论文

普适单体偏振高维量子态么正操作的光学实现

林青*

华侨大学厦门校区信息学院, 厦门 361021

*联系人, E-mail: qlin@hqu.edu.cn

收稿日期: 2013-07-08; 接受日期: 2013-08-29

国家自然科学基金(批准号: 11005040)、福建省新世纪优秀人才计划(编号: 2012FJ-NCET-ZR04)和华侨大学中青年教师科研提升资助计划(编号: ZQN-PY113)资助项目

摘要 如何有效地实现高维量子态的制备和操控是量子信息科学研究的一个热点, 我们在光学领域, 基于线性光学技术和交叉相位调制技术, 利用偏振高维量子态与单光子空间高维量子态的纠缠操作, 实现这两类高维量子态之间的相互转换. 由此, 利用单光子空间高维量子态么正操作的易实现性, 可以间接实现偏振高维量子态的么正操作. 这一实现模式超越以往只适用于三维量子态操作的限制, 适用于任意维度的单体高维量子态操作, 可为高维量子态的深入研究提供一定的便利.

关键词 高维量子态, 交叉相位调制, 普适么正操作

PACS: 03.67.Lx, 42.50.Ex, 42.50.Dv

doi: 10.1360/N132013-00027

量子信息相较经典信息而言, 最大的特色在于量子态的叠加性质以及量子纠缠的存在. 除此之外, 量子态还存在着高维形式, 即通过适当的编码方式, 每个量子态所能存储的信息量可以超过 1 个比特. 因此, 高维量子态显示出很强的信息存储能力, 同时高维量子态应用于计算系统能够达到提高计算速度的目的^[1,2], 并且应用于通讯领域, 也能够提供更快速、更安全的量子通讯^[3-9], 因此高维量子态的制备以及相关的操作吸引了人们的关注.

高维量子态可以采用非常多种的编码方式, 例如在光学系统中, 可以通过空间模式(Spatial Mode)^[10], 轨道角动量(Orbital Angular Momentum)^[11,12], 像素(Pixel)^[13-15], 能量-时间(Energy-time or Time-bin)^[16,17],

偏振(Polarization)^[18-32]等方式来编码. 由于光子偏振相比其他自由度而言, 在对抗噪声方面显示出很强的优势性, 因此我们在此仅研究以多光子偏振编码的高维量子态. 一个任意 n 维的量子态需要 $n-1$ 个光子来编码, 用竖直偏振 $|V\rangle$ 的光子数(假设为 j , 且 $j=0, \dots, n-1$)来表示量子态的维数, 其定义可以写成

$$|j\rangle_n \equiv |(n-j-1)H, jV\rangle \\ = \left(1/\sqrt{(n-j-1)!j!}\right) a_H^{\dagger(n-j-1)} a_V^{\dagger(j)} |0\rangle.$$

其中 $a_H^\dagger, a_V^\dagger$ 分别代表偏振 $|H\rangle, |V\rangle$ 的产生算符, $|0\rangle$ 代表真空态.

以多光子偏振来编码的高维量子态有一个非常重要的特点, 所有光子具有完全相同的时间空间自

引用格式: 林青. 普适单体偏振高维量子态么正操作的光学实现. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2014, 44: 317–325

Lin Q. Optical realization of universal unitary operation of single partite polarization encoded qudit (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2014, 44: 317–325, doi: 10.1360/N132013-00027

由度(Spatial-Temporal Mode),也就是在时间空间上无法把这些光子区分开来的. 由此,对于高维量子态的操作显得尤为困难,无法对每一个光子进行独立的操作. 到目前为止,仅使用线性光学器件,可以对三维的量子态进行有限的单体么正操作^[26],或者以很低的概率实现普适三维么正操作^[28]. 而如果使用交叉克尔非线性相互作用,普适三维么正操作的实现概率可以提高到 1/12. 然而,此前的方法仅仅适用于三维量子态的么正操作实现,无法推广到更高维量子态操作的情形.

到目前为止,对于更高维量子态,如何进行操作仍是悬而未决的问题. 在此,我们将利用偏振高维量子态与单光子空间高维量子态的纠缠,将偏振高维量子态转换为单光子空间高维量子态,进而对单光子高维量子态施加相应的么正操作,最后再将单光子高维量子态转换为偏振高维量子态,以完成偏振高维量子态么正操作的实现.

1 任意单光子空间高维量子态

如上所述,高维量子态可以采用光子的空间模式,即路径来编码. 这样的一个高维量子态只需要一个光子即可,而这个光子的不同空间模式数目也就代表了不同的维度. 例如,5 维量子态对应一个光子的 5 个不同路径. 对于任意单光子 n 维空间量子态而言,可以表示成如下的形式:

$$\alpha_0|0\rangle_s + \alpha_1|1\rangle_s + \cdots + \alpha_{n-1}|n-1\rangle_s = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i |i\rangle_s. \quad (1)$$

其中 $0, 1, \dots, n-1$ 代表光子路径,而下标 s 代表这是以空间模式编码的高维量子态,与后面偏振编码的量子态区分开来. 上式中系数满足归一化条件 $\sum_{i=0}^{n-1} |\alpha_i|^2 = 1$.

这一单光子高维量子态的制备非常简单,此前已有详细论述(见文献[30,31,33]),在此不再重复.

