非线性项依赖于时间和空间变量的梁方程拟周期解的存在性

王怡^{1*}, 司建国²

1. 山东财经大学数学与数量经济学院, 济南 250014;

2. 山东大学数学学院, 济南 250100

E-mail: yiwang8080@126.com, sijgmth@sdu.edu.cn

收稿日期: 2015-05-15; 接受日期: 2015-10-20; 网络出版日期: 2016-07-04; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11171185 和 11526120) 资助项目

摘要 本文研究带有空间周期和时间拟周期非线性项的常数势能梁方程, 证明了对于大多数频率向量和大多数势能常数, 方程存在小振幅、线性稳定的时间拟周期解. 通过对本质上无穷多个小除数的测度估计, 本文构建了一个实解析的辛坐标变换, 将 Hamilton 函数化为其 Birkhoff 标准型. 利用一个无穷维 Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) 定理, 本文证明了拟周期解的存在性.

关键词 无穷维 Hamilton 系统 KAM 理论 非自治梁方程 依赖于空间变量 拟周期解 标准型

MSC (2010) 主题分类 37K55, 70K43, 70K45, 70K40

1 引言

本文考虑带有空间周期、时间拟周期非线性项的梁方程

$$u_{tt} + u_{xxxx} + \mu u + \varepsilon g(\omega t, x) u^3 = 0, \quad x \in [0, 2\pi] \quad (1.1)$$

在周期边界条件

$$u(t, x) = u(t, x + 2\pi) \quad (1.2)$$

下的拟周期解, 其中 $\mu > 0$; ε 为一个小正参数; $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m) \in [\varrho, 2\varrho]^m$ ($\varrho > 0$) 为频率向量; 函数 $g(\omega t, x) = g(\vartheta, x)$, $(\vartheta, x) \in \mathbb{T}^m \times [0, 2\pi]$, 对于 (ϑ, x) 实解析, 对于 t 是拟周期的.

该方程可当成一个无穷维 Hamilton 系统. 当前, 构建无穷维 Hamilton 系统周期和拟周期解的方法主要有两种. 一是 Craig-Wayne-Bourgain (CWB) 方法, 另一种是无穷维 KAM 理论. 通过 KAM 方法构造的周期和拟周期解可以提供一些动力学信息, 如线性稳定性和零 Lyapunov 指数. 因此, 本文应用 KAM 理论和 Birkhoff 标准型技术获取 (1.1) 和 (1.2) 的拟周期解. 有关 KAM 方法及其应用, 读者可参见文献 [1–5] 及其相关内容.

下面介绍本文的相关工作, 包括非自治方程、非线性项依赖于空间变量的方程、非线性项依赖于

英文引用格式: Wang Y, Si J G. Quasi-periodic solutions of beam equations with the nonlinear terms depending on the time and space variables (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 257–290, doi: 10.1360/012015-52

空间和时间变量的方程.

对于非自治系统, 周期或拟周期模型很常见, 常通过变分法求解. 利用 KAM 法求解的文献相对较少. 早在 1996 年, Chow 等^[6] 研究了一类解析的拟周期演化方程的标准型和解析共轭, 包括抛物方程和 Schrödinger 方程. 在解析线性化定理的证明中, 他们采用并改进了 Zehnder 的方法, 而这个方法本质上是 KAM 方法. Yuan^[7] 考虑了完全共振非线性波动方程的拟周期解. 为了构造此解, 在该文的第 3 节, 他采用 KAM 方法研究了一族方程 $\ddot{q} + n^2 q + 3u_0^2 q = 0$ 的可化性, 其中 $n \in \mathbb{N}$, $u_0 = u_0(t)$ 是方程 $\ddot{u}_0 + u_0^3 = 0$ 的一个非零的周期解. Wang 和 Si^[8] 给出了具有铰链边界条件的拟周期强迫的非线性梁方程

$$u_{tt} + u_{xxxx} + (\mu + \varepsilon\phi(t))u + \varepsilon\phi(t)u^3 = 0$$

拟周期解的存在性结论, 其中 $\mu > 0$, ε 是一个小正参数, ϕ 是实解析的拟周期函数. 因为势能函数是拟周期的, 所以, 文献 [8] 先将势能函数约化为常数, 再求拟周期解. 但他们的结论不能用于势能函数为 0 的情形. 之后, Tuo 和 Si^[9] 构造了具有五次非线性项的梁方程

$$u_{tt} + u_{xxxx} + (B + \varepsilon\phi(t))u^5 = 0$$

的拟周期解, 其中 B 是正常数, ε 是小正参数, $\phi(t)$ 是实解析的拟周期函数. 但上述方程的非线性项都不能依赖于空间变量, 因为此时会遇到本质上无穷多个小除数, 文献 [8, 9] 的处理方法失效.

