ω -变形 Kaluza-Klein 超引力的转动双荷黑洞解及其热力学

吴迪*, 吴双清, 杨树政

西华师范大学理论物理研究所, 物理与空间科学学院, 南充 637002

* 联系人, E-mail: wdcwnu@163.com

2015-07-30 收稿, 2015-08-28 接受, 2015-09-23 网络版发表

国家自然科学基金(11275157)资助

摘要 将转动带电的 Rasheed-Larsen 双荷黑洞解推广到 ω -变形的 Kaluza-Klein 超引力理论中, 得到了新的 ω -变形的转动双荷黑洞精确解, 并对其热力学性质进行了仔细地分析, 发现除了在电磁规范势 1-形式、电荷、磁荷、静电势和静磁势中需要同时作一个电磁对偶转动以外, ω -变形参数对黑洞度规、质量、角动量、热力学第一定律和 Smarr 公式没有影响.

关键词

ω -变形 Kaluza-Klein
超引力
转动双荷黑洞
黑洞热力学

20世纪20年代左右, Kaluza和Klein建议^[1]在通常的4维时空基础上增加一个紧致的额外空间维, 就可以成功地实现对当时已知的2种基本相互作用——电磁力和万有引力的统一. 现在人们已经知道, Kaluza-Klein (KK)理论为实现所有的4种基本相互作用的统一提供了一种合理可靠的成功途径, 例如: 10维的5种超弦理论和11维的超引力理论以及目前仍然未知的M-理论都建立在现代KK理论的基础之上. 在最简单的KK超引力理论中, 将5维的真空纯Einstein引力理论沿一个类空的方向进行维数约化, 就得到4维Einstein-Maxwell-Dilaton系统, 它包含一个度规、一个U(1)电磁势和一个dilaton (伸缩子)标量场. 显而易见, 引力和电磁相互作用非常自然地包含在这个系统之中.

黑洞是由Einstein的广义相对论所预言的最基本、最重要的客体, 黑洞解的构造特别是对KK黑洞解及其性质的研究有助于人们加深对(超)引力本质和时空性质的认识. KK理论中的转动带电黑洞解于1987年由Frolov等人^[2]采用5维KK理论的观点通过提升-推动-维数约化的手段首先得到. 然而, 这个解只

带有一个电荷参数, 而更一般的解可以同时带有电荷和磁荷^[3]. 多年以后, Rasheed^[4]和Larsen^[5]先后采用(表面上似乎)不同(但实质上相同)的解生成技术得到转动带电的双荷黑洞解, 并研究了其一般性质. Rasheed-Larsen转动双荷解引起人们的极大兴趣^[6-8], 因为它可以作为M-理论中的有效黑洞模型, 通过数其微观状态数, 给出中性黑洞熵的微观统计解释.

另一方面, 4维的KK超引力理论可以通过对 $N=8$ 最大规范超引力理论作一系列的自洽截断而得到^[9]. 多年以来, 人们认为de Wit和Nicolai^[10]从11维的超引力理论通过(S^7 -球)维数约化构造出的 $N=8$, SO(8)最大规范超引力理论是唯一的. 然而, 新近的证据^[11]表明, 存在一簇 ω -变形的不等价的SO(8)规范超引力理论, 这一工作随后引起了人们的极大兴趣和导致了一系列的相关研究. 对该理论作自洽截断可以得到 ω -变形的 $N=8$, SO(8)最大规范超引力理论^[12], 进一步地作一系列的自洽截断可以得到 ω -变形的KK超引力理论. 文献[12]给出了 ω -变形规范KK超引力理论中的静态双荷AdS₄黑洞解, 最近的工作^[13]对这个解的黑洞热力学做了深入的研究. 此外, 文献[14]研究

引用格式: 吴迪, 吴双清, 杨树政. ω -变形 Kaluza-Klein 超引力的转动双荷黑洞解及其热力学. 科学通报, 2015, 60: 3345-3348

Wu D, Wu S Q, Yang S Z. Rotating dyonic black hole in the ω -deformed Kaluza-Klein supergravity and its thermodynamics (in Chinese). Chin Sci Bull, 2015, 60: 3345-3348, doi: 10.1360/N972015-00876

<https://engine.scichina.com/doi/10.1360/N972015-00876>

了静态的双荷AdS₄黑洞的热力学性质, 文献[15]给出了 ω -变形的N=8超引力理论的其他黑洞解.

本文感兴趣的是构造4维 ω -变形的KK超引力理论中新的转动带电的双荷黑洞精确解, 并研究其热力学性质. 研究表明, 本文给出的新黑洞解是Rasheed-Larsen双荷黑洞解在 ω -变形的KK超引力理论中的推广, ω -变形参数只是出现在对电磁规范势1-形式、电荷、磁荷、静电势和静磁势作电磁对偶转动变换之中, 对黑洞线元、质量、角动量、视界角速度、面积熵、Hawking温度、热力学第一定律的微分形式和积分形式没有影响.

