + D_8(t) - D_9(t).$$

令

$$C_4 = D_3(t_7) - D_5(t_1) + D_8(t_1) - D_9(t_7) + D_{10}(t_1) - D_{10}(t_7) - D_{11}(t_1) + D_{11}(t_7), \quad (4.30)$$

及

$$C_5 = D_3(t_7) - D_9(t_7) - D_{10}(t_7) + D_{11}(t_7), \quad (4.31)$$

那么,

$$D_5(t_1) + C_4 = D_8(t_1) + D_{10}(t_1) - D_{11}(t_1) + C_5, \quad (4.32)$$

且

$$D_8(t_7) + D_{10}(t_7) - D_{11}(t_7) + C_5 = D_3(t_5) + D_8(t_5) - D_9(t_5). \quad (4.33)$$

情形 4 此时 $\hat{q}_{1t} \geq 0$, $\hat{q}_{2t} < 0$, 所以 $q_{2t}^* = 0$. 记

$$h_{2_0}(q_{1t}) = h(q_{1t}, 0).$$

将 $q_{2t}^* = 0$ 代入 $h(q_{1t}, q_{2t})$, 我们可以得到函数 $h_{2_0}(q_{1t})$ 取最大值的点为

$$\hat{q}_{1t}^{2_0} = \frac{\eta_1 a_1}{\gamma \sigma_1^2} e^{-(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(T-t)}. \quad (4.34)$$

令

$$t_8 = T - \frac{1}{r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta} \ln \frac{\eta_1 a_1}{\gamma \sigma_1^2}.$$

(1) 当 $0 \leq t \leq t_8$ 时, $\hat{q}_{1t}^{2_0} \in [0, 1]$, 所以 $q_t^* = (\hat{q}_{1t}^{2_0}, 0)$. 将 $(\hat{q}_{1t}^{2_0}, 0)$ 代入 (3.19) 和 (3.21) 可得

$$V(t, x, y) = D_1(t, x, y) + D_{12}(t) + C_6,$$

其中

$$D_{12}(t) = \frac{\eta_1^2 a_1^2}{2\gamma \sigma_1^2} (T - t). \quad (4.35)$$

(2) 当 $t_8 < t \leq T$ 时, $\hat{q}_{1t}^{2_0} > 1$, 所以 $q_t^* = (1, 0)$. 将 $(1, 0)$ 代入 (3.19) 和 (3.21) 可得

$$V(t, x, y) = D_1(t, x, y) + D_8(t) - D_{13}(t),$$

其中

$$D_{13}(t) = \frac{\gamma \sigma_1^2}{4(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)} [e^{2(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(T-t)} - 1]. \quad (4.36)$$

令

$$C_6 = D_8(t_8) - D_{12}(t_8) - D_{13}(t_8), \quad (4.37)$$

那么,

$$D_{12}(t_8) + C_6 = D_8(t_8) - D_{13}(t_8). \quad (4.38)$$

根据以上讨论, 我们整理得到定理 2.

定理 2 当 $r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta \geq 0$ 时, 令 $(\hat{q}_{1t}, \hat{q}_{2t})$ 、 $\hat{q}_{2t}^{1_0}$ 、 $\hat{q}_{2t}^{1_1}$ 、 $\hat{q}_{1t}^{2_0}$ 和 $\hat{q}_{1t}^{2_1}$ 分别如 (4.3)、(4.6)、(4.25)、(4.34) 和 (4.14) 所示, $D_i(\cdot)$ ($i = 1, 2, \dots, 13$) 如 (4.7)–(4.13)、(4.17)–(4.20)、(4.28)、(4.29)、(4.35) 和 (4.36) 所示, $C_i(\cdot)$ ($i = 1, 2, \dots, 12$) 如 (4.11)、(4.21)、(4.22)、(4.30)、(4.31) 和 (4.37) 所示. 那么, 对任意 $t \in [0, T]$, 我们可以得到以下结论:

(i) 如果情形 1 成立, 那么基于模型 (2.2) 的最优再保险策略为

$$q_t^* = \begin{cases} (0, \hat{q}_{2t}^{1_0}), & 0 \leq t \leq t_3, \\ (0, 1), & t_3 < t \leq T, \end{cases}$$

对应的值函数为

$$V(t, x, y) = \begin{cases} D_1(t, x, y) + D_2(t) + C_1, & 0 < t \leq t_3, \\ D_1(t, x, y) + D_3(t) - D_4(t), & t_3 < t \leq T; \end{cases}$$

(ii) 如果情形 2 成立, 那么基于模型 (2.2) 的最优再保险策略为

$$q_t^* = \begin{cases} (\hat{q}_{1t}, \hat{q}_{2t}), & 0 \leq t \leq t_2, \\ (\hat{q}_{1t}^{2_1}, 1), & t_2 < t \leq t_5, \\ (1, 1), & t_5 < t \leq T, \end{cases}$$

对应的值函数为

$$V(t, x, y) = \begin{cases} D_1(t, x, y) + D_5(t) + C_2, & 0 < t \leq t_2, \\ D_1(t, x, y) + D_3(t) + D_6(t) - D_7(t) + C_3, & t_2 < t \leq t_5, \\ D_1(t, x, y) + D_3(t) + D_8(t) - D_9(t), & t_5 < t \leq T; \end{cases}$$

(iii) 如果情形 3 成立, 那么基于模型 (2.2) 的最优再保险策略为

$$q_t^* = \begin{cases} (\hat{q}_{1t}, \hat{q}_{2t}), & 0 \leq t \leq t_1, \\ (1, \hat{q}_{2t}^{1_1}), & t_1 < t \leq t_7, \\ (1, 1), & t_7 < t \leq T, \end{cases}$$

对应的值函数为

$$V(t, x, y) = \begin{cases} D_1(t, x, y) + D_5(t) + C_4, & 0 < t \leq t_1, \\ D_1(t, x, y) + D_8(t) + D_{10}(t) - D_{11}(t) + C_5, & t_1 < t \leq t_7, \\ D_1(t, x, y) + D_3(t) + D_8(t) - D_9(t), & t_7 < t \leq T; \end{cases}$$

(iv) 如果情形 4 成立, 那么基于模型 (2.2) 的最优再保险策略为

$$q_t^* = \begin{cases} (\hat{q}_{1t}^{2_0}, 0), & 0 \leq t \leq t_8, \\ (1, 0), & t_8 < t \leq T, \end{cases}$$

对应的值函数为

$$V(t, x, y) = \begin{cases} D_1(t, x, y) + D_{12}(t) + C_6, & 0 \leq t \leq t_8, \\ D_1(t, x, y) + D_8(t) - D_{13}(t), & t_8 < t \leq T. \end{cases}$$

类似上述的讨论, 我们同样可以得到 $r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta < 0$ 情形下最优策略 $q_t^* = (q_{1t}^*, q_{2t}^*)$ 和对应的值函数 $V(t, x, y)$.

