一类五次向量场在非对称扰动下 Abel 积分零点的个数

献给张芷芬教授 90 华诞

赵丽琴

北京师范大学数学科学学院数学与复杂系统教育部重点实验室, 北京 100875

E-mail: zhaoliqin@bnu.edu.cn

收稿日期: 2016-06-29; 接受日期: 2016-09-23; 网络出版日期: 2016-11-14

国家自然科学基金 (批准号: 11271046) 和中央高校基本科研业务费专项资金资助项目

摘要 本文运用扩展的完备 Chebyshev 系统 (ECT 系统) 判定与几何定性理论相结合的方法, 研究了一类具有双同宿多角环的平面五次向量场在非对称扰动下 Abel 积分零点的个数问题. 这里的非对称扰动共有 4 个任意参数. 本文证明了 Abel 积分在无界周期环域中至少存在 3 个零点, 得到了当有某一个参数为零时 Abel 积分分别在左右两个周期环域中零点的个数以及共存的零点的个数.

关键词 Abel 积分 ECT 系统 双同宿多角环

MSC (2010) 主题分类 34C05

1 引言和主要结论

在弱化 Hilbert 第 16 问题的研究中, 形如

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = Q_m(x) + \varepsilon Q_n(x)y \quad (1.1)$$

的 (m, n) 型 Liénard 系统得到了广泛的研究与关注, 其中 $0 < |\varepsilon| \ll 1$, Q_m 和 Q_n 分别为 x 的 m 和 n 次多项式. 当 $\varepsilon = 0$ 时, 系统 (1.1) 所对应的 Hamilton 函数为

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \int_0^x Q_m(s)ds, \quad (1.2)$$

可知 $H(x, y)$ 是 $m+1$ 次的多项式函数. 当 $m=2, 3$ 时, 称 $H(x, y)$ 为椭圆 Hamilton 函数. 当 $m \geq 4$ 时, 称 $H(x, y)$ 为超椭圆 Hamilton 函数. 关于椭圆 Hamilton 函数的 Abel 积分零点个数的研究, 参见文献 [1–5]. 超椭圆 Hamilton 函数对应问题的研究, 有如下结果. 文献 [6] 研究了系统

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(x-1)^3 + \varepsilon(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + x^3)y$$

英文引用格式: Zhao L Q. Zeros of Abelian integral for a class of quintic planar vector fields with a double homoclinic loop under non-symmetry perturbations (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 227–240, doi: 10.1360/N012016-00126

极限环的分支问题, 证明了该系统在 ε 充分小时至多分支出 3 个极限环. 当 $m = 5$ 时, 6 次对称超椭圆 Hamilton 函数所对应的向量场

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -(ax + bx^3 + cx^5), \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad c \neq 0 \quad (1.3)$$

的 Liénard 型扰动受到了极大的关注. 文献 [7–10] 分别研究了 (1.3) 中当 (a, b, c) 分别取 $(1, \frac{21}{10}, -1)$ 、 $(1, -2, 1)$ 和 $(0, -1, 1)$ 时在 $\varepsilon(\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4)y \frac{\partial}{\partial y}$ 扰动下 Abel 积分零点的个数问题. 文献 [11] 研究了当 $(a, b, c) = (0, -1, 1)$ 时在非对称扰动下极限环的分支问题, 具体地, 考虑了系统

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x^3(x^2 - 1) + \varepsilon(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4)y$$

在 3 种参数组合下 Abel 积分在有界周期环域中孤立零点的个数问题.

对 6 次非对称超椭圆 Hamilton 函数所确定的系统, 有如下进展. 文献 [12] 证明了系统

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x(x-1)^3 \left(x + \frac{1}{2} \right) + \varepsilon(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_3 x^3 + x^4)y$$

至多分支出 3 个极限环. 文献 [13] 研究了系统

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x^4(1-x) - \varepsilon y \sum_{j=2}^8 a_j x^j.$$

文献 [14] 给出了 6 次非对称超椭圆 Hamilton 函数所确定的系统的拓扑分类, 并研究了其中一类系统在扰动下分支出的极限环个数的下界.

受文献 [6–8, 10–14] 的启发, 本文研究如下系统 Abel 积分零点的个数问题:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) (x^2 + 2) + \varepsilon(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_4 x^4)y, \quad (1.4)$$

其中 $0 < |\varepsilon| \ll 1$, $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4$, $\alpha_4 \neq 0$. 当 $\varepsilon = 0$ 时, 系统 (1.4) 的 Hamilton 函数为

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^6, \quad (1.5)$$

系统 (1.4) 有一个双曲鞍点 $O(0, 0)$ 和两个中心 C_i ($i = 1, 2$), 其中 $H(x, y) = 0$ 是经过双曲鞍点 $(0, 0)$ 的双同宿环且与 x 轴交于 $(\pm \frac{\sqrt{2\sqrt{273}-18}}{4}, 0)$ 两点. 等位线 $H(x, y) = -\frac{13}{96}$ 对应于中心 $C_1 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ 和 $C_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. 未扰动系统有左、右两个有界周期环域 (其中的闭轨分别记为 Γ_h^l 和 Γ_h^r) 对应于 $h \in (-\frac{13}{96}, 0)$; 还有一个无界周期环域 (其中的闭轨记为 Γ_h) 对应于 $h \in (0, \infty)$, 见图 1. 系统 (1.4) 在三

图 1 系统 (1.4) 当 $\varepsilon = 0$ 时的相图

个周期环域中的 Abel 积分分别记为

$$I_l(h)(I_r(h)) = \oint_{\Gamma_h^l(\Gamma_h^r)} (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_4 x^4) y dx, \quad (1.6)$$

$$I(h) = \oint_{\Gamma_h} (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_4 x^4) y dx. \quad (1.7)$$

对 $i = 0, 1, 2, 4$, 令

$$I_i^l(h) = \oint_{\Gamma_h^l} x^i y dx, \quad I_i^r(h) = \oint_{\Gamma_h^r} x^i y dx, \quad I_i(h) = \oint_{\Gamma_h} x^i y dx. \quad (1.8)$$

引入下列记号: $N_r(N_l)$ 表示 $I_r(h)(I_l(h))$ 在 $h \in (-\frac{13}{96}, 0)$ 中零点的个数 (计重数), $N_r + N_l$ 表示 $I_r(h)$ 与 $I_l(h)$ 在左右周期环域中共同存在的零点的个数 (计重数), N 表示 $I(h)$ 在无界周期环域中存在的零点的个数 (计重数).

本文的主要结论叙述如下.

定理 1 (1) 存在参数 $(\alpha_0^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_4^*)$, 使得 $I(h)$ 在无界周期环域中至少有 3 个零点.