1 ω -变形KK超引力的转动双荷黑洞解

文献[12]给出了 ω -变形的KK规范超引力理论的作用量, 它包含度规 $g_{\mu\nu}$, dilaton 标量 ϕ 和Maxwell矢量场 A_μ . 令该理论中的宇宙学常数为零, 就得到如下的拉氏量

$$L = \sqrt{-g} \times \left[R - \frac{3}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{2F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sin 2\omega \sinh 3\phi \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}}{8(e^{3\phi} \cos \omega^2 + e^{-3\phi} \sin \omega^2)} \right], \quad (1)$$

其中, ω 是一个起变形作用的角参数. 当 $\omega=0$ 时, 它回到由5维的Einstein纯引力理论通过维数约化得到的标准KK理论.

构造出上述4维 ω -变形的KK超引力理论中新的转动双荷黑洞解, 其线元和dilaton标量场给出如下:

$$ds^2 = -\frac{H_3}{\sqrt{H_1 H_2}} \left[dt + \frac{\hat{\omega}(r)}{H_3} \sin^2 \theta d\phi \right]^2 + \sqrt{H_1 H_2} \left[\frac{dr^2}{\Delta(r)} + d\theta^2 + \frac{\Delta(r)}{H_3} \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (2)$$

$$\phi = \frac{3}{2} \ln \left(\frac{H_1}{H_2} \right), \quad (3)$$

其中, $\Delta(r) = r^2 - 2mr + a^2$, $H_3 = r^2 - 2mr + a^2 \cos^2 \theta$,

$$\hat{\omega}(r) = \frac{a\sqrt{pq}}{2m(p+q)} \left[(pq + 4m^2)r - m(p-2m)(q-2m) \right],$$

$$H_1 = r(r+p-2m) + a^2 \cos^2 \theta + \frac{p(p-2m)(q-2m)}{2(p+q)} + \frac{p\gamma_p \gamma_q}{2m} a \cos \theta,$$

$$H_2 = r(r+q-2m) + a^2 \cos^2 \theta + \frac{q(p-2m)(q-2m)}{2(p+q)} - \frac{q\gamma_p \gamma_q}{2m} a \cos \theta, \quad (4)$$

$$\text{式中, } \gamma_p = \frac{\sqrt{p^2 - 4m^2}}{\sqrt{p+q}}, \quad \gamma_q = \frac{\sqrt{q^2 - 4m^2}}{\sqrt{p+q}}.$$

文献[12]给出了 ω -变形理论中的静态双荷AdS₄黑洞解, 其规范势是在没有 ω -变形的解所对应的规范势及其对偶之间作了一个电磁对偶转动, 而度规和dilaton标量保持不变. 对于本文所考虑的转动黑洞情形, 可以合理地猜测, 这里所需要的规范势和它的对偶也应该存在类似的关系. 因此, 假设规范势及其对偶的表达式如下:

$$A = A_{RL} \cos \omega + \tilde{A}_{RL} \sin \omega, \quad (5)$$

$$\tilde{A} = -A_{RL} \sin \omega + \tilde{A}_{RL} \cos \omega, \quad (6)$$

其中, $A_{RL} = \frac{\omega_1 dt + \omega_2 d\phi}{H_2}$ 和 $\tilde{A}_{RL} = \frac{-\omega_3 dt + \omega_4 d\phi}{H_1}$ 是没有

经过 ω -变形情况下的Rasheed-Larsen解所对应的规范势和它的对偶. 此处及以后, 将用下标RL标记当 $\omega=0$ 时Rasheed-Larsen黑洞解所对应的物理量, 不再一一赘述. 在上面的公式中, 引入了如下的简略记号:

$$\omega_1 = \sqrt{q} \gamma_q \left(r - m + \frac{p}{2} \right) - \frac{\gamma_p q^{3/2}}{2m} a \cos \theta,$$

$$\omega_3 = \sqrt{p} \gamma_p \left(r - m + \frac{q}{2} \right) + \frac{\gamma_q p^{3/2}}{2m} a \cos \theta,$$

$$\omega_2 = \sqrt{p} \gamma_p \left\{ \left[r^2 + (q-2m)r + a^2 + \frac{q(p-2m)(q-2m)}{2(p+q)} \right] \times \cos \theta - \frac{aq\gamma_p \gamma_q}{2m} \right\} - \frac{\sqrt{p} \gamma_q (pr - mp + 2m^2)}{2m} a \sin^2 \theta,$$

$$\omega_4 = \sqrt{q} \gamma_q \left\{ \left[r^2 + (p-2m)r + a^2 + \frac{p(p-2m)(q-2m)}{2(p+q)} \right] \times \cos \theta - \frac{ap\gamma_p \gamma_q}{2m} \right\} - \frac{\sqrt{q} \gamma_p (qr - mq + 2m^2)}{2m} a \sin^2 \theta.$$

将电磁规范势(5)式代入由拉氏量(1)式所导出的Einstein场方程, Maxwell场方程和dilaton标量场方程中, 发现所有的场方程的确能得到满足.