定理 3 当 $r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta < 0$ 时, 令 $(\hat{q}_{1t}, \hat{q}_{2t})$ 、 $\hat{q}_{2t}^{1_0}$ 、 $\hat{q}_{2t}^{1_1}$ 、 $\hat{q}_{1t}^{2_0}$ 和 $\hat{q}_{1t}^{2_1}$ 分别如 (4.3)、(4.6)、(4.25)、(4.34) 和 (4.14) 所示, $D_i(\cdot)$ ($i = 1, 2, \dots, 13$) 如 (4.7)–(4.13)、(4.17)–(4.20)、(4.28)、(4.29)、(4.35) 和 (4.36) 所示. 那么, 对任意 $t \in [0, T]$, 我们可以得到以下结论:

(i) 如果情形 1 成立, 那么基于模型 (2.2) 的最优再保险策略为

$$q_t^* = \begin{cases} (0, 1), & 0 \leq t \leq t_3, \\ (0, \hat{q}_{2t}^{1_0}), & t_3 < t \leq T, \end{cases}$$

对应的值函数为

$$V(t, x, y) = \begin{cases} D_1(t, x, y) + D_3(t) - D_4(t) + C_7, & 0 \leq t \leq t_3, \\ D_1(t, x, y) + D_2(t), & t_3 < t \leq T; \end{cases}$$

(ii) 如果情形 2 成立, 那么基于模型 (2.2) 的最优再保险策略为

$$q_t^* = \begin{cases} (1, 1), & 0 \leq t < t_5, \\ (q_{1t}^{2_1}, 1), & t_5 \leq t < t_2, \\ (\hat{q}_{1t}, \hat{q}_{2t}), & t_2 \leq t \leq T, \end{cases}$$

对应的值函数为

$$V(t, x, y) = \begin{cases} D_1(t, x, y) + D_3(t) + D_8(t) - D_9(t) + C_8, & 0 \leq t < t_5, \\ D_1(t, x, y) + D_3(t) + D_6(t) - D_7(t) + C_9, & t_5 \leq t < t_2, \\ D_1(t, x, y) + D_5(t), & t_2 \leq t \leq T; \end{cases}$$

(iii) 如果情形 3 成立, 那么基于模型 (2.2) 的最优再保险策略为

$$q_t^* = \begin{cases} (1, 1), & 0 \leq t < t_7, \\ (1, q_{2t}^{1_1}), & t_7 \leq t < t_1, \\ (\hat{q}_{1t}, \hat{q}_{2t}), & t_1 \leq t \leq T, \end{cases}$$

对应的值函数为

$$V(t, x, y) = \begin{cases} D_1(t, x, y) + D_3(t) + D_8(t) - D_9(t) + C_{10}, & 0 \leq t < t_7, \\ D_1(t, x, y) + D_8(t) + D_{10}(t) - D_{11}(t) + C_{11}, & t_7 \leq t < t_1, \\ D_1(t, x, y) + D_5(t), & t_1 \leq t \leq T; \end{cases}$$

(iv) 如果情形 4 成立, 那么基于模型 (2.2) 的最优再保险策略为

$$q_t^* = \begin{cases} (1, 0), & 0 \leq t \leq t_8, \\ (\hat{q}_{1t}^{2_0}, 0), & t_8 < t \leq T, \end{cases}$$

对应的值函数为

$$V(t, x, y) = \begin{cases} D_1(t, x, y) + D_8(t) - D_{13}(t) + C_{12}, & 0 \leq t \leq t_8, \\ D_1(t, x, y) + D_{12}(t), & t_8 < t \leq T, \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} C_7 = D_2(t_3) - D_3(t_3) + D_4(t_3), \\ C_8 = -D_3(t_2) + D_5(t_2) - D_6(t_2) + D_6(t_5) - D_7(t_5) + D_7(t_2) - D_8(t_5) + D_9(t_5), \\ C_9 = -D_3(t_2) + D_5(t_2) - D_6(t_2) + D_7(t_2), \\ C_{10} = -D_3(t_7) + D_5(t_1) - D_8(t_1) + D_9(t_7) - D_{10}(t_1) + D_{10}(t_7) + D_{11}(t_1) - D_{11}(t_7), \\ C_{11} = D_5(t_1) - D_8(t_1) - D_{10}(t_1) + D_{11}(t_1), \\ C_{12} = -D_8(t_8) + D_{12}(t_8) + D_{13}(t_8). \end{cases} \quad (4.39)$$

注 3 由于 (4.12)、(4.23)、(4.24)、(4.32)、(4.33) 和 (4.38) 成立, 且

$$\begin{cases} D_3(t_3) - D_4(t_3) + C_7 = D_2(t_3), \\ D_3(t_5) + D_8(t_5) - D_9(t_5) + C_8 = D_3(t_5) + D_6(t_5) - D_7(t_5) + C_9, \\ D_3(t_2) + D_6(t_2) - D_7(t_2) + C_9 = D_5(t_2), \\ D_3(t_7) + D_8(t_7) - D_9(t_7) + C_{10} = D_8(t_7) + D_{10}(t_7) - D_{11}(t_7) + C_{11}, \\ D_8(t_1) + D_{10}(t_1) - D_{11}(t_1) + C_{11} = D_5(t_1), \\ D_8(t_8) - D_{13}(t_8) + C_{12} = D_{12}(t_8), \end{cases} \quad (4.40)$$

所以, 函数 $V(t, x, y)$ 对 $(t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2$ 是连续的. 此外,

$$\begin{cases} \dot{D}_2(t_3) = \dot{D}_3(t_3) - \dot{D}_4(t_3), \\ \dot{D}_5(t_2) = \dot{D}_3(t_2) + \dot{D}_6(t_2) - \dot{D}_7(t_2), \\ \dot{D}_3(t_5) + \dot{D}_6(t_5) - \dot{D}_7(t_5) = \dot{D}_3(t_5) + \dot{D}_8(t_5) - \dot{D}_9(t_5), \\ \dot{D}_5(t_1) = \dot{D}_8(t_1) + \dot{D}_{10}(t_1) - \dot{D}_{11}(t_1), \\ \dot{D}_8(t_7) + \dot{D}_{10}(t_7) - \dot{D}_{11}(t_7) = \dot{D}_3(t_5) + \dot{D}_8(t_5) - \dot{D}_9(t_5), \\ \dot{D}_{12}(t_8) = \dot{D}_8(t_8) - \dot{D}_{13}(t_8), \end{cases}$$

且

$$\begin{cases} \dot{D}_3(t_3) - \dot{D}_4(t_3) = \dot{D}_2(t_3), \\ \dot{D}_3(t_5) + \dot{D}_8(t_5) - \dot{D}_9(t_5) = \dot{D}_3(t_5) + \dot{D}_6(t_5) - \dot{D}_7(t_5), \\ \dot{D}_3(t_2) + \dot{D}_6(t_2) - \dot{D}_7(t_2) = \dot{D}_5(t_2), \\ \dot{D}_3(t_7) + \dot{D}_8(t_7) - \dot{D}_9(t_7) = \dot{D}_8(t_7) + \dot{D}_{10}(t_7) - \dot{D}_{11}(t_7), \\ \dot{D}_8(t_1) + \dot{D}_{10}(t_1) - \dot{D}_{11}(t_1) = \dot{D}_5(t_1), \\ \dot{D}_8(t_8) - \dot{D}_{13}(t_8) = \dot{D}_{12}(t_8), \end{cases}$$

则 $V(t, x, y) \in C^{1,2,2}([0, T] \times \mathbb{R}^2)$, 所以得到的值函数 $V(t, x, y)$ 是广义 HJB 系统 (3.4) 的经典解.