(2) 假设 $\alpha_4 \neq 0$, $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ 中有一个为零, 则 $N_r = N_l = 2$, 且

$$\begin{cases} N_r + N_l = 2, & N \geq 2, & \text{若 } \alpha_0 = 0, \\ N_r + N_l = 4, & N \geq 2, & \text{若 } \alpha_1 = 0, \\ N_r + N_l \leq 4, & N \geq 2, & \text{若 } \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

注 1 如果我们在 (1.4) 中加入扰动项 $\varepsilon x^3 y \frac{\partial}{\partial y}$, 则在用 ECT 序列的判定中需要确定一个五阶行列式零点的个数. 由于计算量太大, 我们的电脑无法计算, 所以我们没有考虑这样的扰动.

本文的结构如下: 第 2 节将证明 Abel 积分生成元的某些组合是 ECT 系统, 并且给出 $I(h)$ 在 $h = -\frac{13}{96}$, $h = 0$ 以及 $h = +\infty$ 处的渐近展式; 第 3 节先证明 Abel 积分零点个数的上界, 最后证明 Abel 积分零点个数的下界, 从而完成定理 1 的证明.

2 ECT 系统的判定以及 $I(h)$ 在端点处的展式

定义 1 ^[15] 令 $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ 是实数空间 $\mathbb{R}$ 的开区间 L 上的解析函数.

(1) 称 $\{f_0, f_1, \dots, f_{n-1}\}$ 是 L 上的 Chebyshev 系统 (简称 T 系统), 如果任意非平凡的线性组合

$$\alpha_0 f_0(x) + \alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_{n-1} f_{n-1}(x)$$

在区间 L 上至多有 $n-1$ 个孤立零点.

(2) 称 $\{f_0, f_1, \dots, f_{n-1}\}$ 是 L 上的完备的 Chebyshev 系统 (简称 CT 系统), 如果对于所有的 $k = 1, 2, \dots, n$, $\{f_0, f_1, \dots, f_{k-1}\}$ 是 T 系统.

(3) 称 $\{f_0, f_1, \dots, f_{n-1}\}$ 是 L 上的扩展的完备 Chebyshev 系统 (简称 ECT 系统), 如果对于所有的 $k = 1, 2, \dots, n$, 任意的非平凡线性组合

$$\alpha_0 f_0(x) + \alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_{k-1} f_{k-1}(x)$$

在 L 上至多有 $k-1$ 个孤立零点 (计重数).

命题 1 ^[15] $\{f_0, f_1, \dots, f_{n-1}\}$ 是开区间 L 上的 ECT 系统当且仅当对 $k = 1, 2, \dots, n$, $\{f_0, f_1, \dots, f_{k-1}\}$ 对于 $x \in L$ 的 Wronski 行列式不为零, 即

$$W[f_0, f_1, \dots, f_{k-1}](x) = \begin{vmatrix} f_0(x) & f_1(x) & \cdots & f_{k-1}(x) \\ f'_0(x) & f'_1(x) & \cdots & f'_{k-1}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0^{(k-1)}(x) & f_1^{(k-1)}(x) & \cdots & f_{k-1}^{(k-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0, \quad x \in L.$$

考虑如下形式:

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + A(x)$$

的 Hamilton 函数. 设 $H(x, y)$ 是平面上某个开集上的解析函数, 且 $H(x, y)$ 所对应的向量场为

$$\dot{x} = H_y, \quad \dot{y} = -H_x.$$

假设 $H(0, 0) = 0$, 且 $H(x, y)$ 以原点为极小值, 即 $(0, 0)$ 是对应向量场的中心. 由向量场所定义的等位线 γ_h 为

$$\gamma_h = \{(x, y) \mid H(x, y) = h, h \in (0, h_0), h_0 > 0\}.$$

记 γ_h 与 x 轴的交点为 (x_l, x_r) , 且满足 $x_l < 0 < x_r$. 在上面的假设下, 容易得到对任意的 $x \in (x_l, x_r) \setminus 0$, 有 $x A'(x) > 0$, 从而, 对任意的 $x \in (0, x_r)$, 存在唯一的解析对合函数 $z(x) \in (x_l, 0)$ (即 $z \circ z = \text{Id}$, $z \neq \text{Id}$), 使得 $A(x) = A(z(x))$.

命题 2 ^[15] 考虑 Abel 积分的生成元

$$I_i(h) = \oint_{\gamma_h} f_i(x) y^{2s-1} dx, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

其中 $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)$ 是区间 (x_l, x_r) 上的解析函数. 令

$$\varphi_i(x) := \frac{f_i(x)}{A'(x)} - \frac{f_i(z(x))}{A'(z(x))}.$$

如果 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ 是区间 $(0, x_r)$ 上的 CT 系统且 $s > n-2$, 则 $I_0(h), I_1(h), \dots, I_{n-1}(h)$ 是区间 $(0, h_0)$ 上的 ECT 系统.

命题 3 ^[15] 令闭轨 $\gamma_h \subset \{\frac{1}{2}y^2 + A(x) = h\}$, 并且 $\frac{F(x)}{A'(x)}$ 在 $x = 0$ 处解析, 则对任意 $k \in \mathbb{N}$, 有

$$\oint_{\gamma_h} F(x) y^{k-2} dx = \frac{1}{k} \oint_{\gamma_h} \left(\frac{F}{A'} \right)'(x) y^k dx.$$

引理 1 $\{I_0^r, I_1^r, I_4^r\}$, $\{I_0^r, I_2^r, I_4^r\}$ 和 $\{I_1^r, I_2^r, I_4^r\}$ 分别是区间 $h \in (-\frac{13}{96}, 0)$ 上的 ECT 系统.

证明 我们先考虑右半平面的情形. 为了记号简便, 在不存在混淆的情形下, 去掉 Abel 积分生成元中的上标.

用 $x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 代替 x 把中心 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ 平移到 $(0, 0)$, 于是,

$$I(h) = \oint_{\Gamma_b^r} \left[\alpha_0 + \alpha_1 \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \alpha_2 \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \alpha_4 \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 \right] y dx$$

$$=: \alpha_0 I_0(h) + \alpha_1 I_1(h) + \alpha_2 I_2(h) + \alpha_4 I_4(h),$$

其中

$$I_i(h) = \oint_{\Gamma_b^r} \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^i y dx, \quad i = 0, 1, 2, 4,$$

$$\Gamma_b^r = \left\{ (x, y) \mid H(x, y) = h, x > -\frac{\sqrt{2}}{2}, h \in \left(0, \frac{13}{96}\right) \right\}.$$

此时

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 + \frac{3}{8}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{13}{96} =: \frac{1}{2}y^2 + A(x),$$

Hamilton 函数 $H(x, y) = \frac{13}{96}$ 与 x 轴分别交于 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ 和 $(\frac{\sqrt{2\sqrt{273}-18}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. 注意到

$$A(x) = \frac{1}{6}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 + \frac{3}{8}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{13}{96},$$