2 高维偏振量子态与单光子高维量子态的纠缠

我们的思路是借助单光子高维量子态么正操作的易实现性来实现偏振高维量子态的么正操作. 而在实现过程中,首先需要将目标偏振高维量子态与

辅助单光子高维量子态纠缠起来,而这样的纠缠操作可以借助交叉相位调制技术(Cross Phase Modulation)实现. 所谓的交叉相位调制技术是基于一种非线性光学相互作用,简单的说,可以让一个光子数态(Fock 态) $|n\rangle$ 与一束相干光 $|\alpha\rangle$ 在非线性克尔介质中产生相互作用,那么可以获得如下的量子态:

$$|n\rangle|\alpha\rangle \rightarrow |n\rangle|\alpha e^{in\theta}\rangle. \quad (2)$$

其中相干光所获得的相位 $n\theta$ 依赖于光子数态的光子数. 以这样的弱交叉克尔非线性效应(Weak Cross-Kerr Nonlinearity)为基础发展起来的交叉相位调制技术在光学量子信息过程中有着广泛的应用. 例如,可以实现确定且高效的量子逻辑门、量子计算^[34-37], 各类纠缠态的制备^[38-42]、有效的纠缠浓缩^[43-47]、量子随机行走等^[48-50]. 而这样的技术可以预警式地让偏振高维量子态与同维度的单光子高维量子态纠缠起来,其实现方式如图 1 所示. 这一实现方式在此前的工作中已有详细论述^[31], 这里仅简单描述. 假设输入偏振高维量子态为 $\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i |i\rangle_n$, 其中下标 n 表示这一量子态

图 1 (网络版彩图)偏振高维量子态与单光子高维量子态的纠缠子^[31]

让偏振高维量子态通过偏振分束器后的一个空间模式以及单光子高维量子态的各个空间模式,与辅助相干光产生交叉克尔非线性相互作用,利用交叉相位调制可以有效地实现所需要的纠缠,相应的成功概率为 $1/n$,与维数成反比

Figure 1 (Color online) Entangler of polarization encoded qudit and single photon qudit [31]. After letting one of the spatial modes of the polarization encoded qudit and the spatial mods of single photon qudit interact with the ancilla coherent states as indicated in the figure through the cross-Kerr nonlinearity, the entangled state of polarization encoded qudit and single photon qudit could be generated with the corresponding success probability $1/n$.

是以多光子偏振来编码的, 与式(1)的空间模式编码区分开, 同时系数满足归一化条件 $\sum_{i=0}^{N-1} |\beta_i|^2 = 1$. 那么这样的偏振高维量子态与式(1)的单光子高维量子态同时输入图 1 所示的装置后, 能够以 $1/n$ 的成功概率获得我们期望的纠缠态:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \beta_i |i\rangle_s |i\rangle_n.$$

需要指出的是, 这样的实现是预警式的, 而不是基于后验选择. 也就是通过对辅助相干光探测可以知道操作成功与否, 不会破坏信号光本身. 不需要如后验选择一样通过对信号光的破坏性探测来确认成功与否. 为了描述方便, 我们将这一操作称之为纠缠子 (Entangler- n , n 代表 n 维纠缠子).

3 特殊单体三维么正操作的实现

借助图 1 的纠缠子操作, 我们首先从一类特殊单体三维量子态么正操作的实现开始, 然后给出普适单体三维量子态么正操作的实现, 最后将这一实现方式推广到任意维度偏振量子态的么正操作实现. 特殊的单体三维量子态么正操作实现过程如图 2 所示.

假设被操作的单体偏振三维量子态为 $|\psi_1\rangle = \beta_0 |0\rangle_3 + \beta_1 |1\rangle_3 + \beta_2 |2\rangle_3$. 首先利用一对半波片和四分之一波片对量子态进行直接的单光子么正操作

$$U(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix},$$

由于偏振量子态的两个光子在时空上是不可区分的, 因此相同的单光子么正操作将同时作用在两个光子上, 可以实现如下的三维么正变换:

$$\begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & -e^{-i\phi} \sin \theta / \sqrt{2} & e^{-i2\phi} \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi} \sin \theta / \sqrt{2} & \cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta / \sqrt{2} \\ e^{i2\phi} \sin^2 \frac{\theta}{2} & -e^{i\phi} \sin \theta / \sqrt{2} & \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

假设操作后量子态变为 $|\psi'_1\rangle = \beta'_0 |0\rangle_3 + \beta'_1 |1\rangle_3 + \beta'_2 |2\rangle_3$. 接着引入辅助单光子三维量子态 $(|0\rangle_s + |1\rangle_s + |2\rangle_s) / \sqrt{3}$, 与偏振量子态一起通过纠缠子, 那么我们将以 $1/3$ 的概率获得如下的归一化量子态:

$$\beta'_0 |0\rangle_3 |0\rangle_s + \beta'_1 |1\rangle_3 |1\rangle_s + \beta'_2 |2\rangle_3 |2\rangle_s. \quad (4)$$

对于引入的辅助单光子量子态可以进行普适么

图 2 (网络版彩图)特殊单体三维量子态么正操作的实现 对偏振量子态进行单光子么正操作之后, 让它与一个辅助单光子量子态通过三维纠缠子, 产生纠缠. 随后让单光子量子态的各个空间模式经过一定透射率的透射镜和相位片, 再通过左上角所示的多端口干涉仪进行单光子 Fourier 变换. 接着对单光子量子态进行测量, 利用经典前馈技术对经过两个偏振分束器构成的干涉仪的偏振量子态进行相位操作. 最后再对剩下的偏振量子态进行单光子么正操作后即可实现一类特殊的三维么正操作

Figure 2 (Color online) The realization of special single qutrit unitary operation. After a single photon unitary operation has been performed on the polarization encoded qutrit, the polarization encoded qutrit is transmitted through an entangler, associated with an ancilla single photon qutrit. Then let the spatial modes of single photon qutrit pass through the transmitting mirrors, phase shifts and the linear optical multi-port interferometer which performs the Fourier transformation (LOMI-F). After that, use photon number non-resolving detectors (PNNDs) to detect the single photon qutrit, and the detections are used to control the phase shifts through the classical feed-forward. Finally, one more single photon unitary operation performed on the polarization encoded qutrit could complete the realization of special single qutrit unitary operation.