注 4 根据定理 2 和 3 中 q_t^* 和 $V(t, x, y)$ 的表达式我们发现, 参数 A 和 δ 对最优策略 q_t^* 并没有直接影响, 但是会直接影响值函数 $V(t, x, y)$. 然而, 结合前面给出的假设条件 (3.5) 和 (3.11) 我们发现, 参数 A 和 δ 对 θ 的取值有着很大的限制, 也就是说, 参数 A 和 δ 的取值对最优再保险策略通过 θ 产生间接的影响. 这一点将在第 5 节的图 4 中体现出来.

4.2 $n \geq 3$ 的情形

对于 $n \geq 3$ 的情形, 此时可行域 $\mathcal{E}$ 为 $[0, 1]^n$. 回顾 (3.6) 中 $h(q_t)$ 的表达, 并解决线性方程组 (3.7) 可以得到函数 $h(q_t)$ 取最大值的点 $\hat{q}_{it}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 如命题 1 所示.

(1) 如果对于所有的 i ($i = 1, 2, \dots, n$) 都有 $\hat{q}_{it} \in [0, 1]$ 成立, 那么 $q_{it}^* = \hat{q}_{it}$, $V(t, x, y) = \hat{V}(t, x, y)$, 其中 $\hat{V}(t, x, y)$ 为第 3 节集合 $\tilde{\mathcal{A}}$ 内最优策略对应的值函数.

(2) 如果对于某些 i , $\hat{q}_{it} \notin [0, 1]$, 那么根据引理 4 可知, 函数 $h(q_t)$ 的最大值将在 $\partial\mathcal{E}$ 上取得. 根据 $\mathcal{A}$ 内可行策略的定义, 此时可行域为一个凸多面体. 对 $i = 1, 2, \dots, n$, 分别令向量 q_t 中的每一元素 $q_{it} = 0$ 和 $q_{it} = 1$, 这时候原问题转化为 $2n$ 个 $n-1$ 维的最优化问题. 同样, 我们通过数学分析的方法求出这些 $n-1$ 维问题中对应函数 $h_{i_0}(q_t)$ (向量 q_t 的第 i 个元素取 0) 和 $h_{i_1}(q_t)$ (向量 q_t 的第 i 个元素取 1) 的最大值, 那么原问题的最大值一定就是这 $2n$ 个问题中函数 $h_{i_0}(q_t)$ 和 $h_{i_1}(q_t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 的最大值. 如果在这 $2n$ 个最优问题中, 求出的最大值点未落在对应的定义域内, 那么重复降维的过程, 即转化为求 $2(n-1)$ 个 $n-2$ 维问题来求对应的最优策略.

为了对 $n \geq 3$ 情形给出详细的说明, 我们以 $n = 3$ 来举例. 此时, 对应的可行域 $\mathcal{E}$ 为 $[0, 1]^3$.

(1) 如果 $\hat{q}_{it} \in [0, 1]$ 对 $i = 1, 2, 3$ 均成立, 那么 $q_{it}^* = \hat{q}_{it}$, $V(t, x, y) = \hat{V}(t, x, y)$.

(2) 如果对于某些 i , $\hat{q}_{it} \notin [0, 1]$, 那么根据引理 4 的结论可知, 最大值点将在 $\partial\mathcal{E}$ 上取得. 对于 $n = 3$ 情形, 我们可以将可行域 $\mathcal{E}$ 想象为以

$$\{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

表示的正方体, 那么此时 $\mathcal{E}$ 的边界为正方体的六个面, 即

$$\mathcal{A}_1 = \{(x, y, z) \mid x = 0, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\},$$

$$\mathcal{A}_2 = \{(x, y, z) \mid x = 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\},$$

$$\mathcal{A}_3 = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, y = 0, 0 \leq z \leq 1\},$$

$$\mathcal{A}_4 = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, y = 1, 0 \leq z \leq 1\},$$

$$\mathcal{A}_5 = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z = 0\},$$

$$\mathcal{A}_6 = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z = 1\}.$$

所以接下来, 我们通过三个步骤来寻找最优再保险策略.

第 1 步 首先, 我们在 $\mathcal{A}_1$ 上寻找相应的最大值点. 记

$$h_{1_0}(q_{2t}, q_{3t}) = h(0, q_{2t}, q_{3t}).$$

对函数 $h_{1_0}(q_{2t}, q_{3t})$ 关于 q_{it} ($i = 2, 3$) 求导, 并且对于 $i = 2$ 和 $i = 3$, 分别令 $\frac{\partial h_{1_0}}{\partial q_{it}}$ 为 0 可以得到

$$\begin{cases} \gamma P_2^2(t)[\sigma_2^2 q_{2t} + \lambda_0 \mu_2 \mu_3 q_{3t}] = \eta_2 a_2 P_1(t), \\ \gamma P_2^2(t)[\lambda_0 \mu_3 \mu_2 q_{2t} + \sigma_3^2 q_{3t}] = \eta_3 a_3 P_1(t). \end{cases} \quad (4.41)$$

求解方程组 (4.41) 可得

$$\begin{cases} \hat{q}_{2t}^{1_0} = \frac{1}{\gamma P_1(t)} \left(\frac{\lambda_0 \eta_3 a_3 \mu_2 \mu_3 - \eta_2 a_2 \sigma_3^2}{\lambda_0^2 \mu_2^2 \mu_3^2 - \sigma_2^2 \sigma_3^2} \right), \\ \hat{q}_{3t}^{1_0} = \frac{1}{\gamma P_1(t)} \left(\frac{\lambda_0 \eta_2 a_2 \mu_2 \mu_3 - \eta_3 a_3 \sigma_2^2}{\lambda_0^2 \mu_2^2 \mu_3^2 - \sigma_2^2 \sigma_3^2} \right). \end{cases} \quad (4.42)$$