于是, 对 $\forall x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, 存在唯一的解析 $z(x) \in (0, \frac{\sqrt{2\sqrt{273}-18}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2})$, 使得 $A(x) = A(z(x))$ 成立. 容易求得 $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0 < z(x) < \frac{\sqrt{2\sqrt{273}-18}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 有

$$A(x) = A(z(x)) \Leftrightarrow \frac{1}{24}(x + z + \sqrt{2})(x - z)q(x, z) = 0,$$

其中

$$q(x, z) = 4x^4 + 8\sqrt{2}x^3 + 4x^2z^2 + 4\sqrt{2}x^2z + 23x^2 + 4\sqrt{2}xz^2 + 8xz + 15\sqrt{2}x + 4z^4 + 8\sqrt{2}z^3 + 23z^2 + 15\sqrt{2}z. \quad (2.1)$$

故 $A(x) = A(z(x)) \Leftrightarrow q(x, z) = 0$. 由 $A(x) = A(z(x))$ 得

$$\frac{dz}{dx} = \frac{A'(x)}{A'(z(x))} = \frac{(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^5 + \frac{3}{2}(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^3 - (x + \frac{\sqrt{2}}{2})}{(z + \frac{\sqrt{2}}{2})^5 + \frac{3}{2}(z + \frac{\sqrt{2}}{2})^3 - (z + \frac{\sqrt{2}}{2})}. \quad (2.2)$$

对 $i = 0, 1, 2, 4$,

$$\begin{aligned} I_i(h) &= \frac{1}{h} \oint_{\Gamma_b^r} \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}y^2 + A(x)\right) y dx \\ &= \frac{1}{h} \left[\oint_{\Gamma_b^r} \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^i y^3 dx + \oint_{\Gamma_b^r} \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^i A(x) y dx \right] \\ &= \frac{1}{h} \oint_{\Gamma_b^r} \left[\frac{1}{2} \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^i + \frac{1}{3} \left(\frac{(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^i A(x)}{A'(x)} \right)' \right] y^3 dx. \end{aligned}$$

对 $i = 0, 1, 2, 4$, 令

$$f_i(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^i + \frac{1}{3} \left(\frac{(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^i A(x)}{A'(x)} \right)', \quad h_i(x) = \frac{f_i(x)}{A'(x)}, \quad (2.3)$$

于是得到

$$\varphi_i(x, z) = h_i(x) - h_i(z(x)) = \eta_1(x, z)m_i(x, z), \quad i = 0, 1, 2, 4, \quad (2.4)$$

其中 $m_i(x, z)$ 是关于 (x, z) 的实系数多项式,

$$\eta_1(x, z) = -\frac{1}{18} \frac{x-z}{xz(x+\sqrt{2})(z+\sqrt{2})(2x^2+2\sqrt{2}x+5)^3(2z^2+2\sqrt{2}z+5)^3} \neq 0. \quad (2.5)$$

我们断言: 对 $\forall x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, 下列结论成立:

- (i) $W[m_0] \neq 0, W[m_1] \neq 0$;
- (ii) $W[m_0, m_1] \neq 0, W[m_0, m_2] \neq 0, W[m_1, m_2] \neq 0$;
- (iii) $W[m_0, m_1, m_4] \neq 0, W[m_0, m_2, m_4] \neq 0, W[m_1, m_2, m_4] \neq 0$,

从而, 由命题 2 可知所要的结论成立. 下面证明上述断言成立.

(i) 由 Maple 计算可得

$$W[m_0] = m_0(x, z) = \frac{32n_0(x, z)}{(2x+\sqrt{2})^3(2z+\sqrt{2})^3},$$

$$W[m_1] = m_1(x, z) = 8(x+z+\sqrt{2})n_1(x, z),$$

其中 $n_0(x, z)$ 和 $n_1(x, z)$ 分别是关于 (x, z) 的多项式. 对 $i = 0, 1$, 记 $R_i(x)$ 表示 $q(x, z)$ 与 $n_i(x, z)$ 关于 z 的结式, 于是有

$$R_0(x) = 256(x+\sqrt{2})^2x^2(2x^2+2\sqrt{2}x+5)^8d_0(x),$$

$$R_1(x) = 64(2x^2+2\sqrt{2}x+5)^4d_1(x),$$

其中 $d_0(x)$ 和 $d_1(x)$ 分别是关于 x 的 32 和 44 次多项式. 由 Sturm 定理可知, 当 $x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ 时, 有 $d_0(x)d_1(x) \neq 0$. 因此, $q(x, z)$ 与 $n_0(x, z)$ 和 $n_1(x, z)$ 无公共根, 从而, 当 $x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ 时, $W[m_i] \neq 0$ ($i = 0, 1$).

(ii) 对 $i = 0, 1, 2, 4$, 令

$$m_{i1}(x, z) = \frac{\partial m_i}{\partial x} + \frac{\partial m_i}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}, \quad m_{i2}(x, z) = \frac{\partial m_{i1}}{\partial x} + \frac{\partial m_{i1}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

于是,

$$W[m_0, m_1] = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 \\ m_{01} & m_{11} \end{vmatrix} = \frac{512(x+z+\sqrt{2})(2x^2+2\sqrt{2}x+5)n_1(x, z)}{(z+\sqrt{2})z(2x+\sqrt{2})^4(2z+\sqrt{2})^5},$$

$$W[m_0, m_2] = \begin{vmatrix} m_0 & m_2 \\ m_{01} & m_{21} \end{vmatrix} = \frac{512(2x^2+2\sqrt{2}x+5)n_2(x, z)}{(z+\sqrt{2})z(2x+\sqrt{2})^5(2z+\sqrt{2})^6},$$

$$W[m_1, m_2] = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ m_{11} & m_{21} \end{vmatrix} = \frac{64(x+z+\sqrt{2})(2x^2+2\sqrt{2}x+5)n_3(x, z)}{(z+\sqrt{2})z(2x+\sqrt{2})^2(2z+\sqrt{2})^3},$$

其中 $n_i(x, z)$ ($i = 1, 2, 3$) 是关于 (x, z) 的多项式. 记 $R_i(x)$ 表示 $q(x, z)$ 与 $n_i(x, z)$ 关于 z 的结式. 于是有

$$R_1(x) = 1048576(x+\sqrt{2})^4x^4(2x^2+2\sqrt{2}x+5)^{10}d_1(x),$$

$$R_2(x) = 34733031424(x+\sqrt{2})^8x^8(2x^2+2\sqrt{2}x+5)^{16}d_2(x),$$

$$R_3(x) = 2359296(x + \sqrt{2})^4 x^4 (2x^2 + 2\sqrt{2}x + 5)^{10} d_3(x),$$

其中 $d_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) 分别是 x 的 82、44 和 72 次多项式. 由 Sturm 定理可知, 当 $x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ 时, 有 $d_1(x)d_3(x) \neq 0$. 可以求得 $d_2(x)$ 有一个零点记为

$$x^* \approx -0.65509784297350690747 \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

把 $x = x^*$ 代入 $q(x, z) = 0$, 得到 $q(x^*, z^*) = 0$, 其中 $z^* \approx 0.26152541731348536680$. 将 $x = x^*$, $z = z^*$ 代入 $W[m_0, m_2]$, 得到

$$W[m_0, m_2](x^*, z^*) \approx -3.77681733718930960926 \times 10^{-78} \neq 0.$$

因此, 当 $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0 < z < \frac{\sqrt{2\sqrt{273}-18}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 有 $W[m_0, m_2] \neq 0$.