正操作. 但是偏振量子态和单光子量子态是纠缠在一起的, 并且最终需要对单光子量子态进行探测, 与偏振量子态分离开. 而对于单光子量子态的探测结果无法控制, 即便通过经典前馈(Classical Feed-Forward)技术也会因为对偏振量子态的操作有限而无法很好地完成. 因此我们选择对单光子量子态进行如下的操作:

$$\text{diag}\{t_1 e^{i\phi_1}, t_2 e^{i\phi_2}, t_3 e^{i\phi_3}\}. \quad (5)$$

其中 $0 \leq t_1, t_2, t_3 \leq 1$ 相当于在不同的空间模式上加上一定透射率(假定为 t^2)的透射镜, 达到调整各项系数的目的. 当然, 这样的结果会在一定程度上降低成功概率, 但是可以有效地控制操作的实现. 例如选择 $t_1 = t_3 = 1, t_2 = 0$, 且 $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$, 那么实现的操作即为文献[26]中所能实现的操作, 显然调整不同的参数能够实现比文献[26]更多的操作.

经过式(5)的操作后, 假设量子态归一化后写成形式 $|\psi''\rangle = \beta_0''|0\rangle_3|0\rangle_s + \beta_1''|1\rangle_3|1\rangle_s + \beta_2''|2\rangle_3|2\rangle_s$. 我们还需要将单光子量子态去掉, 为了保持量子态的叠加性质, 我们利用图 2 上方框图内的线性光学多端口干涉仪(LOMI-linear Optical Multiport Interferometer)^[51] 实现如下的 Fourier 变换:

$$|j\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{k=0}^2 e^{2\pi i j k / 3} |k\rangle_s. \quad (6)$$

其中 j, k 代表空间模式. 这一多端口干涉仪可以确定性地实现普适单光子三维么正操作. 它由 50:50 分束器和相位片构成, 可以通过不同的相位片实现不同的么正操作^[51]. 经过上述的 Fourier 变换, 可以获得如下的量子态:

$$\begin{aligned} & \left[(\beta_0''|0\rangle_3 + \beta_1''|1\rangle_3 + \beta_2''|2\rangle_3)|0\rangle_s \right. \\ & + (\beta_0''|0\rangle_3 + e^{2\pi i / 3} \beta_1''|1\rangle_3 + e^{4\pi i / 3} \beta_2''|2\rangle_3)|1\rangle_s \\ & \left. + (\beta_0''|0\rangle_3 + e^{4\pi i / 3} \beta_1''|1\rangle_3 + e^{2\pi i / 3} \beta_2''|2\rangle_3)|2\rangle_s \right] / \sqrt{3}. \end{aligned} \quad (7)$$

随后对不同的空间模式进行探测, 这一测量可以用常用的非计数单光子探测器 (Photon Number Non-resolving Detector, PNND) 完成. 如果探测结果为 $|0\rangle_s$, 即光子从路径 0 出射, 就可以获得经过操作后的偏振三维量子态. 如果探测结果为 $|1\rangle_s$, 那么让偏振量子态通过两个偏振分束器构成的干涉仪, 并在上一个路径放置一个 $4\pi/3$ 的相位片, 由于 $|0\rangle_3$ 态两个 H 偏振光子不从上一个路径走, 不引入附加相位; $|1\rangle_3$ 态的一个 V 偏振光子从上一个路径走, 获得 $4\pi/3$ 附加相位与其本身相位平衡; $|2\rangle_3$ 态两个 V 偏振光子都从上一个路径走, 获得 $8\pi/3$ 的附加相位, 也与自身的相位平衡. 同样的, 如果探测结果为 $|2\rangle_s$, 就在偏振量子态的上一个路径放置一个 $2\pi/3$ 的相位片也能达到平衡各项相位的目的. 因此根据对单光子量子态各个空间模式的探测结果, 利用经典前馈技术对偏振量子态进行相应的相位操作就可以去掉辅助单光子, 而不破坏偏振量子态的叠加性质.

去掉辅助单光子之后, 还可以对偏振量子态进行式(3)所示的么正操作, 这样总的操作将由两个不同参数的式(3)操作和式(5)操作构成. 这一总的操作将包含 10 个参数, 要高于普适三维么正操作的 8 个参数, 但是作用在偏振量子态上的变换(式 3)具有一定的限制性, 因此实际上能够实现的么正操作也具有一定的局限性, 不能包括普适么正操作. 当然, 其

成功概率相对较高, 由纠缠子的概率以及三个透射镜的透射率决定. 如果透射率均为 1, 那么总概率即为 $1/3$, 因而特殊三维么正操作的概率高于文献[28]的方案.