上面所给出的解是 ω -变形的KK超引力理论中同时包含有电荷和磁荷、最一般的转动轴对称渐近平

直黑洞解, 其中的参数 $p \geq 2m$ 和 $q \geq 2m$. 当 $p=q=2m$ 时, 它就是熟知的4维 Kerr 黑洞解. 当 $\omega=0$ 时, 上述解就回到 Rasheed^[4] 和 Larsen^[5] 给出的转动双荷黑洞解^[8]. 当 $a=0$ 时, 上述解对应于文献[12]中当宇宙学常数为零时给出的静态双荷黑洞解, 两者的差别在于电磁势相差一个规范变换.

2 黑洞热力学性质

在本节中, 研究 ω -变形的 KK 超引力理论中转动双荷黑洞解的热力学性质. 此黑洞的事件视界由方程 $\Delta(r_+) = r_+^2 - 2mr_+ + a^2 = 0$ 决定. 容易计算出, 外视界面上的黑洞熵、Hawking 温度和视界角速度的表达式如下:

$$S = \pi\omega(r_+), \quad T = \frac{1}{4\pi\omega(r_+)} \left. \frac{\partial\Delta(r)}{\partial r} \right|_{r=r_+}, \quad \Omega = \frac{a}{\omega(r_+)}. \quad (7)$$

显而易见, 它们与没有作 ω -变形时的表达式完全一致.

类似地, 可以由电磁势及其 Hodge 对偶通过标准的计算方法得出静电势和静磁势的表达式如下:

$$\Phi = -\Phi_{RL} \cos \omega + \Psi_{RL} \sin \omega, \quad (8)$$

$$\Psi = \Phi_{RL} \sin \omega + \Psi_{RL} \cos \omega, \quad (9)$$

式中, $\Phi_{RL} = \sqrt{p}\gamma_q(pr - mp + 2m^2)/2m\omega(r_+)$ 和 $\Psi_{RL} = \sqrt{q}\gamma_p(qr - mq + 2m^2)/2m\omega(r_+)$.

下面我们来计算黑洞的质量、角动量、电荷和磁荷这些守恒量. 考虑线元和电磁规范势在无穷远处有如下的渐近行为:

$$\begin{aligned} ds^2 &\approx \left(-1 + \frac{p+q}{2r} + \dots\right) dt^2 - \frac{\sqrt{pq}(pq+4m^2)}{m(p+q)r} a \sin^2 \theta d\theta d\phi \\ &\quad + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= \left(-1 + \frac{2M}{r} + \dots\right) dt^2 - \frac{4J}{r} \sin^2 \theta d\theta d\phi + dr^2 \\ &\quad + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \\ A_{RL} &\approx \frac{\sqrt{q}\gamma_q}{r} dt + \sqrt{p}\gamma_p \cos \theta d\phi = \frac{4Q_{RL}}{r} dt + 4P_{RL} \cos \theta d\phi, \\ \tilde{A}_{RL} &\approx \frac{\sqrt{p}\gamma_p}{r} dt - \sqrt{q}\gamma_q \cos \theta d\phi = \frac{4P_{RL}}{r} dt - 4Q_{RL} \cos \theta d\phi. \end{aligned}$$

可以得出黑洞的质量 M 、角动量 J 、电荷 Q 和磁荷 P 的如下表达式:

$$M = \frac{p+q}{4}, \quad J = \frac{a(pq+4m^2)\sqrt{pq}}{4m(p+q)}, \quad (10)$$

$$Q = -Q_{RL} \cos \omega + P_{RL} \sin \omega, \quad P = Q_{RL} \sin \omega + P_{RL} \cos \omega, \quad (11)$$

其中, $Q_{RL} = \frac{\sqrt{q}\gamma_q}{4}$, $P_{RL} = \frac{\sqrt{p}\gamma_p}{4}$. 需指出的是, 上述黑洞的质量和角动量亦可以用 Komar 公式计算出来, 并且该质量与 ADM 质量和 Komar 质量完全一致; 电磁荷也可以用相应的公式通过计算面积分而得到.