(iii) 由计算得

$$\begin{aligned} W[m_0, m_1, m_4] &= \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & m_4 \\ m_{01} & m_{11} & m_{41} \\ m_{02} & m_{12} & m_{42} \end{vmatrix} = \frac{16384(x+z+\sqrt{2})(2x^2+2\sqrt{2}x+5)^2 n_1(x, z)}{(z+\sqrt{2})^3 z^3 (2x+\sqrt{2})^5 (2z+\sqrt{2})^8 (2z^2+2\sqrt{2}z+5)}, \\ W[m_0, m_2, m_4] &= \begin{vmatrix} m_0 & m_2 & m_4 \\ m_{01} & m_{21} & m_{41} \\ m_{02} & m_{22} & m_{42} \end{vmatrix} = \frac{16384(2x^2+2\sqrt{2}x+5)^2 n_2(x, z)}{(z+\sqrt{2})^3 z^3 (2x+\sqrt{2})^7 (2z+\sqrt{2})^{10} (2z^2+2\sqrt{2}z+5)}, \\ W[m_1, m_2, m_4] &= \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_4 \\ m_{11} & m_{21} & m_{41} \\ m_{12} & m_{22} & m_{42} \end{vmatrix} = \frac{3072(2x^2+2\sqrt{2}x+5)^2 (x+z+\sqrt{2}) n_3(x, z)}{(z+\sqrt{2})^3 z^3 (2x+\sqrt{2})^3 (2z+\sqrt{2})^6 (2z^2+2\sqrt{2}z+5)}, \end{aligned}$$

其中 $n_i(x, z)$ ($i = 1, 2, 3$) 是关于 (x, z) 的多项式. 记 $R_i(x)$ 表示 $q(x, z)$ 与 $n_i(x, z)$ 关于 z 的结式. 于是有

$$R_1(x) = 69578470152(x + \sqrt{2})^{12} x^{12} (2x^2 + 2\sqrt{2}x + 5)^{20} d_1(x),$$

$$R_2(x) = 2950038075834630144(x + \sqrt{2})^{18} x^{18} (2x^2 + 2\sqrt{2}x + 5)^{28} d_2(x),$$

其中 $d_1(x)$ 和 $d_2(x)$ 分别是关于 x 的 126 和 116 次多项式. 由 Sturm 定理可知, 当 $x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ 时, 有 $d_{1,2}(x) \neq 0$. 计算得

$$R_3(x) = 9663676416(x + \sqrt{2})^{12} x^{12} (2x^2 + 2\sqrt{2}x + 5)^{20} d_3(x),$$

其中 $d_3(x)$ 是关于 x 的 116 次多项式. 由 Sturm 定理得到 $d_3(x)$ 在 $x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ 有两个零点, 记为

$$x_1^* \approx -0.640682959571792090, \quad x_2^* \approx -0.297260786178922214251.$$

将 $x = x_1^*$ 代入 $q(x, z) = 0$ 得到 $q(x_1^*, z_1^*) = 0$, 其中 $z_1^* \approx 0.260843297206078491$. 将 $x = x_1^*$ 和 $z = z_1^*$ 代入 $W[m_1, m_2, m_4]$ 得到

$$W[m_1, m_2, m_4](x_1^*, z_1^*) \approx -1.46372244104218951137281 \times 10^{16} \neq 0.$$

同样地, 将 $x = x_2^*$ 代入 $q(x, z) = 0$ 得到 $q(x_2^*, z_2^*) = 0$, 其中 $z_2^* \approx 0.1900212108268701978183$. 将 $x = x_2^*$ 和 $z = z_2^*$ 代入 $W[m_1, m_2, m_4]$ 得到

$$W[m_1, m_2, m_4](x_2^*, z_2^*) \approx -6.9362566318234411352705 \times 10^{-84} \neq 0.$$

因此, 当 $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0 < z < \frac{\sqrt{2\sqrt{273}-18}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 有 $W[m_1, m_2, m_4] \neq 0$. 于是断言 (i)–(iii) 成立. $\square$

引理 2 在 $0 < h + \frac{13}{96} \ll 1$ 处, $I_i^r(h)$ ($i = 0, 1, 2, 4$) 有如下展式:

$$\begin{cases} I_0^r(h) = \frac{2\sqrt{10}\pi}{5} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(h + \frac{13}{96} \right) + \frac{61\sqrt{2}}{60} \left(h + \frac{13}{96} \right)^2 + \frac{180317\sqrt{2}}{22500} \left(h + \frac{13}{96} \right)^3 + o(1) \right], \\ I_1^r(h) = \frac{2\sqrt{10}\pi}{5} \left[\frac{1}{2} \left(h + \frac{13}{96} \right) + \frac{1}{15} \left(h + \frac{13}{96} \right)^2 + \frac{62159}{45000} \left(h + \frac{13}{96} \right)^3 + o(1) \right], \\ I_2^r(h) = \frac{2\sqrt{10}\pi}{5} \left[\frac{\sqrt{2}}{4} \left(h + \frac{13}{96} \right) - \frac{23\sqrt{2}}{120} \left(h + \frac{13}{96} \right)^2 + \frac{3217\sqrt{2}}{45000} \left(h + \frac{13}{96} \right)^3 + o(1) \right], \\ I_4^r(h) = \frac{2\sqrt{10}\pi}{5} \left[\frac{\sqrt{2}}{8} \left(h + \frac{13}{96} \right) - \frac{13\sqrt{2}}{240} \left(h + \frac{13}{96} \right)^2 + \frac{49117\sqrt{2}}{90000} \left(h + \frac{13}{96} \right)^3 + o(1) \right]. \end{cases}$$

证明 我们用文献 [16] 中的思想来证明. 作如下变换:

$$\mu = x - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \nu = \frac{\sqrt{10}}{5}y, \quad \tau = \frac{\sqrt{10}}{2}t,$$

从而, 系统 (1.4) 化为

$$\begin{cases} \frac{d\mu}{d\tau} = \nu, \\ \frac{5}{2} \frac{d\nu}{d\tau} = - \left(\mu + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left[\left(\mu + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \right] \left[\left(\mu + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 2 \right] + \varepsilon \frac{\sqrt{10}}{2} \left[\alpha_0 + \alpha_1 \left(\mu + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right. \\ \left. + \alpha_2 \left(\mu + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \alpha_4 \left(\mu + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 \right] \nu. \end{cases}$$