4 普适单体三维么正操作的实现

上述的么正操作实现具有一定的局限性, 而我们希望能够实现普适么正操作. 实际上, 借助对单光子三维量子态的么正操作能够间接实现偏振三维量子态的么正操作, 这一方法在文献[28]中得以应用. 而在此考虑其扩展性, 我们重新设计一种实现方案, 如图 3 所示. 假定需要实现的普适么正操作为 U , 那么首先利用第一个纠缠子将一个单体偏振三维量子态和单光子三维量子态纠缠起来, 获得与式(4)形式一致的量子态. 接着对偏振量子态部分进行式(3)的变换(令 $\phi = 0$), 将获得如下的量子态:

$$\begin{aligned} & \beta_0 \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} |0\rangle_3 - \sin \theta / \sqrt{2} |1\rangle_3 + \sin^2 \frac{\theta}{2} |2\rangle_3 \right) |0\rangle_s \\ & + \beta_1 \left(-\sin \theta / \sqrt{2} |0\rangle_3 + \cos \theta |1\rangle_3 - \sin \theta / \sqrt{2} |2\rangle_3 \right) |1\rangle_s \\ & + \beta_2 \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} |0\rangle_3 - \sin \theta / \sqrt{2} |1\rangle_3 + \cos^2 \frac{\theta}{2} |2\rangle_3 \right) |2\rangle_s. \end{aligned} \quad (8)$$

随后对偏振量子态进行测量, 其测量如图 3 上方框图所示. 先让偏振量子态通过一个偏振分束器, 如果偏振量子态分别处于 $|0\rangle_3, |1\rangle_3, |2\rangle_3$, 那么在分束器的上一个输出端口分别有 2, 1, 0 个光子出射. 通过对这一个端口的光子进行确切计数, 就能够将三种偏振量子态区分开. 实际上, 这样的测量是一种非破坏性光子计数, 在文献[37]中提出, 利用如图所示的交叉相位调制技术, 能够以非常高的保真度实现确切的光子计数.

通过上述的测量, 可以将式(8)的量子态塌缩到不同的状态. 假定测量结果显示偏振量子态处于 $|0\rangle_3$ 态, 那么可以获得未归一化量子态:

$$\beta_0 \cos^2 \frac{\theta}{2} |0\rangle_s - \beta_1 \sin \theta / \sqrt{2} |1\rangle_s + \beta_2 \sin^2 \frac{\theta}{2} |2\rangle_s. \quad (9)$$

如果结果为 $|1\rangle_3$, 则为

$$-\beta_0 \sin \theta / \sqrt{2} |0\rangle_s + \beta_1 \cos \theta |1\rangle_s - \beta_2 \sin \theta / \sqrt{2} |2\rangle_s. \quad (10)$$

如果结果为 $|2\rangle_3$, 则为

$$\beta_0 \sin^2 \frac{\theta}{2} |0\rangle_s - \beta_1 \sin \theta / \sqrt{2} |1\rangle_s + \beta_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} |2\rangle_s. \quad (11)$$

显然, 由于式(3)变换的局限性, 其引入的附加系数

(除开未知的系数 $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ 外)不可能保持一致, 这样就无法获得一个纯粹的与初始偏振三维量子态对应的单光子高维量子态. 为此, 我们只能选择一个最优的参数, 使得式(9)–(11)中的所有附加参数的最小值取最大值, 即满足:

$$\max_{\theta} \min \left\{ \sin^2 \frac{\theta}{2}, |\sin \theta|/\sqrt{2}, \cos^2 \frac{\theta}{2}, |\cos \theta| \right\}. \quad (12)$$

这样才能使得成功概率尽可能的高. 容易计算, 当 $\theta/2 = \cos^{-1}(\sqrt{3}/3)$ 时, 上式取值 $1/3$. 以式(9)为例, 此时量子态为

$$(\beta_0 |0\rangle_s - 2\beta_1 |1\rangle_s + 2\beta_2 |2\rangle_s)/3. \quad (13)$$

为了平衡各项附加的参数, 我们可以在单光子量子态的路径 1 上加上一个 π 的相位片(上述三种情况都需要这个相位片), 并在路径 1, 2 上加上透射率 $t^2=1/4$ 的透射镜(通过经典前馈技术来控制是否增加透射镜, 如图 3 所示), 最终就能获得所需要的单光子量子态 $\beta_0 |0\rangle_s + \beta_1 |1\rangle_s + \beta_2 |2\rangle_s$, 也就完成了偏振三维量子态到单光子三维量子态之间的变换. 而如果我们获得式(10)或(11)的量子态, 那么也可以进行类似的操作完成上述的变换. 这一变换的总体概率为 $1/9$, 低于此前的方案^[28], 但是在下一节可以看到这一方案可以推广到任意维的量子态转换.

在获得对应的单光子量子态后, 可以通过一个线性光学多端口干涉仪确定性地实现期望的普适三维么正操作 U . 当然, 到此我们虽然实现了么正操作 U , 但是此时的量子态是以空间模式为编码的, 因此还需要转换成偏振编码模式的量子态. 在文献^[28]中也有针对单光子三维量子态转换为偏振三维量子态的实现方式, 同样的那一实现方式也很难直接推广到高维的情况, 即便其概率较高. 而在此, 我们利用第二个纠缠子, 将上述所获得的单光子三维量子态与一个辅助三维偏振量子态 $|\psi_2\rangle = (|0\rangle_3 + |1\rangle_3 + |2\rangle_3)/\sqrt{3}$ 纠缠起来, 获得如下的量子态:

$$\beta'_0 |0\rangle_3 |0\rangle_s + \beta'_1 |1\rangle_3 |1\rangle_s + \beta'_2 |2\rangle_3 |2\rangle_s. \quad (14)$$

这里的系数 $\beta'_0, \beta'_1, \beta'_2$ 是经过么正操作 U 后的系数. 同样的, 如果我们能够将不需要的单光子量子态去掉而不破坏量子态的叠加性质即可获得所需要的量子态. 与图 2 一样, 通过对单光子量子态进行 Fourier 变换, 再由探测结果对偏振量子态进行相位控制即可实现, 也就可以获得理想的量子态, 完成了对偏振