(i) 如果对于 $i = 2$ 和 $i = 3$, 有 $\hat{q}_{it}^{1_0} \in [0, 1]$, 那么函数 $h_{1_0}(q_{2t}, q_{3t})$ 在点 $(\hat{q}_{2t}^{1_0}, \hat{q}_{3t}^{1_0})$ 处取最大值. 记

$$\begin{cases} \hat{q}_t^{*1_0} = (0, \hat{q}_{2t}^{1_0}, \hat{q}_{3t}^{1_0}), \\ \hat{h}_{1_0} = \max_{q_{it} \in [0, 1]} h_{1_0}(q_{2t}, q_{3t}) = h_{1_0}(\hat{q}_{2t}^{1_0}, \hat{q}_{3t}^{1_0}). \end{cases} \quad (4.43)$$

(ii) 如果对于某些 i , 有 $\hat{q}_{it}^{1_0} \notin [0, 1]$, 那么我们就需要在 $\mathcal{A}_1$ 的边界上来寻求相应的最大值点,

$$\begin{aligned} \partial \mathcal{A}_1 = & \{(0, 0, z) \mid 0 \leq z \leq 1\} \cup \{(0, 1, z) \mid 0 \leq z \leq 1\} \\ & \cup \{(0, y, 0) \mid 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(0, y, 1) \mid 0 \leq y \leq 1\}. \end{aligned}$$

记

$$\begin{cases} h_{1_0 2_0}(q_{3t}) = h(0, 0, q_{3t}), \\ h_{1_0 2_1}(q_{3t}) = h(0, 1, q_{3t}), \\ h_{1_0 3_0}(q_{2t}) = h(0, q_{2t}, 0), \\ h_{1_0 3_1}(q_{2t}) = h(0, q_{2t}, 1). \end{cases} \quad (4.44)$$

分别对函数 $h_{1_0 2_0}(q_{3t})$ 和 $h_{1_0 2_1}(q_{3t})$ 关于 q_{3t} 求导, 并对函数 $h_{1_0 3_0}(q_{2t})$ 和 $h_{1_0 3_1}(q_{2t})$ 对 q_{2t} 求导, 然后令导函数 $\frac{\partial h_{1_0 2_0}}{\partial q_{3t}}$ 、 $\frac{\partial h_{1_0 2_1}}{\partial q_{3t}}$ 、 $\frac{\partial h_{1_0 3_0}}{\partial q_{2t}}$ 和 $\frac{\partial h_{1_0 3_1}}{\partial q_{2t}}$ 等于 0 可得

$$\begin{cases} \gamma P_2^2(t) \sigma_3^2 q_{3t} = \eta_3 a_3 P_1(t), \\ \gamma P_2^2(t) \sigma_3^2 q_{3t} = \eta_3 a_3 P_1(t) - \lambda_0 \mu_2 \mu_3 \gamma P_2^2(t), \\ \gamma P_2^2(t) \sigma_2^2 q_{2t} = \eta_2 a_2 P_1(t), \\ \gamma P_2^2(t) \sigma_2^2 q_{2t} = \eta_2 a_2 P_1(t) - \lambda_0 \mu_2 \mu_3 \gamma P_2^2(t). \end{cases} \quad (4.45)$$

求解 (4.45) 内四个方程可得

$$\begin{cases} \hat{q}_{3t}^{1_0 2_0} = \frac{1}{\gamma P_1(t)} \cdot \frac{\eta_3 a_3}{\sigma_3^2}, \\ \hat{q}_{3t}^{1_0 2_1} = \frac{1}{\gamma P_1(t)} \cdot \frac{\eta_3 a_3}{\sigma_3^2} - \frac{\lambda_0 \mu_2 \mu_3}{\sigma_3^2}, \\ \hat{q}_{2t}^{1_0 3_0} = \frac{1}{\gamma P_1(t)} \cdot \frac{\eta_2 a_2}{\sigma_2^2}, \\ \hat{q}_{2t}^{1_0 3_1} = \frac{1}{\gamma P_1(t)} \cdot \frac{\eta_2 a_2}{\sigma_2^2} - \frac{\lambda_0 \mu_2 \mu_3}{\sigma_2^2}. \end{cases} \quad (4.46)$$

如果 $\hat{q}_{3t}^{1_0 2_0}, \hat{q}_{3t}^{1_0 2_1}, \hat{q}_{2t}^{1_0 3_0}, \hat{q}_{2t}^{1_0 3_1} \in [0, 1]$ 均成立, 记

$$\hat{h}_{1_0} = \max\{h_{1_0 2_0}(\hat{q}_{3t}^{1_0 2_0}), h_{1_0 2_1}(\hat{q}_{3t}^{1_0 2_1}), h_{1_0 3_0}(\hat{q}_{2t}^{1_0 3_0}), h_{1_0 3_1}(\hat{q}_{2t}^{1_0 3_1})\}, \quad (4.47)$$

那么有

$$\hat{q}_t^{*1_0} = \begin{cases} (0, 0, \hat{q}_{3t}^{1_0 2_0}), & \text{若 } \hat{h}_{1_0} = h_{1_0 2_0}(\hat{q}_{3t}^{1_0 2_0}), \\ (0, 1, \hat{q}_{3t}^{1_0 2_1}), & \text{若 } \hat{h}_{1_0} = h_{1_0 2_1}(\hat{q}_{3t}^{1_0 2_1}), \\ (0, \hat{q}_{2t}^{1_0 3_0}, 0), & \text{若 } \hat{h}_{1_0} = h_{1_0 3_0}(\hat{q}_{2t}^{1_0 3_0}), \\ (0, \hat{q}_{2t}^{1_0 3_1}, 1), & \text{若 } \hat{h}_{1_0} = h_{1_0 3_1}(\hat{q}_{2t}^{1_0 3_1}). \end{cases}$$

如果 (4.46) 中方程的解不都属于 $[0, 1]$ 区间, 那么我们就需要在 $\partial \mathcal{A}_1$ 上即区间 $[0, 1]$ 端点处来寻找函数的最大值. 由于函数 $h_{1_0 2_0}(q_{3t})$ 、 $h_{1_0 2_1}(q_{3t})$ 、 $h_{1_0 3_0}(q_{2t})$ 和 $h_{1_0 3_1}(q_{2t})$ 都是单调增的, 所以, 我们可以直接得到以下结论:

$$\begin{cases} \hat{q}_t^{1_0 2_0 3_0} = (0, 0, 0), & \text{若 } h_{1_0 2_0}(0) > h_{1_0 2_0}(1), \\ \hat{q}_t^{1_0 2_0 3_1} = (0, 0, 1), & \text{若 } h_{1_0 2_0}(0) \leq h_{1_0 2_0}(1), \end{cases} \quad (4.48)$$

$$\begin{cases} \hat{q}_t^{1_0 2_1 3_0} = (0, 1, 0), & \text{若 } h_{1_0 2_1}(0) > h_{1_0 2_1}(1), \\ \hat{q}_t^{1_0 2_1 3_1} = (0, 1, 1), & \text{若 } h_{1_0 2_1}(0) \leq h_{1_0 2_1}(1), \end{cases} \quad (4.49)$$

$$\begin{cases} \hat{q}_t^{1_0 3_0 2_0} = (0, 0, 0), & \text{若 } h_{1_0 3_0}(0) > h_{1_0 3_0}(1), \\ \hat{q}_t^{1_0 3_0 2_1} = (0, 1, 0), & \text{若 } h_{1_0 3_0}(0) \leq h_{1_0 3_0}(1), \end{cases} \quad (4.50)$$

$$\begin{cases} \hat{q}_t^{1_0 3_1 2_0} = (0, 0, 1), & \text{若 } h_{1_0 3_1}(0) > h_{1_0 3_1}(1), \\ \hat{q}_t^{1_0 3_1 2_1} = (0, 1, 1), & \text{若 } h_{1_0 3_1}(0) \leq h_{1_0 3_1}(1). \end{cases} \quad (4.51)$$