用 x 、 y 和 t 代替上述系统中的 μ 、 ν 和 τ 得到新的系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - \frac{19\sqrt{2}}{10}x^2 - \frac{13}{5}x^3 - \sqrt{2}x^4 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{\sqrt{10}}{5}\varepsilon \left[\left(\alpha_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_4 \right) \right. \\ \left. + (\alpha_1 + \sqrt{2}\alpha_2 + \sqrt{2}\alpha_4)x + (\alpha_2 + 3\alpha_4)x^2 + 2\sqrt{2}\alpha_4x^3 + \alpha_4x^4 \right] y. \end{cases}$$

此时对应的 Hamilton 函数为

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{19\sqrt{2}}{30}x^3 + \frac{13}{20}x^4 + \frac{\sqrt{2}}{5}x^5 + \frac{1}{15}x^6 =: \frac{1}{2}y^2 + A_1(x).$$

令

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \left(\alpha_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_4 \right), \\ \beta_1 &= (\alpha_1 + \sqrt{2}\alpha_2 + \sqrt{2}\alpha_4), \\ \beta_2 &= (\alpha_2 + 3\alpha_4), \quad \beta_3 = 2\sqrt{2}\alpha_4, \quad \beta_4 = \alpha_4. \end{aligned}$$

于是,

$$I(\tilde{h}) = \frac{\sqrt{10}}{5} \oint_{\gamma_{\tilde{h}}} (\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4) y dx,$$

其中 $\gamma_{\tilde{h}}$ 由 $\frac{1}{2}y^2 + A_1(x) = \tilde{h}$ 确定, $\tilde{h} = h + \frac{13}{96}$. 设 $A_1(x_1(\tilde{h})) = A_1(x_2(\tilde{h})) = \tilde{h}$, $x_2(\tilde{h}) < 0 < x_1(\tilde{h})$. 由 Green 公式得

$$I(\tilde{h}) = \int_{x_2(\tilde{h})}^{x_1(\tilde{h})} 2\sqrt{2}(\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4) \sqrt{\tilde{h} - A_1(x)} dx.$$

令 $u = \operatorname{sgn} x \sqrt{A_1(x)} =: \psi(x)$, 于是,

$$\begin{aligned} \int_{x_2(\tilde{h})}^{x_1(\tilde{h})} x^i \sqrt{\tilde{h} - A_1(x)} dx &= \left(\int_{x_2(\tilde{h})}^0 + \int_0^{x_1(\tilde{h})} \right) x^i \sqrt{\tilde{h} - A_1(x)} dx \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{\tilde{h}}} 2u \sqrt{\tilde{h} - u^2} \left[\frac{x^i}{A_1'(x)} \Big|_{x=\psi^{-1}(u)} - \frac{x^i}{A_1'(x)} \Big|_{x=\psi^{-1}(-u)} \right] du. \end{aligned}$$

由 Maple 计算得

$$x = \psi^{-1}(u) = \sqrt{2} \left(u - \frac{19}{15} u^2 + \frac{122}{45} u^3 - \frac{24227}{3375} u^4 + o(u^4) \right).$$

再由 Maple 可以求得

$$\begin{aligned} I(\tilde{h}) &= \frac{2\sqrt{10}\pi}{5} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(h + \frac{13}{96} \right) + \frac{61\sqrt{2}}{60} \left(h + \frac{13}{96} \right)^2 + \frac{180317\sqrt{2}}{22500} \left(h + \frac{13}{96} \right)^3 + o(1) \right] \alpha_0 \\ &\quad + \frac{2\sqrt{10}\pi}{5} \left[\frac{1}{2} \left(h + \frac{13}{96} \right) + \frac{1}{15} \left(h + \frac{13}{96} \right)^2 + \frac{62159}{45000} \left(h + \frac{13}{96} \right)^3 + o(1) \right] \alpha_1 \\ &\quad + \frac{2\sqrt{10}\pi}{5} \left[\frac{\sqrt{2}}{4} \left(h + \frac{13}{96} \right) - \frac{23\sqrt{2}}{120} \left(h + \frac{13}{96} \right)^2 + \frac{3217\sqrt{2}}{45000} \left(h + \frac{13}{96} \right)^3 + o(1) \right] \alpha_2 \\ &\quad + \frac{2\sqrt{10}\pi}{5} \left[\frac{\sqrt{2}}{8} \left(h + \frac{13}{96} \right) - \frac{13\sqrt{2}}{240} \left(h + \frac{13}{96} \right)^2 + \frac{49117\sqrt{2}}{90000} \left(h + \frac{13}{96} \right)^3 + o(1) \right] \alpha_4. \end{aligned}$$

由 $I(h)$ 的定义可得所要的结论. $\square$

引理 3 当 $h \rightarrow \infty$ 时, $I(h)$ 有如下展式:

$$I(h) = \alpha_4 A h^{\frac{4}{3}} + \left(\frac{4}{3} \alpha_2 - \frac{3}{2} \alpha_4 \right) B h + \left(\frac{1}{2} \alpha_0 - \frac{3}{16} \alpha_2 + \frac{127}{256} \alpha_4 \right) C h^{\frac{2}{3}} + O(h^{\frac{2}{3}}), \quad (2.6)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}} B \left(\frac{5}{6}, \frac{3}{2} \right), \quad B = \sqrt{3} B \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right), \quad C = \sqrt{2} \sqrt[6]{6} B \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2} \right), \\ B(\alpha, \beta) &= \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{1}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta(\beta-1) \cdots (\beta-k)}{(\alpha+k)k!}. \end{aligned}$$

证明 记 Γ_h 与 x 轴分别交于点 $(x_1(h), 0)$ 和 $(-x_1(h), 0)$ 且 $x_1(h) > 0$. 于是有

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^6 = h \Leftrightarrow -\frac{3}{x^4} + \frac{9}{4x^2} + 1 = \frac{6h}{x^6}.$$

从而, $x_1 = \sqrt[6]{6h} (1 - \frac{3}{x^4} + \frac{9}{4x^2})^{-\frac{1}{6}}$. 由 Maple 计算得

$$x_1 = 6^{\frac{1}{6}} h^{\frac{1}{6}} - \frac{6^{\frac{5}{6}}}{16} h^{-\frac{1}{6}} + \frac{127}{768} \sqrt{6} h^{-\frac{1}{2}} - \frac{721}{2048} 6^{\frac{1}{6}} h^{-\frac{5}{6}} + \cdots,$$

故当 $h \rightarrow \infty$ 时, $x_1(h) = \sqrt[6]{6h} + o(1)$. 令

$$h = \frac{1}{m}, \quad s = \left(\frac{x^6}{6} + \frac{3x^4}{8} - \frac{x^2}{2} \right).$$