图 3 (网络版彩图) 普适单体三维量子态么正操作的实现 偏振量子态与辅助单光子量子态通过纠缠子纠缠起来后, 对偏振量子态进行单光子么正操作并随之测量. 测量过程由上方框图内装置完成, 依据探测结果在单光子量子态的不同空间模式上加上相应的透射镜以调整系数, 完成偏振量子态到单光子量子态的转换. 随后利用多端口干涉仪完成所需的么正操作 U . 然后, 引入一个辅助的偏振量子态与单光子量子态通过第二个纠缠子. 最后经过对单光子量子态的 Fourier 变换、测量以及对偏振量子态的控制相位操作即可完成任意单体三维么正操作的实现

Figure 3 (Color online) The realization of single qutrit universal unitary operation. After creating the entangled state of polarization encoded qutrit and ancilla single photon qutrit by an entangler, a single photon unitary operation is performed on the polarization encoded qutrit. Using the measurement results by the setups shown in the square to control the transmission factors of mirrors placed on the spatial modes of the single photon qutrit through classical feed-forward, the polarization encoded qutrits could be transformed to the corresponding single photon qutrit. The desired unitary operation U is then performed by a LOMI. After that, the single photon qutrit is entangled with an ancilla polarization encoded qutrit by using one more entangler. Then, one more LOMI is used to perform Fourier transformation on single photon qutrit. Finally, the realization of single qutrit unitary operation could be completed after measuring the single photon qutrit and using the measurement results to control the phase shifts performed on polarization encoded qutrit.

三维量子态的普适么正操作 U .

在上述的方案中, 用到了两个纠缠子操作, 并且转换过程还有一个系数平衡的需要, 因此整个方案的概率为 $1/27$, 不如此前的方案^[28]. 但我们将可以看到这一方案很容易可以推广到任意维的么正操作, 而此前的方案无法直接推广, 只适用于三维么正操作.

5 普适单体任意维么正操作的实现

上述的方案可以推广到任意维么正操作的实现, 其过程与图 3 类似, 只需要将辅助单光子量子态、纠缠子以及多端口干涉仪都换成 n 维的情形. 假设被操作的量子态为 $\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i |i\rangle_n$, 首先通过一个 n 维纠缠子

让它与一个辅助单光子高维量子态 $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} |i\rangle_s$ 纠缠起来, 以 $1/n$ 的概率获得归一化后的量子态 $\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i |i\rangle_n |i\rangle_s$.

接着也需要先把偏振量子态去掉, 与三维量子态的处理类似, 对偏振量子态的每个光子进行同一单光子么正操作 $U(\theta, 0)$, 那么每一个偏振量子态 $|j\rangle_n$ 将如下演化:

$$\begin{aligned}
 |j\rangle_n &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{(n-j-1)!j!}} \left(\cos \frac{\theta}{2} a_H^\dagger + \sin \frac{\theta}{2} a_V^\dagger \right)^{(n-j-1)} \times \left(-\sin \frac{\theta}{2} a_H^\dagger + \cos \frac{\theta}{2} a_V^\dagger \right)^j |0\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(n-j-1)!j!}} \sum_{l=0}^{n-j-1} \sum_{m=0}^j C_{n-j-1}^l C_j^m (-1)^{j-m} \times \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{(n+m-j-l-1)} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{(j+l-m)} a_H^{\dagger(n-m-l-1)} a_V^{\dagger(l+m)} |0\rangle \\
 &= \sqrt{(n-j-1)!j!} \sum_{l=0}^{n-j-1} \sum_{m=0}^j \frac{\sqrt{(n-m-l-1)!(l+m)!}}{(n-j-l-1)!(j-m)!m!l!} \times (-1)^{(j-m)} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{(n+m-j-l-1)} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{(j+l-m)} |l+m\rangle_n \\
 &= \frac{\sqrt{(n-1)!}}{\sqrt{(n-j-1)!j!}} (-1)^j \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{(n-j-1)} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^j |0\rangle_n + \left(\frac{\sqrt{(n-2)!j}}{\sqrt{(n-j-1)!(j-1)!}} (-1)^{(j-1)} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{(n-j)} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{(j-1)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sqrt{(n-2)!(n-j-1)}}{\sqrt{(n-j-2)!j!}} (-1)^j \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{(n-j-2)} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{(j+1)} \right) |1\rangle_n + \dots
 \end{aligned} \tag{15}$$

这一变换也存在很强的局限性, 因此也需要选择一个最优的参数, 使得变换所附加的系数绝对值的最小值取最大值, 即

$$\max_{\theta} \min \left\{ \frac{\sqrt{(n-1)!}}{\sqrt{(n-j-1)!j!}} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|^{(n-j-1)} \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|^j, \dots \right\}. \tag{16}$$

实际上, 式(16)很容易通过数值计算获得, 如表 1 我们列出三维到八维的最优参数、最大值, 以及对应的成功概率.

接着, 再利用对偏振量子态的探测结果来控制, 在不同的路径上附加一定透射率的透射镜和相位片, 最终使得附加的系数保持一致, 也就将任意维的偏振量子态转换为对应的单光子高维量子态. 相应的成功概率将由纠缠子的概率以及上述系数的调整带来的概率决定.