记

$$\begin{aligned} \hat{h}_{1_0} = \max\{ & h(\hat{q}_t^{1_0 2_0 3_0}), h(\hat{q}_t^{1_0 2_0 3_1}), h(\hat{q}_t^{1_0 2_1 3_0}), h(\hat{q}_t^{1_0 2_1 3_1}), \\ & h(\hat{q}_t^{1_0 3_0 2_0}), h(\hat{q}_t^{1_0 3_0 2_1}), h(\hat{q}_t^{1_0 3_1 2_0}), h(\hat{q}_{1_0}^{1_0 3_1 2_1})\}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

那么有

$$\hat{q}_t^{*1_0} = \begin{cases} (0, 0, 0), & \text{若 } \hat{h}_{1_0} = h_{1_0 2_0}(\hat{q}_t^{1_0 2_0 3_0}) = h_{1_0 3_0}(\hat{q}_t^{1_0 3_0 2_0}), \\ (0, 0, 1), & \text{若 } \hat{h}_{1_0} = h_{1_0 2_0}(\hat{q}_t^{1_0 2_0 3_1}) = h_{1_0 3_1}(\hat{q}_t^{1_0 3_1 2_0}), \\ (0, 1, 0), & \text{若 } \hat{h}_{1_0} = h_{1_0 2_1}(\hat{q}_t^{1_0 2_1 3_0}) = h_{1_0 3_0}(\hat{q}_t^{1_0 3_0 2_1}), \\ (0, 1, 1), & \text{若 } \hat{h}_{1_0} = h_{1_0 2_1}(\hat{q}_t^{1_0 2_1 3_1}) = h_{1_0 3_1}(\hat{q}_t^{1_0 3_1 2_1}). \end{cases}$$

第 2 步 在第 1 步中已经得到函数 $\hat{h}_{1_0}$ 在 $\mathcal{A}_1$ 上的最大值点 $\hat{q}_t^{*1_0}$. 同样, 我们可以得到函数 $h(q_t)$ 在集合 $\mathcal{A}_i$ ($i = 2, 3, \dots, 6$) 上的最大值点.

记

$$\begin{cases} h_{1_1}(q_{2t}, q_{3t}) = h(1, q_{2t}, q_{3t}), \\ h_{2_0}(q_{1t}, q_{3t}) = h(q_{1t}, 0, q_{3t}), \\ h_{2_1}(q_{1t}, q_{3t}) = h(q_{1t}, 1, q_{3t}), \\ h_{3_0}(q_{1t}, q_{2t}) = h(q_{1t}, q_{2t}, 0), \\ h_{3_1}(q_{1t}, q_{2t}) = h(q_{1t}, q_{2t}, 1). \end{cases} \quad (4.53)$$

通过计算可以得到

$$\begin{cases} \hat{h}_{1_1} = \max h(1, q_{2t}, q_{3t}) = h_{1_1}(\hat{q}_t^{*1_1}), \\ \hat{h}_{2_0} = \max h(q_{1t}, 0, q_{3t}) = h_{2_0}(\hat{q}_t^{*2_0}), \\ \hat{h}_{2_1} = \max h(q_{1t}, 1, q_{3t}) = h_{2_1}(\hat{q}_t^{*2_1}), \\ \hat{h}_{3_0} = \max h(q_{1t}, q_{2t}, 0) = h_{3_0}(\hat{q}_t^{*3_0}), \\ \hat{h}_{3_1} = \max h(q_{1t}, q_{2t}, 1) = h_{3_1}(\hat{q}_t^{*3_1}), \end{cases} \quad (4.54)$$

其中 $\hat{q}_t^{*1_1}$ 、 $\hat{q}_t^{*2_0}$ 、 $\hat{q}_t^{*2_1}$ 、 $\hat{q}_t^{*3_0}$ 和 $\hat{q}_t^{*3_1}$ 分别表示函数 $h(q_t)$ 在 $\mathcal{A}_2$ 、 $\mathcal{A}_3$ 、 $\mathcal{A}_4$ 、 $\mathcal{A}_5$ 和 $\mathcal{A}_6$ 上取最大值的点.

第 3 步 基于第 1 和 2 步的结果, 通过比较 $\hat{h}_{1_0}$ 、 $\hat{h}_{1_1}$ 、 $\hat{h}_{2_0}$ 、 $\hat{h}_{2_1}$ 、 $\hat{h}_{3_0}$ 和 $\hat{h}_{3_1}$ 的值, 我们可以得到函数 $h(q_t)$ 在集合 $\mathcal{E}$ 上的最大值以及取最大值的点分别为

$$h^* = \max\{\hat{h}_{1_0}, \hat{h}_{1_1}, \hat{h}_{2_0}, \hat{h}_{2_1}, \hat{h}_{3_0}, \hat{h}_{3_1}\},$$

及

$$q_t^* = \begin{cases} \hat{q}_t^{*1_0}, & \text{若 } h^* = \hat{h}_{1_0}, \\ \hat{q}_t^{*1_1}, & \text{若 } h^* = \hat{h}_{1_1}, \\ \hat{q}_t^{*2_0}, & \text{若 } h^* = \hat{h}_{2_0}, \\ \hat{q}_t^{*2_1}, & \text{若 } h^* = \hat{h}_{2_1}, \\ \hat{q}_t^{*3_0}, & \text{若 } h^* = \hat{h}_{3_0}, \\ \hat{q}_t^{*3_1}, & \text{若 } h^* = \hat{h}_{3_1}. \end{cases}$$

5 数值分析

本节通过三个例子来说明最优策略的具体求解过程以及某些重要参数对最优策略的影响. 假设索赔额 $\{X_i\}$ ($i = 1, 2, 3$) 分别服从参数为 ν_i 的指数分布. 为了计算方便, 令

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta, \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta^1.$$

在接下来的例 1 中, 我们针对第 4.1 小节中 $n = 2$ 的情形详细说明如何用截断的方法来求出对应的最优策略.