于是, $x_1^*(m) = x_1(\frac{1}{m}) = 6^{\frac{1}{6}}m^{-\frac{1}{6}} + o(1)$. 从而注意到

$$I_0(h) = 2 \int_{-x_1(h)}^{x_1(h)} \sqrt{2h - \left(\frac{x^6}{3} + \frac{3x^4}{4} - x^2 \right)} dx = 2\sqrt{2h} \int_{-x_1(h)}^{x_1(h)} \sqrt{1 - \left(\frac{x^6}{6h} + \frac{3x^4}{8h} - \frac{x^2}{2h} \right)} dx,$$

从而,

$$\begin{aligned} I_0(h) &= 2\sqrt{2}m^{-\frac{1}{2}} \int_{-x_1^*(m)}^{x_1^*(m)} \sqrt{1 - m \left(\frac{x^6}{6} + \frac{3x^4}{8} - \frac{x^2}{2} \right)} dx, \\ &= 2\sqrt{2}m^{-\frac{1}{2}} \int_{-x_1^*(m)}^{x_1^*(m)} \left[1 - \frac{m}{2}s + \cdots + (-1)^n \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdots (\frac{1}{2}-n+1)}{n!} s^n m^n + \cdots \right] dx \\ &= 2\sqrt{2}m^{-\frac{1}{2}} \left[2 \times 6^{\frac{1}{6}}m^{-\frac{1}{6}} - \frac{1}{2} \frac{m}{6} \int_{-x_1^*(m)}^{x_1^*(m)} x^6 dx + \cdots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdots (\frac{1}{2}-n+1)}{n!} \right. \\ &\quad \times (-1)^n \int_{-x_1^*(m)}^{x_1^*(m)} x^{6n} \left(\frac{m}{6} \right)^n dx + \cdots \left. \right] \\ &= 4\sqrt{2} \times 6^{\frac{1}{6}}m^{-\frac{2}{3}} \left[1 - \frac{1}{14} + \cdots + \times (-1)^n \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdots (\frac{1}{2}-n+1)}{n!(6n+1)} + \cdots \right] + o(m^{-\frac{2}{3}}) \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{2} \sqrt[6]{6} B\left(\frac{1}{6}, \frac{3}{2}\right) h^{\frac{2}{3}} + o(h^{\frac{2}{3}}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[6]{6} B\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) h^{\frac{2}{3}} + o(h^{\frac{2}{3}}). \end{aligned}$$

由于

$$I_2(h) = 2\sqrt{2}m^{-\frac{1}{2}} \int_{-x_1^*(m)}^{x_1^*(m)} x^2 \left[1 - \frac{m}{2}s + \cdots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdots (\frac{1}{2}-n+1)}{n!} \times (-1)^n s^n m^n + \cdots \right] dx,$$

因此,

$$\begin{aligned} I_2(h) &= 2\sqrt{2}m^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{m}} \left(\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdots (\frac{1}{2}-n+1)}{n!(6n+3)} \times (-1)^n + \cdots \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3 \times \sqrt[6]{6}}{8\sqrt[6]{m}} \left(-\frac{6}{7} - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdots (\frac{1}{2}-n+1)}{(n-1)![(n-1) + \frac{7}{6}]} \times (-1)^n + \cdots \right) \right] \\ &= 2\sqrt{2}m^{-\frac{1}{2}} \times \frac{2\sqrt{6}}{6\sqrt{m}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) - 2\sqrt{2}m^{-\frac{1}{2}} \times \frac{3 \times \sqrt[6]{6}}{8\sqrt[6]{m}} B\left(\frac{7}{6}, \frac{1}{2}\right) + o(m^{-\frac{2}{3}}) \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) h - \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt[6]{6}}{16} B\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) h^{\frac{2}{3}} + o(h^{\frac{2}{3}}). \end{aligned}$$

由于

$$I_4(h) = 2\sqrt{2}m^{-\frac{1}{2}} \int_{-x_1^*(m)}^{x_1^*(m)} x^4 \left[1 - \frac{m}{2}s + \cdots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdots (\frac{1}{2}-n+1)}{n!} \times (-1)^n s^n m^n + \cdots \right] dx,$$

因此,

$$\begin{aligned}
 I_4(h) &= 2\sqrt{2}m^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{2 \times 6^{\frac{5}{6}}}{m^{\frac{5}{6}}} \left(\frac{1}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdots (\frac{1}{2}-n+1)}{n!(6n+5)} \times (-1)^n + \cdots \right) \right. \\
 &\quad + \frac{3\sqrt{6}}{8\sqrt{m}} \left(-\frac{2}{3} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdots (\frac{1}{2}-n+1)}{(n-1)!(n+\frac{1}{2})} \times (-1)^n + \cdots \right) \\
 &\quad + \frac{\sqrt[6]{6}}{2m^{\frac{1}{6}}} \left(\frac{6}{7} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdots (\frac{1}{2}-n+1)}{(n-1)!(n+\frac{1}{6})} \times (-1)^{n-1} + \cdots \right) \\
 &\quad \left. - \frac{27\sqrt[6]{6}}{128\sqrt[6]{m}} \left(\frac{6}{13} + 2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2} \cdots (-\frac{1}{2}-n+2)}{(n-2)!(n-2+\frac{13}{6})} \times (-1)^{n-2} + \cdots \right) \right] + o(m^{-\frac{2}{3}}) \\
 &= \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}} B\left(\frac{5}{6}, \frac{3}{2}\right) h^{\frac{4}{3}} - \frac{3\sqrt{3}}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) h + \frac{127\sqrt{2}\sqrt[6]{6}}{256} B\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) h^{\frac{2}{3}} + o(h^{\frac{2}{3}}).
 \end{aligned}$$

又因为对 $h \in (0, +\infty)$, 有 $I_1(h) \equiv 0$, 所以引理成立. $\square$

由文献 [17] 知, 对于 $0 < -h \ll 1$, Abel 积分 $I(h)$ 有如下展式:

$$I_r(h) = c_0 + c_1(-h) \ln(-h) + c_2(-h) + O((-h)^2 \ln(-h)), \quad (2.7)$$

其中

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \oint_{\Gamma_0} (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_4 x^4) y dx, \\
 c_1 &= \frac{1}{|\lambda|} (\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2 + \alpha_4 x_1^4) |_{(0,0)}, \\
 c_2 &= r c_1 - \oint_{\Gamma_0} (\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_4 x^4) dt,
 \end{aligned}$$

$|\lambda| = 1$, 且 r 为某个常数. 同时, 由解析函数的方法, 可以设

$$I_k(h) = c_0^{(k)} + c_1^{(k)}(-h) \ln(-h) + c_2^{(k)}(-h) + O((-h)^2 \ln(-h)), \quad k = 0, 1, 2, 4. \quad (2.8)$$