在完成偏振高维量子态到单光子高维量子态的转换后, 期望的普适么正操作可以通过多端口干涉仪作用到单光子高维态上来实现. 假设经过么正操作后, 获得的单光子量子态为 $\sum_{i=0}^{n-1} \beta'_i |i\rangle_s$. 那么最后, 我们也还需要将这一单光子量子态再转换回偏振量子态. 类似的, 利用一个纠缠子, 将单光子量子态与

一个辅助偏振高维量子态 $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} |i\rangle_n$ 纠缠起来, 也就可以获得量子态 $\sum_{i=0}^{n-1} \beta'_i |i\rangle_n |i\rangle_s$. 随后, 在利用一个多端口干涉仪实现对单光子量子态的 n 维 Fourier 变换:

$$|j\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i j k / n} |k\rangle_s. \tag{17}$$

再对单光子量子态进行探测. 依据探测结果对经过两个偏振分束器构成的干涉仪的偏振量子态进行相位调制, 就能完成整个么正操作的实现.

表 1 不同维度对应的最优参数 $\theta/2$, 最大值和成功概率
Table 1 The corresponding optimal values, maximal values and success probability of different dimension

维度	最优参数	最大值	成功概率
3	0.9553	1/3	1/3
4	$\pi/4$	$1/2\sqrt{2}$	1/2
5	0.7104	0.1809	0.1636
6	$\pi/4$	$1/4\sqrt{2}$	3/16
7	0.7137	0.0787	0.0433
8	$\pi/4$	$1/8\sqrt{2}$	1/16

6 可行性分析与结论

利用交叉相位调制技术, 我们可以实现偏振高维量子态和单光子高维量子态的纠缠, 而这一纠缠操作与附加的单光子么正操作等结合, 可以实现偏振高维量子态与单光子高维量子态之间的相互转换, 也能够通过对单光子高维量子态的么正操作来间接实现对偏振高维量子态的么正操作. 我们的实现方案超越以往的方案, 能够适用于任意维度的量子态操作.

我们的方案采用了线性光学技术以及基于弱非线性交叉克尔相互作用的交叉相位调制技术. 量子信息科学发展至今, 线性光学技术已经非常成熟, 而交叉相位调制技术是基于弱非线性交叉克尔效应. 这一技术已经在量子信息方案中得到广泛的应用^[28,30-50].

虽然还没有在实验上验证非线性交叉克尔效应, 但是在理论上已经有很多的探讨. 在早期的工作中, 人们往往对光场采用理想的单模假设, 希望通过非线性介质实现三阶非线性效应, 直接在两个单光子之间引入一个 π 相位, 从而直接实现控制相位门^[52]. 但是光场实际上是无限模的, 不存在严格意义上的单模光场. 为探讨光场多模效应的问题, 人们尝试采用量子光场的方法来研究. 在 2006 年, Shapiro 指出, 考虑到单光子实际上多模的情况下, 任何具有延时响应的介质在实现非线性克尔效应时都伴随相位噪声, 从而造成保真度损失^[53,54]. 随后, Gea-Banacloche 指出, 即使使用瞬时相互作用的电磁感应透明(EIT)介质, 多模效

应的存在也无法获得高保真度的交叉相位^[55]. 一般情况下, 单光子存在无限模, 非线性相互作用使交叉相位的增大的同时, 必定使这些模之间的纠缠增大, 相应的保真度也会下降, 无法获得一个干净的 π 相位^[56]. 这些工作否定了强非线性克尔效应($\theta=\pi$)的实现可能性.

同时, 这些工作似乎也否定了弱非线性交叉克尔效应($\theta \ll 1$)的存在, 也就是(2)式的变换不能够有效地实现. 因为多模纠缠效应仍然存在, 甚至假设理想的单模光场存在的前提下, 上述变换仍然需要两个光场(单光子和相干光光场)之间产生相互作用, 由此仍然会出现多模纠缠效应^[57]. 最终使得非线性相互作用的结果不能写成(2)式的形式, 也就影响基于此的各类量子信息过程的实现.

但是, 利用量子光学的方法处理弱非线性问题时, 实际上没办法给出一个清晰的物理图像. 最近, 我们发现研究这一问题的最好方式是量子场论. 我们将所有光场描述成量子场, 利用量子场论来研究光场之间的相互作用. 我们利用点接触势(Point Contact Potential)的概念正确描述了电磁感应透明(EIT)介质中的非线性相互作用, 证明了即使多模效应存在的前提下, 基于 EIT 介质的弱非线性相互作用甚($\theta \ll 1$)至能够以完美的保真度实现^[57]. 由此也就能够以完美的保真度实现式(2)的变换, 这是基于弱非线性相互作用的量子信息过程体系的基础, 也在理论上证明了诸多方案^[28,30-50](包括本文方案)的可行性.

参考文献

- 1 Ralph T C, Resch K J, Gilchrist A. Efficient Toffoli gates using qudits. *Phys Rev A*, 2007, 75: 022313
- 2 Lanyon B P, Barbieri M, Almeida M P, et al. Simplifying quantum logic using higherdimensional Hilbert spaces. *Nat Phys*, 2009, 5: 134–140
- 3 Spekkens R W, Rudolph T. Degrees of concealment and bindingness in quantum bit commitment protocols. *Phys Rev A*, 2001, 65: 012310
- 4 Bruß D, Macchiavello C. Optimal eavesdropping in cryptography with three-dimensional quantum states. *Phys Rev Lett*, 2002, 88: 127901
- 5 Cerf N J, Bourennane M, Karlsson A, et al. Security of quantum key distribution using d-level systems. *Phys Rev Lett*, 2002, 88: 127902
- 6 Durt T, Cerf N J, Gisin N, et al. Security of quantum key distribution with entangled qutrits. *Phys Rev A*, 2004, 67: 012311
- 7 Terriza G M, Vaziri A, Řeháček J, et al. Triggered qutrits for quantum communication protocols. *Phys Rev Lett*, 2004, 92: 167903
- 8 Langford N K, Dalton R B, Harvey M D, et al. Measuring entangled qutrits and their use for quantum bit commitment. *Phys Rev Lett*, 2004, 93: 053601
- 9 Gröblacher S, Jennewein Y, Vaziri A, et al. Experimental quantum cryptography with qutrits. *New J Phys*, 2006, 8: 75
- 10 Żukowski M, Zeilinger A, Horne M A. Realizable higher-dimensional two-particle entanglements via multiport beam splitters. *Phys Rev A*, 1997, 55: 2564–2579
- 11 Mair A, Vaziri A, Weihs G, et al. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. *Nature(London)*, 2001, 412: 313–316
- 12 Vaziri A, Weihs G, Zeilinger A. Experimental two-photon, three-dimensional entanglement for quantum communication. *Phys Rev Lett*, 2002, 89: 240401
- 13 Neves L, Pádua S, Saavedra C. Controlled generation of maximally entangled qudits using twin photons. *Phys Rev A*, 2004, 69: 042305