例 1 假设 $n = 2$, 此时保险公司拥有两份相依的保险业务. 令 $T = 10, t = 5, \lambda_0 = 2, \theta^1 = 0.5, \eta = 0.7, \nu_1 = 2, \nu_2 = 3, \lambda_1 = 3$ 且 $\lambda_2 = 5$. 若 $r_0 = 0.18, \theta = 0.1, A = 0.1, \delta = 0.1$, 根据注 2, 令 $\alpha_1 = 0.00079, \alpha_2 = 0.099$, 则对应地有

$$r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta = 0.1802 > 0.$$

(1) 若 $\gamma = 0.5, \nu_1 = 2, \nu_2 = 3, \lambda_1 = 3$ 且 $\lambda_2 = 5$, 则最优策略见表 1.

由于表 1 中的 $\hat{q} = (0.4683, 0.7526) \in [0, 1]^2$, 所以 $q^* = \hat{q} = (0.4683, 0.7526)$.

(2) 若 $\gamma = 0.3, \nu_1 = 2, \nu_2 = 3, \lambda_1 = 3$ 且 $\lambda_2 = 5$, 则最优策略如见表 2.

由于表 2 中的 $\hat{q} = (0.7805, 1.2543) \notin [0, 1]^2$, 所以我们令 $q_2^* = 1$. 此时求得函数 $h_{2_1}(q_1)$ 取最大值的点 $\hat{q}_{1t}^{2_1} = 0.3258 \in [0, 1]$, 因此,

$$q^* = (0.3258, 1).$$

(3) 若 $\gamma = 0.2, \nu_1 = 2, \nu_2 = 1, \lambda_1 = 3$ 且 $\lambda_2 = 5$, 则最优策略见表 3.

同理, 因为 $\hat{q} = (1.1707, 0.6272) \notin [0, 1]^2$, 所以令 $q_1^* = 1$. 此时求得函数 $h_{1_1}(q_2)$ 取最大值的点 $\hat{q}_{2t}^{1_1} = 0.2557 \in [0, 1]$, 因此,

$$q^* = (1, 0.2557).$$

在例 2 中, 我们详细介绍当 $n = 3$ 时, 如何使用降维的方法来寻找具体的最优再保险策略.

例 2 假设 $n = 3$, 此时保险公司拥有三份相依的保险业务. 令 $T = 10, t = 5, \lambda_0 = 1, \theta^1 = 0.5, \eta = 0.7$.

(1) 若 $r_0 = 0.1, \theta = 0.1, A = 0.1, \delta = 1$, 根据注 2, 令 $\alpha_1 = 0.00083, \alpha_2 = 0.09$, 则有

$$r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta = 0.1087 > 0.$$

假设 $\gamma = 0.8, \nu_1 = 1, \nu_2 = 2, \nu_3 = 3, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$ 且 $\lambda_3 = 3$. 对应的最优策略见表 4.

表 1 最优策略

i	$\hat{q}_i$	q_i^*
1	0.4683	0.4683
2	0.7526	0.7526

表 2 最优策略

i	$\hat{q}_i$	q_i^*
1	0.7805	0.3258
2	1.2543	1.0000

表 3 最优策略

i	$\hat{q}_i$	q_i^*
1	1.1707	1.0000
2	0.6272	0.2557

当参数取值如 (1) 中所示时, 函数 $h(q_t)$ 取最大值的点 $\hat{q}_t$ 属于对应的定义域 $[0, 1]^3$, 所以 $\hat{q}_t = q_t^*$. 在接下来的 (2) 中, 我们会发现求得的 $\hat{q}_t$ 值并不属于区域 $[0, 1]^3$, 这时我们就需要通过降维来求相应的最优再保险策略.

(2) 定义

$$\begin{aligned} f(q_t) &= h(q_t) - P_1(t)(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(x + \theta y) \\ &= P_1(t) \sum_{i=1}^3 \eta_i a_i q_{it} - \frac{\gamma}{2} P_1^2(t) \left[\sum_{i=1}^3 \sigma_i^2 q_{it}^2 + \sum_{i \neq j} \lambda_0 \mu_i \mu_j q_{it} q_{jt} \right], \end{aligned}$$

则对于 $i = 1, 2, 3$, 有

$$f_{i0}(q_t) = h_{i0}(q_t) - P_1(t)(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(x + \theta y),$$

且

$$f_{i1}(q_t) = h_{i1}(q_t) - P_1(t)(r_0 - \alpha_1 - \alpha_2 + \theta)(x + \theta y).$$

根据 $f_{i0}(q_{it})$ 和 $f_{i1}(q_{it})$ 的定义可知, 对于 $i = 1, 2, 3$, 最大化函数 $f_{i0}(q_{it})$ 与最大化 $h_{i0}(q_{it})$ 是等价的, 同样地, 最大化函数 $f_{i1}(q_{it})$ 与最大化 $h_{i1}(q_{it})$ 也是等价的. 若 $r_0 = 0.01$, $\theta = 0.01$, $A = 0.01$, $\delta = 1$, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 2$, $\nu_3 = 5$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ 和 $\lambda_3 = 3$, 则由注 2 可知, 对应的 $\alpha_1 = 9.8 \times 10^{-7}$, $\alpha_2 = 9.9 \times 10^{-3}$. 相应的结论见表 5.

在表 5 中, 由于求得的 $\hat{q}_t = (0.0680, 0.3034, 1.0511)$ 不属于区域 $[0, 1]^3$, 所以我们需要分别求函数 $f_{i0}(q_{it})$ ($f_{i1}(q_{it})$) ($i = 1, 2, 3$) 的最大值 $\hat{f}_{i0}$ ($\hat{f}_{i1}$) 及对应取最大值的点 $\hat{q}^{*i0}$ ($\hat{q}^{*i1}$). 通过比较 $\hat{f}_{i0}$ 与 $\hat{f}_{i1}$ ($i = 1, 2, 3$) 这 6 个函数值的大小, 我们可以得到它们中的最大值是 0.4351, 从而得到最优策略 $q_t^* = (0, 1, 1)$.

在接下来的例 3 中, 我们通过图形来探讨参数 ν_i 、 λ_i 、 λ_0 、 r_0 、 γ 、 A 、 δ 和 θ 对最优策略 q_t^* 的影响. 参数 α_1 和 α_2 的值由等式 (3.5) 和 (3.11) 决定, 并随着参数 r_0 、 A 、 δ 和 θ 变化而变化.

例 3 假设 $n = 2$, 此时保险公司拥有两份相依保险业务. 令 $T = 15$, $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 2.5$, $\lambda_0 = 2$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$, $\theta^1 = 0.5$, $\eta = 0.7$, $r_0 = 0.3$, $A = 0.8$, $\delta = 1$ 和 $\theta = 0.1$. 图 1-5 给出了一些重要参数对最优策略的影响.