最后, 可以验证上述外视界上的热力学量和黑洞的守恒荷满足下列热力学第一定律和 Smarr 公式:

$$\begin{aligned} dM &= T dS + \Omega dJ + \Phi dQ + \Psi dP \\ &= T dS + \Omega dJ + \Phi_{RL} dQ_{RL} + \Psi_{RL} dP_{RL}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} M &= 2TS + 2\Omega J + \Phi Q + \Psi P \\ &= 2TS + 2\Omega J + \Phi_{RL} Q_{RL} + \Psi_{RL} P_{RL}. \end{aligned} \quad (13)$$

由上述各式可以看出, ω -变形参数出现在电磁荷、静电势和静磁势之间的电磁对偶转动变换之中, 而对温度、黑洞熵、视界角速度、质量和角动量没有影响. 此外, 如果将外视界换成内视界, 则有类似的热力学第一定律的微分形式和积分形式.

3 结论

本文构造了 ω -变形的 KK 超引力理论中新的转动双荷黑洞解, 计算出该黑洞外视界上的热力学量和黑洞的守恒荷, 并验证它们的确满足黑洞热力学第一定律的积分形式和微分形式. 结果表明, ω -变形参数只出现在电磁规范势及其对偶、电磁荷、静电势和静磁势之间的电磁对偶转动变换之中, 而对其他热力学量没有影响. 由本文和文献[12]的工作可以预期, 一旦给出了 Rasheed-Larsen 转动双荷黑洞在带有宇宙学常数情形的推广解, 则容易构造出它在 ω -变形的 KK 规范超引力理论中对应的黑洞解.

参考文献

- 1 Duff M J, Nilsson B E W, Pope C N. Kaluza-Klein supergravity. Phys Rep, 1986, 130: 1-142
- 2 Frolov V P, Zelnikov A I, Bleyer U. Charged rotating black hole from five dimensional point of view. Ann Phys, 1987, 499: 371-377
- 3 Gibbons G W, Wiltshire D L. Black holes in Kaluza-Klein theory. Ann Phys, 1986, 167: 201-223

- 4 Rasheed D. The rotating dyonic black holes of Kaluza-Klein theory. Nucl Phys B, 1995, 454: 379–401
- 5 Larsen F. Rotating Kaluza-Klein black holes. Nucl Phys B, 2000, 575: 211–230
- 6 Emparan R, Horowitz G T. Microstates of a neutral black hole in M theory. Phys Rev Lett, 2006, 97: 141601
- 7 Horowitz G T, Roberts M M. Counting the microstates of a Kerr black hole. Phys Rev Lett, 2007, 99: 221601
- 8 Emparan R, Maccarrone A. Statistical description of rotating Kaluza-Klein black holes. Phys Rev D, 2007, 75: 084006
- 9 Cvetič M, Duff M J, Hoxha P, et al. Embedding AdS black holes in ten and eleven dimensions. Nucl Phys B, 1999, 558: 96–126
- 10 de Wit B, Nicolai H. $N=8$ supergravity. Nucl Phys B, 1982, 208: 323–364
- 11 Dall'Agata G, Inverso G, Trigiante M. Evidence for a family of $SO(8)$ gauged supergravity theories. Phys Rev Lett, 2012, 109: 201301
- 12 Lü H, Pang Y, Pope C N. An ω deformation of gauged STU supergravity. J High Energy Phys, 2014, (4): 175
- 13 Wu S Q, Li S L. Thermodynamics of static dyonic AdS black holes in the ω -deformed Kaluza-Klein gauged supergravity theory. Phys Lett B, 2015, 746: 276–280
- 14 Lü H, Pang Y, Pope C N. AdS dyonic black hole and its thermodynamics. J High Energy Phys, 2013, (11): 33
- 15 Anabalón A, Astefanesei D. Black holes in ω -deformed gauged $N=8$ supergravity. Phys Lett B, 2014, 732: 137–141

Rotating dyonic black hole in the ω -deformed Kaluza-Klein supergravity and its thermodynamics

WU Di, WU ShuangQing & YANG ShuZheng

Institute of Theoretical Physics, College of Physics and Space Science, China West Normal University, Nanchong 637002, China

Generalizing the Rasheed-Larsen's rotating dyonic black hole solution to the four-dimensional ω -deformed KK supergravity theory, we have constructed a new solution of the rotating dyonic black hole to this ω -deformed theory and investigated its thermodynamic properties. It is considered that, besides a duality rotation needs doing simultaneously between the electromagnetic gauge potential 1-form and its dual, between electric and magnetic charges, and between electric-static and magnetic-static potentials, the ω -deformation parameter has no effect on the metric, the ADM mass, the angular momentum, the first law of black hole thermodynamics, and the Smarr formula.

ω -deformed Kaluza-Klein supergravity, rotating dyonic black hole, black hole thermodynamics

doi: 10.1360/N972015-00876