于是,

$$\begin{aligned}
 I_r(h) &= \alpha_0 I_0^r(h) + \alpha_1 I_1^r(h) + \alpha_2 I_2^r(h) + \alpha_4 I_4^r(h) \\
 &= [\alpha_0 c_0^{(0)} + \alpha_1 c_0^{(1)} + \alpha_2 c_0^{(2)} + \alpha_4 c_0^{(4)}] + [\alpha_0 c_1^{(0)} + \alpha_1 c_1^{(1)} + \alpha_2 c_1^{(2)} + \alpha_4 c_1^{(4)}](-h) \ln(-h) \\
 &\quad + [\alpha_0 c_2^{(0)} + \alpha_1 c_2^{(1)} + \alpha_2 c_2^{(2)} + \alpha_4 c_2^{(4)}](-h) + O((-h)^2 \ln(-h)).
 \end{aligned}$$

通过比较, 可得

$$\begin{cases} c_0^{(i)} = \oint_{\Gamma_0} x^i y dx = 2 \int_0^{x_2} x^i \sqrt{x^2 - \frac{3}{4}x^4 - \frac{x^6}{3}} dx, & i = 0, 1, 2, 4, \\ c_1^{(0)} = \frac{1}{|\lambda|}, \quad c_1^{(i)} = 0, & i = 1, 2, 4, \\ c_2^{(0)} = r, \quad c_2^{(i)} = -\oint_{\Gamma_0} x^i dt = -2 \int_0^{x_2} \frac{x^i}{y} dx = -2 \int_0^{x_2} \frac{x^i}{\sqrt{x^2 - \frac{3}{4}x^4 - \frac{x^6}{3}}}, & i = 1, 2, 4, \end{cases}$$

其中 $x_2 = \frac{\sqrt{2\sqrt{273}-18}}{4}$. 通过 Maple 计算可得

$$\begin{aligned} c_0^{(0)} &\approx 0.6624265544, & c_1^{(0)} &= 1.0000000000, & c_2^{(0)} &= r, \\ c_0^{(1)} &\approx 0.3833666046, & c_1^{(1)} &= 0.0000000000, & c_2^{(1)} &\approx -2.852944755, \\ c_0^{(2)} &\approx 0.2547701263, & c_1^{(2)} &= 0.0000000000, & c_2^{(2)} &\approx -1.722973615, \\ c_0^{(4)} &\approx 0.1385494258, & c_1^{(4)} &= 0.0000000000, & c_2^{(4)} &\approx -1.061654683, \end{aligned} \quad (2.9)$$

其中 r 为某个常数. 于是,

$$\begin{cases} c_0 = 0.6624265544\alpha_0 + 0.3833666046\alpha_1 + 0.2547701263\alpha_2 + 0.1385494258\alpha_4, \\ c_1 = \alpha_0, \\ c_2 = -2.852944755\alpha_1 - 1.722973615\alpha_2 - 1.061654683\alpha_4, \end{cases} \quad \text{若 } \alpha_0 = 0.$$

3 定理 1 的证明

定理 1 的证明 首先给出上界的证明. 由于 $\alpha_4 \neq 0$, 不妨取 $\alpha_4 = 1$. 令 $\mu = -x$, $\nu = y$, $\tau = -t$, 于是, 系统 (1.4) 变为

$$\frac{d\mu}{d\tau} = \nu, \quad \frac{d\nu}{d\tau} = -\mu\left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right)(\mu^2 + 2) + \varepsilon(-\alpha_0 + \alpha_1\mu - \alpha_2\mu^2 - \mu^4).$$

从而有

$$I_l(h) = -\alpha_0 I_0^r(h) + \alpha_1 I_1^r(h) - \alpha_2 I_2^r(h) - I_4^r(h).$$

由 ECT 系统的定义和引理 1 可得, 当 $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ 中有一个为零时, $N_r = N_l = 2$. 因此, $N_r + N_l \leq 4$. 特别地, 当 $\alpha_1 = 0$ 时, $I_r(h)$ 与 $I_l(h)$ 有相同的零点, 从而 $N_r + N_l = 4$. 下面证明当 $\alpha_0 = 0$ 时, $N_r + N_l = 2$. 事实上, 令

$$Q_2(h) = \frac{I_2^r(h)}{I_1^r(h)}, \quad Q_4(h) = \frac{I_4^r(h)}{I_1^r(h)}.$$

由引理 2 知, $Q_2'(h)$ 和 $Q_4'(h)$ 在区间 $(-\frac{13}{96}, 0)$ 上严格单调. 由引理 2 和 (2.9) 得

$$Q_2\left(-\frac{13}{96}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.70710, \quad Q_4\left(-\frac{13}{96}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0.35355,$$

$$Q_2(0) \approx 0.6645600404, \quad Q_4(0) \approx 0.3614019169.$$

于是, 当 $h \in (-\frac{13}{96}, 0)$ 时, 有 $Q_2'(h) < 0$, $Q_4'(h) > 0$. 令 $Q = Q_2(h)$. 于是有 $h = Q_2^{-1}(Q)$. 定义

$$C := \left\{ (Q, Q_4)(h) \mid Q_4(Q) = Q_4(Q_2^{-1}(Q)) =: \Psi(Q), h \in \left(-\frac{13}{96}, 0\right) \right\},$$

则 $I_r(h)$ 在区间 $(-\frac{13}{96}, 0)$ 的零点个数, 等于曲线 C 与直线 $L: \alpha_1 + \alpha_2 Q_2 + Q_4 = 0$ 交点的个数. 由引理 2 和 (2.9) 有

$$\lim_{h \rightarrow (-\frac{13}{96})^+} \frac{d^2 Q_4}{dQ_2^2} < 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{d^2 Q_4}{dQ_2^2} < 0,$$

因此可断定曲线 C 在 $(-\frac{13}{96}, 0)$ 上无拐点 (否则拐点个数应为偶数个, 从而至少有 2 个拐点. 于是存在 (α_1^*, α_2^*) , 使得 L 与 C 至少有 4 个交点 (计重数). 这与引理 1 中的结论矛盾, 从而曲线 C 在 $(-\frac{13}{96}, 0)$ 上无拐点).

令 $\tilde{L}: \alpha_1 - \alpha_2 Q - Q_4 = 0$, 于是, $I_L(h)$ 在区间 $(-\frac{13}{96}, 0)$ 的零点个数, 等于曲线 C 与直线 $\tilde{L}$ 的交点的个数. 注意到 $\tilde{L}$ 是由 $Q_4 = \alpha_1 - \alpha_2 Q$ 决定, 且有 $\Psi'(Q) < 0$. 若曲线 C 与直线 L 有 2 个交点, 则有 $\alpha_2^* > 0$, $\alpha_1^* < 0$, 从而在第一象限曲线 C 与直线 $\tilde{L}$ 不可能有交点, 因此 $N_R + N_L = 2$.