表 4 最优策略

i	$\hat{q}_i$	q_i^*
1	0.1842	0.1842
2	0.4305	0.4305
2	0.6124	0.6124

表 5 最优策略

i	$\hat{q}_i$	$\hat{q}^{*i0}$	$\hat{f}_{i0}$	$\hat{q}^{*i1}$	$\hat{f}_{i1}$	q_i^*
1	0.0680	(0, 1, 1)	0.4351	(1, 0.2243, 0.8388)	0.2243	0
2	0.3034	(0, 0, 1)	0.3589	(0, 1, 1)	0.4351	1
3	1.0511	(0.2401, 0.5335, 0)	0.4261	(0.0823, 0.3442, 1)	0.4092	1

图 1 参数 ν_i 对最优策略 $q_{it}^*(\nu_1, \nu_2, \lambda_i)$ ($i = 1, 2$) 的影响

图 2 参数 λ_i 对最优策略 $q_{it}^*(\nu_i, \lambda_1, \lambda_2)$ ($i = 1, 2$) 的影响

图 3 参数 λ_0 和 γ 对最优策略 q_{1t}^* 的影响

图 4 参数 A 和 δ 对最优策略 q_{1t}^* 的影响 图 5 参数 θ 对最优策略 q_{2t}^* 的影响

图 1 刻画了索赔额分布对再保险策略的影响. 从图 1 我们可以看出, 参数值 ν_1 (ν_2) 越大, 对应的最优再保险策略 q_{1t}^* (q_{2t}^*) 越大, 也就是自留的保险业务比例越高, 这与我们期望的结果是一致的. 因为对于服从指数分数的索赔随机变量而言, 参数 ν_1 (ν_2) 越小意味着索赔的期望值越大, 保险人将会舍弃更多的保险业务份额. 同时, 容易发现再保险比例 q_{1t}^* (q_{2t}^*) 的取值不随着参数 ν_2 (ν_1) 取值的变化而变化. 根据文献 [18] 可知, 这种独立不相关性仅在索赔额变量服从指数分布且再保险保费按照期望保费原理收取的情形下才出现. 也就是说, 如果索赔额变量服从其他分布或者保费原理不再是期望保费原理, 对应的再保险策略 q_{1t}^* (q_{2t}^*) 可能会随着参数 ν_2 (ν_1) 取值的变化而变化.

图 2 刻画了索赔次数分布, 即参数 λ_i 对再保险策略的影响. 很容易可以看出, 固定时间 t , 参数值 λ_1 (λ_2) 越大, 对应的最优再保险策略 q_{1t}^* (q_{2t}^*) 的值越大, 但是 q_{2t} (q_{1t}) 的值却越小. 此外, 由于参数 λ_1 (λ_2) 对最优策略 q_{1t}^* (q_{2t}^*) 有更直接的影响, 所以, 当参数 λ_1 (λ_2) 变化时, 策略 q_{1t}^* (q_{2t}^*) 变化的速度明显快于 q_{2t}^* (q_{1t}^*).

我们可以从图 3 中看出, 参数 λ_0 和 γ 对最优策略 q_{1t}^* 的影响, 对于策略 q_{2t}^* 有类似的结论, 这里不再赘述. 在图 3(a) 中, 随着参数 λ_0 取值的增大, 最优策略 q_{1t}^* 的值相应减小. 这与我们期望的结果是一致的, 因为 λ_0 的增大意味着期望索赔额的增大, 保险人将会为了控制风险而自留更少的保险业

务. 从图 3(b) 中我们发现, 对于固定的时间 t , 自留比例 q_{1t}^* 随着风险厌恶系数 γ 的增大而减少, 也就是说, 保险人越是厌恶风险, 越会购买更多的再保险, 从而自留更少的保险业务.

接下来, 我们通过图 4 和 5 来说明时滞参数 θ 、 A 和 δ 对最优策略 q_{1t}^* 的影响. 至于这些参数对最优策略 q_{2t}^* 的影响, 可以同理得到.

图 4 中的两张图刻画了参数 A 和 δ 对最优策略 q_{1t}^* 的影响. 通过图 4(a) 我们不难发现, A 取值越大, 最优策略 q_{1t}^* 越小. 从平均滞后财富 $\bar{Y}(t)$ 的定义我们可以看到, A 越大, 意味着较早时间的财富值所占的权重越小. 换句话讲, 越接近当前时刻的财富, 在平均延迟财富 $\bar{Y}(t)$ 的构建中越显重要. 这个有趣的发现表明, 保险人应该更多地关注较早时刻的财富情况来调整自身的资本流入/流出情况, 从而使得达到终期目标的同时承担更小的风险. 图 4(b) 探讨的是参数 δ 对最优策略 q_{1t}^* 的影响. 固定时间 t , 参数 δ 越大, q_{1t}^* 取值越小. 我们知道, 随着 δ 的增加, 对过去财富值进行考量的时间区间拉长, 也就是说, 更多过去的信息被考虑进来, 保险人从降低风险的角度考虑, 会选择购买更多的再保险, 从而自留较少的风险.

图 5 探讨了参数 θ 对最优策略 q_{2t}^* 的影响. 当参数 θ 值增大时, 最优再保险策略 q_{2t}^* 的值将减少. 值得注意的是, 当考虑极端情形即 $\theta = 0$ 时, 此时保险人不再将过去的信息考虑进来, 他们会因此受到获得较高业绩的诱惑而采取短期冒险行为. 然而, $\theta \neq 0$ 意味着保险公司将企业在过去一段时间内的综合财富 $Y^q(T)$ 纳入期终绩效考量, 这可以将保险公司的关注点从某一瞬间转移到一段具体时间区间内. 此外, θ 取更大值意味着平均财富在最终绩效测量中占据更大的权重, 这可以使得保险公司将作出更理性的风险决策. 也就是说, 保险人将自留更少的保险业务份额. 此外从图 4 和 5 可以看出, 是否考虑时滞信息将大大影响最终的最优再保险策略, 这也说明考虑时滞效应下的最优控制问题是有必要的.

6 总结

本文主要站在保险公司的角度探讨了最大化期望 - 方差效用下的最优比例再保险问题. 由于保险人的盈余过程是由具有多维相依风险的累积索赔过程来刻画的; 同时把时滞效应考虑进来, 这里所指时滞主要由保险公司当前资本的瞬时流入或流出造成的; 此外, 我们把最优策略限制在 $[0, 1]^n$ 上, 这使得最优问题变得更加复杂. 我们将原始最优问题放在博弈论的框架下分四种不同情形分别进行讨论, 通过随机控制理论以及对应的广义 HJB 方程, 采用截断或降维的方法, 我们得到了最优问题的最优策略和值函数.

基于时滞和多维相依风险模型, 考虑最优再保险策略的问题还有很多方面值得我们继续探讨. 一方面, 我们可以将本文目标函数中的风险厌恶系数从常数推广到更一般的情形, 例如, 依赖于市场状态或者当前盈余值; 另一方面, 我们可以考虑更复杂的风险模型, 例如, 保险公司不仅可以将其财富投资于无风险债券, 还可以投资于风险资产, 这时问题的求解难度无疑会加大, 同时我们可以考虑由相依风险及体制转换共同刻画的随机过程来表示风险资产价格; 此外, 我们可以考虑资产在交易期间收取固定或者比例交易费用的情况. 所有这些问题都更具挑战性.