- 14 Neves L, Lima G, Aguirre Gómez J G, et al. Generation of entangled states of qudits using twin photons. *Phys Rev Lett*, 2005, 94: 100501
- 15 O'Sullivan-Hale M N, Khan I A, Boyd R W, et al. Pixel entanglement: Experimental realization of optically entangled $d=3$ and $d=6$ qudits. *Phys Rev Lett*, 2005, 94: 220501
- 16 Thew R T, Acín A, Zbinden H, et al. Bell-type test of energy-time entangled qutrits. *Phys Rev Lett*, 2004, 93: 010503
- 17 De Riedmatten H, Marcikic I, Scarani V, et al. Tailoring photonic entanglement in high-dimensional Hilbert spaces. *Phys Rev A*, 2004, 69: R050304
- 18 Howell J C, Lamas-Linares A, Bouwmeester D. Experimental violation of a Spin-1 bell inequality using maximally entangled four-photon states. *Phys Rev Lett*, 2002, 88: 030401
- 19 Bogdanov Y I, Chekhova M V, Kulik S P, et al. Qutrit state engineering with biphotons. *Phys Rev Lett*, 2004, 93: 230503
- 20 Bogdanov Y I, Chekhova M V, Krivitsky L A, et al. Statistical reconstruction of qutrits. *Phys Rev A*, 2004, 70: 042303
- 21 Bogdanov Y I, Chekhova M V, Kulik S P, et al. Preparation of arbitrary qutrit state based on biphotons. *Proc SPIE*, 2005, 5833: 202–212
- 22 Moreva E V, Maslennikov G A, Straupe S S, et al. Realization of four-level qudits using biphotons. *Phys Rev Lett*, 2006, 97: 023602
- 23 Mikami H, Kobayashi T. Remote preparation of qutrit states with biphotons. *Phys Rev A*, 2007, 75: 022325
- 24 Vallone G, Pomarico E, De Martini F, et al. Experimental realization of polarization qutrits from nonmaximally entangled states. *Phys Rev A*, 2007, 76: 012319
- 25 Li Y M, Zhang K S, Peng K C, et al. Generation of qudits and entangled qudits. *Phys Rev A*, 2008, 77: 015802
- 26 Lanyon B P, Weinhold T J, Langford N K, et al. Manipulating biphotonic qutrits. *Phys Rev Lett*, 2008, 100: 060504
- 27 Joo J, Rudolph T, Sanders B C. A heralded two-qutrit entangled state. *J Phys B-At Mol Opt Phys*, 2009, 42: 114007
- 28 Lin Q, He B. Bi-directional mapping between polarization and spatially encoded photonic qutrits. *Phys Rev A*, 2009, 80: 062312
- 29 Halevy A, Megidish E, Shacham T, et al. Projection of two biphoton qutrits onto a maximally entangled state. *Phys Rev Lett*, 2011, 106: 130502
- 30 Lin Q. Efficient generation of arbitrary multi-partite polarized entangled qudits (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2012, 42: 842–851 [林青. 任意多体高维偏振纠缠态的有效制备. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2012, 42: 842–851]
- 31 Lin Q. Heralded generation of symmetric and asymmetric entangled qudits with weak cross-Kerr nonlinearity. *J Opt Soc Am B*, 2013, 30: 576–581
- 32 Ye X L, Lin Q. Heralded generation of asymmetric polarized entangled qutrits (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2013, 43: 626–633 [叶欣露, 林青. 非对称偏振三维纠缠态的预警制备. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2013, 43: 626–633]
- 33 Lin Q. Nearly-deterministic generation of spatial entangled qudits with weak cross-Kerr nonlinearity (in Chinese). *Acta Phys Sin*, 2010, 59: 2976–2981 [林青. 利用弱交叉克尔效应实现多光子任意高维空间纠缠态的确定性制备. *物理学报*, 2010, 59: 2976–2981]
- 34 Barrett S D, Kok P, Nemoto K, et al. Symmetry analyzer for nondestructive Bell-state detection using weak nonlinearities. *Phys Rev A*, 2005, 71: R060302
- 35 Nemoto K, Munro W J. Nearly deterministic linear optical controlled-NOT gate. *Phys Rev Lett*, 2004, 93: 250502
- 36 Lin Q, He B. Single-photon logic gates using minimal resources. *Phys Rev A*, 2009, 80: 042310
- 37 Lin Q, He B, Bergou J A, et al. Processing multiphoton states through operation on a single photon: Methods and applications. *Phys Rev A*, 2009, 80: 042311
- 38 He B, Ren Y H, Bergou J A. Creation of high-quality long-distance entanglement with flexible resources. *Phys Rev A*, 2009, 79: 052323
- 39 Lin Q, He B. Efficient generation of universal two-dimensional cluster states with hybrid systems. *Phys Rev A*, 2010, 82: 022331
- 40 Lin Q, He B. Weaving independently generated photons into an arbitrary graph state. *Phys Rev A*, 2011, 84: 062314
- 41 Lin Q, He B. Efficient graph state generation and operation error detection with a controlled-path gate. *J Phys B-At Mol Opt Phys*, 2013, 46: 055502
- 42 Lin Q. Efficient generation of multi-photon W state (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2012, 42: 54–60 [林青. 多光子 W 态的高效制备. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2012, 42: 54–60]
- 43 Sheng Y B, Deng F G, Zhou H Y. Efficient polarization-entanglement purification based on parametric down-conversion sources with cross-Kerr nonlinearity. *Phys Rev A*, 2008, 77: 042308
- 44 Sheng Y B, Deng F G, Zhou H Y. Nonlocal entanglement concentration scheme for partially entangled multipartite systems with nonlinear optics. *Phys Rev A*, 2008, 77: 062325
- 45 Sheng Y B, Deng F G. One-step deterministic polarization-entanglement purification using spatial entanglement. *Phys Rev A*, 2010, 82: 044305
- 46 Sheng Y B, Zhou L, Zhao S M, et al. Efficient single-photon-assisted entanglement concentration for partially entangled photon pairs. *Phys Rev A*, 2012, 85: 012307
- 47 Sheng Y B, Zhou L, Zhao S M. Efficient two-step entanglement concentration for arbitrary W states. *Phys Rev A*, 2012, 85: 042302
- 48 Wang C, Li Y S, Hao L. Optical implementation of quantum random walks using weak cross-Kerr media. *Chin Sci Bull*, 2011, 56: 2088–2091
- 49 Feng X B, Li Y, Qin Y, et al. Dependence of femtosecond time-resolved magneto-optical Kerr rotation on the direction of polarization of the probe beam. *Sci China Phys Mech Astron*, 2011, 54: 1411–1415
- 50 Wang T J, Lu Y, Long G L. Generation and complete analysis of the hyperentangled Bell state for photons assisted by quantum-dot spins in