其次给出下界的证明. 由文献 [18, 定理 8.8] 可知, 当 $0 < h \ll 1$ 时, 在双同宿多角环的外侧, $I(h)$ 有如下展式:

$$I(h, \delta) = c_0 + 2c_1 h \ln |h| + c_2 h + 2c_3 h^2 \ln |h| + O(h^2).$$

令

$$\begin{cases} \epsilon_1 = c_0 = 0.6624265544\alpha_0 + 0.3833666046\alpha_1 + 0.2547701263\alpha_2 + 0.1385494258\alpha_4, \\ \epsilon_2 = c_1 = 2\alpha_0, \\ \epsilon_3 = c_2 = -2.852944755\alpha_1 - 1.722973615\alpha_2 - 1.061654683\alpha_4, \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} \alpha_1 = -25.98183341\epsilon_1 + 17.21105638\epsilon_2 - 3.841843497\epsilon_3 - 0.4789430419\alpha_4, \\ \alpha_2 = 43.02139899\epsilon_1 - 28.4985171\epsilon_2 + 5.781032959\epsilon_3 + 0.1768705878\alpha_4, \end{cases}$$

$$I(h) = \epsilon_1 + \epsilon_2 h \ln |h| + \epsilon_3 h + o(h), \quad 0 < h \ll 1.$$

取 $\epsilon_i^* < 0$ ($i = 1, 2, 3$), 且 $|\epsilon_1^*| \ll |\epsilon_2^*| \ll |\epsilon_3^*| \ll 1$, 则 $I(h)$ 在 $0 < h \ll 1$ 附近至少有 2 个零点 $0 < h_1^* < h_2^* \ll 1$. 再由引理 3 知, 当 $h \rightarrow +\infty$ 时, $I(h)$ 与 α_4 有相同的符号. 于是存在 $\alpha_4^* \neq 0$, 使得 $I(h)$ 在 $(h_2^*, +\infty)$ 上至少有一个零点, 从而, $I(h)$ 在 $(0, +\infty)$ 上至少存在 3 个零点. 取

$$\begin{cases} \alpha_1^* = -25.98183341\epsilon_1^* + 17.21105638\epsilon_2^* - 3.841843497\epsilon_3^* - 0.4789430419\alpha_4^*, \\ \alpha_0^* = \frac{1}{2}\epsilon_2^*, \\ \alpha_2^* = 43.02139899\epsilon_1^* - 28.4985171\epsilon_2^* + 5.781032959\epsilon_3^* + 0.1768705878\alpha_4^*, \end{cases}$$

则对 $0 < |\varepsilon| \ll 1$, 取 $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = (\alpha_0^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_4^*)$, $I(h)$ 在无界周期环域中至少存在 3 个零点. 类似可以证明其他关于下界的结论. $\square$

致谢 衷心感谢张芷芬教授对作者的培养和教诲.

参考文献

- 1 李承治, 李伟固. 弱化希尔伯特第 16 问题及其研究现状. 数学进展, 2010, 39: 513–526
- 2 Dumortier F, Li C. Perturbations from an elliptic Hamiltonian of degree four, I: Saddle loop and two saddle cycle. J Differential Equations, 2001, 176: 114–157
- 3 Dumortier F, Li C. Perturbations from an elliptic Hamiltonian of degree four, II: Cuspidal loop. J Differential Equations, 2001, 175: 209–243
- 4 Dumortier F, Li C. Perturbations from an elliptic Hamiltonian of degree four, III: Global center. J Differential Equations, 2003, 188: 473–511
- 5 Dumortier F, Li C. Perturbations from an elliptic Hamiltonian of degree four, IV: Figure eight-loop. J Differential Equations, 2003, 188: 512–554

- 6 Wang J, Xiao D. On the number of limit cycles in small perturbations of a class of hyper-elliptic Hamiltonian systems with one nilpotent saddle. *J Differential Equations*, 2011, 250: 2227–2243
- 7 Qi M, Zhao L. Bifurcations of limit cycles from a quintic Hamiltonian system with a figure double-fish. *Internat J Bifur Chaos Appl Sci Engrg*, 2013, 23: 1350116
- 8 Asheghi R, Zangeneh H R Z. Bifurcations of limit cycles from quintic Hamiltonian systems with an eye-figure loop. *Nonlinear Anal*, 2008, 68: 2957–2976
- 9 Asheghi R, Zangeneh H R Z. Bifurcations of limit cycles from quintic Hamiltonian systems with an eye-figure loop (II). *Nonlinear Anal*, 2008, 69: 4143–4162
- 10 Asheghi R, Zangeneh H R Z. Bifurcations of limit cycles from quintic Hamiltonian system with a double cuspidal loop. *Comput Math Appl*, 2010, 59: 1409–1418
- 11 Zhao L. The perturbations of a class of hyper-elliptic Hamilton systems with a double homoclinic loop through a nilpotent saddle. *Nonlinear Anal*, 2014, 95: 374–387
- 12 Kazemi R, Zangeneh H R Z, Atabaigi A. On the number of limit cycles in small perturbations of a class of hyper-elliptic Hamiltonian systems. *Nonlinear Anal*, 2012, 75: 574–587
- 13 Atabaigi A, Zangeneh H R Z, Kazemi R. Limit cycles bifurcation by perturbing a cuspidal loop of order 2 in a Hamiltonian system. *Nonlinear Anal*, 2012, 75: 1945–1958
- 14 Xiong Y. Bifurcation of limit cycles by perturbing a class of hyper-elliptic Hamiltonian systems of degree five. *J Math Anal Appl*, 2014, 411: 559–573
- 15 Grau M, Mañosas F, Villadelprat J. A Chebyshev criterion for Abelian integrals. *Trans Amer Math Soc*, 2011, 363: 109–129
- 16 Han M, Yang J, Yu P. Hopf bifurcations for near-Hamiltonian systems. *Internat J Bifur Chaos Appl Sci Engrg*, 2009, 19: 4117–4130
- 17 Han M, Yang J, Tarta A A, et al. Limit cycles near homoclinic and heteroclinic loops. *J Dynam Differential Equations*, 2008, 20: 923–944
- 18 Han M, Yu P. Normal forms, Melnikov functions and bifurcations of limit cycles. *Appl Math Sci*, 2012, 181: 315–333

Zeros of Abelian integral for a class of quintic planar vector fields with a double homoclinic loop under non-symmetry perturbations

ZHAO LiQin

Abstract In this paper, we study the number of zeros of Abelian integral for a class of quintic planar vector fields with a double homoclinic loop under non-symmetry perturbations. We investigate the bounds of Abelian integral in bounded annuli and unbounded annuli by means of checking ECT-system and qualitative theory of planar vector fields.

Keywords Abelian integral, extended complete Chebyshev systems, double homoclinic-loop

MSC(2010) 34C05

doi: 10.1360/N012016-00126