致谢 作者衷心感谢评审专家们对本文所提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Højgaard B, Taksar M. Optimal proportional reinsurance policies for diffusion models. Scand Actuar J, 1998, 2: 166–180

- 2 Schmidli H. Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting. *Scand Actuar J*, 2001, 1: 55–68
- 3 Liang Z B. Optimal proportional reinsurance for controlled risk process which is perturbed by diffusion. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2007, 23: 477–488
- 4 Kaluszk M. Optimal reinsurance under mean-variance premium principles. *Insurance Math Econom*, 2001, 28: 61–67
- 5 Kaluszk M. Mean-variance optimal reinsurance arrangements. *Scand Actuar J*, 2004, 1: 28–41
- 6 Centeno M L. Measuring the effects of reinsurance by the adjustment coefficient. *Insurance Math Econom*, 1986, 5: 169–182
- 7 Centeno M L. Excess of loss reinsurance and Gerber's inequality in the Sparre Anderson model. *Insurance Math Econom*, 2002, 31: 415–427
- 8 Hald M, Schmidli H. On the maximization of the adjustment coefficient under proportional reinsurance. *Astin Bull*, 2004, 34: 75–83
- 9 Liang Z B, Guo J Y. Upper bound for ruin probabilities under optimal investment and proportional reinsurance. *Appl Stoch Models Bus Ind*, 2008, 24: 109–128
- 10 Markowitz H M. Portfolio selection. *J Finance*, 1952, 7: 77–91
- 11 Li D, Ng W L. Optimal dynamic portfolio selection: Multi-period mean-variance formulation. *Math Finance*, 2000, 10: 387–406
- 12 Zhou X Y, Li D. Continuous-time mean-variance portfolio selection: A stochastic LQ framework. *Appl Math Optim*, 2000, 42: 19–33
- 13 Wang S S. Aggregation of correlated risk portfolios: Models and algorithms. *Proc Casualty Actuar Soc*, 1998, 85: 848–939
- 14 Yuen Kam C, Guo J Y, Wu X Y. On a correlated aggregate claim model with Poisson and Erlang risk process. *Insurance Math Econom*, 2002, 31: 205–214
- 15 Yuen Kam C, Guo J Y, Wu X Y. On the first time of ruin in the bivariate compound Poisson model. *Insurance Math Econom*, 2006, 38: 298–308
- 16 Bai L J, Cai J, Zhou M. Optimal reinsurance policies for an insurer with a bivariate reserve risk process in a dynamic setting. *Insurance Math Econom*, 2013, 53: 664–670
- 17 Liang Z B, Yuen Kam C. Optimal dynamic reinsurance with dependent risks: Variance premium principle. *Scand Actuar J*, 2016, 1: 18–36
- 18 Yuen Kam C, Liang Z B, Zhou M. Optimal proportional reinsurance with common shock dependence. *Insurance Math Econom*, 2015, 64: 1–13
- 19 Ming Z Q, Liang Z B. Optimal mean-variance reinsurance with common shock dependence. *ANZIAM J*, 2016, 58: 162–181
- 20 Chang M H, Pang T, Yang Y P. A stochastic portfolio optimization model with bounded memory. *Math Oper Res*, 2011, 36: 604–619
- 21 Federico S. A stochastic control problem with delay arising in a pension fund model. *Finance Stoch*, 2011, 15: 421–459
- 22 Elsanosi I, Øksendal B, Sulem A. Some solvable stochastic control problems with delay. *Stochastics*, 2000, 71: 69–89
- 23 Øksendal B, Sulem A. A maximum principle for optimal control of stochastic systems with delay, with applications to finance. In: *Optimal Control and Partial Differential Equations-Innovations and Applications*. Amsterdam: IOS Press, 2001, 64–79
- 24 David D. Optimal control of stochastic delayed systems with jumps. <https://www.researchgate.net/publication/29608318>, 2008
- 25 Mao X R, Sabanis S. Delay geometric Brownian motion in financial option valuation. *Stochastics*, 2012, 85: 1–26
- 26 Shen Y, Meng Q X, Shi P. Maximum principle for jump-diffusion meanfield stochastic delay differential equations and its application to finance. *Automatica*, 2014, 50: 1565–1579
- 27 Shen Y, Zeng Y. Optimal investment-reinsurance with delay for mean-variance insurers: A maximum principle approach. *Insurance Math Econom*, 2014, 57: 1–12
- 28 A C X, Li Z F. Optimal investment and excess-of-loss reinsurance problem with delay for an insurer under Heston's SV model. *Insurance Math Econom*, 2015, 61: 181–196
- 29 Björk T, Murgoci A. A general theory of Markovian time inconsistent stochastic control problems. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1694759>, 2010
- 30 Strotz R H. Myopia and inconsistency in dynamic utility maximization. *Rev Econom Stud*, 1955, 23: 165–180
- 31 Ekeland I, Lazrak A. Being serious about non-commitment: Subgame perfect equilibrium in continuous time. *ArXiv:0604264*, 2006
- 32 Ekeland I, Privu T A. Investment and consumption without commitment. *Math Financ Econ*, 2008, 2: 57–86

- 33 Zhang C B, Liang Z B. Portfolio optimization for jump-diffusion risky assets with common shock dependence and state dependent risk aversion. *Optimal Control Appl Methods*, 2016, 38: 229–246
- 34 Zhang C B, Liang Z B, Yuen Kam C. Portfolio optimization for Markov regime switching jump-diffusion risky assets: A time-consistent approach. *Automatica*, in press, 2016

Optimal mean-variance reinsurance with delay and multiple classes of dependent risks

YANG XiaoXiao, LIANG ZhiBin & ZHANG CaiBin

Abstract In this paper, we consider an optimal proportional reinsurance problem for the compound Poisson risk model with delay and multiple dependent classes of insurance business. Under the criterion of maximizing the mean-variance utility of the terminal wealth, we formulate the time-inconsistent problem within a game theoretic framework and look for a subgame perfect Nash equilibrium strategy. Based on the technique of stochastic control theory and the corresponding extended Hamilton-Jacobi-Bellman equation, the explicit expressions of the optimal equilibrium strategy and the value function are derived for the case of insurance business $n = 2$. Meanwhile, we derive the closed-form expressions of optimal solutions for the case of $n = 3$ by the method of dimension reduction which can be used to get the optimal results for the case of $n > 3$. Finally, some numerical examples are presented to show the impact of model parameters on the optimal strategies.

Keywords delay, common shock dependence, mean-variance utility, time-inconsistence strategy, extended Hamilton-Jacobi-Bellman equation, proportional reinsurance

MSC(2010) 62P05, 93E20, 91B30

doi: 10.1360/SCM-2016-0388