optical microcavities. Phys Rev A, 2012, 86: 042337

- 51 Reck M, Zeilinger A, Bernstein H J, et al. Experimental realization of any discrete unitary operator. Phys Rev Lett, 1994, 73: 58–61
- 52 Lukin M D, Imamoglu A. Nonlinear optics and quantum entanglement of ultraslow single photons. Phys Rev Lett, 2000, 84: 1419–1422
- 53 Shapiro J H. Single-photon Kerr nonlinearities do not help quantum computation. Phys Rev A, 2006, 73: 062305
- 54 Shapiro J H, Razavi M. Continuous-time cross-phase modulation and quantum computation. New J Phys, 2007, 9: 16
- 55 Gea-Banacloche J. Impossibility of large phase shifts via the giant Kerr effect with single-photon wave packets. Phys Rev A, 2010, 81: 043823
- 56 He B, Scherer A. Continuous-mode effects and photon-photon phase gate performance. Phys Rev A, 2012, 85: 033814
- 57 He B, Lin Q, Simon C. Cross-Kerr nonlinearity between continuous-mode coherent states and single photons. Phys Rev A, 2011, 83: 053826

Optical realization of universal unitary operation of single partite polarization encoded qudit

LIN Qing^{*}

College of Information Science and Engineering, Huaqiao University (Xiamen), Xiamen 361021, China

How to generate and manipulate high dimensional quantum state is a hot topic in the area of quantum information processing. In the optical system, based on the technique of linear optics and cross phase modulation, we consider the realization of universal unitary operation of single partite polarization encoded qudit. Firstly, we introduce the spatially encoded qudit as ancilla, and the entangler of polarization encoded qudit and spatially encoded qudit as core element. After that, the realization of a special unitary operation for single qutrit is discussed by one entangler and the Fourier transformation performed on the spatially encoded qutrit by a linear optical multi-port interferometer (LOMI). The corresponding success probability could be high, but this scheme is only available for a special type of unitary operations and cannot be developed to realize higher dimensional unitary operation. For general qudit universal unitary operation realization, we use qutrit unitary operation as example. The polarization encoded qutrit could be transformed to spatially encoded qutrit by one entangler and the measurement of polarization encoded qutrit, associated with the measurement results are used to control the transmission factors of mirrors placed on the spatial modes of spatially encoded qutrit. Then the desired universal unitary operation is performed on spatially encoded qutrit by a LOMI. Finally, one more entangler, a LOMI implementing Fourier transformation to spatially encoded qutrit, the measurement of spatially encoded qutrit and the phase shifts controlled by the measurement results through classical feed-forward will complete the realization of qutrit unitary operation. This approach could be developed for general case. By two entanglers, one LOMI for Fourier transformation of spatially encoded qudit and the measurement of polarization encoded qudit associated with its results are used to control the transmission factors of mirrors, the bi-directional mapping between polarization and spatially encoded qudits could be realized. Therefore, the universal unitary operation for general qudit could be realized by one more LOMI performed on the ancilla spatially encoded qutrit. In principle, our scheme is available for general single partite polarization encoded qudit and is feasible with the current experimental technology.

qudit, cross-phase modulation, universal unitary operation

PACS: 03.67.Lx, 42.50.Ex, 42.50.Dv

doi: 10.1360/N132013-00027