对于非线性项依赖于空间变量的方程, Eliasson 和 Kuksin^[10] 研究了周期边界条件下的 d 维非线性 Schrödinger 方程

$$-iu_t = -\Delta u + V(x) * u + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial \bar{u}}(x, u, \bar{u}),$$

其中 $V(x)$ 是解析函数, F 是实解析函数. 他们得出结论: 该方程具有拟周期解, 解的所有 Lyapunov 指数都等于零, 方程的线性化方程可以约化为常系数方程. Gao 和 Liu^[11] 讨论了 Schrödinger 方程

$$iu_t + u_{xx} + if(x, u, \bar{u})u_x + g(x, u, \bar{u}) = 0$$

的拟周期解, 该方程的非线性项是 u_x 的仿射函数. 他们通过一个抽象的无穷维 KAM 定理证明了方程拟周期解的存在性, 其中 f 和 g 是满足某些条件的解析函数. Berti 等^[12] 证明了反转的导数波动方程

$$y_{tt} - y_{xx} + my = g(x, y, y_x, y_t), \quad m > 0, \quad x \in \mathbb{T}$$

存在小振幅、解析和拟周期的 Cantor 解族, 其中函数 g 满足条件

$$g(-x, y, -y_x, y_t) = g(x, y, y_x, y_t).$$

Gao 等^[13] 获得了依赖于 x 系数的非线性波动方程

$$\rho(x)u_{tt} - (\rho(x)u_x)_x + \rho^2(x)u^3 + \rho^3(x)O(u^5) = 0$$

在一般边界条件

$$a_1 u(t, 0) + b_1 u_x(t, 0) = 0, \quad a_2 u(t, \pi) + b_2 u_x(t, \pi) = 0$$

下拟周期解的存在性, 其中 $a_i^2 + b_i^2 \neq 0$, $i = 1, 2$. 他们的边界条件涵盖了 Dirichlet 型、Neumann 型和 Dirichlet-Neumann 型条件, 但不包括周期边界条件. 最近, Eliasson 和 Grébert-Kuksin^[14] 证明了一个高维非线性梁方程

$$u_{tt} + \Delta^2 u + mu + g(x, u) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{T}^d$$

的 KAM 结论, 其中 $g(x, u) = 4u^3 + O(u^4)$. 他们证明了, 对于一般的 m , 线性方程的大多数小振幅、不变的有限维环面作为非线性方程的不变环面保持了下来. 但他们的非线性项没有依赖于时间变量. 因此, 本文研究的方程 (1.1) 不能包含在内.

对于非线性项依赖于时间和空间变量的方程, Jiao 和 Wang^[15] 考虑了 Dirichle 边界条件下的 Schrödinger 方程

$$iu_t = u_{xx} - mu - f(\beta t, x)|u|^2u,$$

其中 m 是实数, β 是固定的 Diophantine 向量, f 实解析; 通过建立 KAM 定理证明了此边值问题具有拟周期解.

事实上, 依赖于时间和空间变量的非线性项会使得问题复杂化, 尤其在周期边界条件下. Berti 和 Bolle^[16] 给出了 d 维 Schrödinger 方程

$$iu_t - \Delta u + V(x)u = \varepsilon f(\omega t, x, |u|^2)u + \varepsilon g(\omega t, x)$$

在周期边界条件下拟周期解的存在性结论, 其中 $V, f, g \in \mathbb{C}^q$, $\omega \in \mathbb{R}^n$. 他们的证明建立在改进的 Nash-Moser 迭代格式和逆线性算子的一种新多重尺度归纳分析的基础上. 但他们仅能获得 $\mathbb{C}^\infty$ 解而非解析解. 另外, 依赖于空间变量的方程, 其周期解不一定线性稳定. Craig^[17] 研究了 Klein-Gordon 方程

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - m^2 u + (1 + a \cos 2jx)u^3, \quad u(x, t) = u(x + 2\pi, t),$$

其中 $j \geq 1$, $a \in \mathbb{R}$. Craig 指出该方程存在周期的、光滑的解族, 这些解族具有至少两个正规的双曲方向, 且是不稳定的.

本文旨在研究非线性项依赖于时间和空间变量的梁方程拟周期解的存在性, 探讨此类方程是否具有实解析和线性稳定的拟周期解.

对于利用 KAM 理论研究非线性梁方程拟周期解的研究, Geng 和 You^[18-20] 作出了很多贡献. 然而, 他们的结论不能包含非线性项依赖于时间和空间变量的情形. 事实上, 为了克服由第一和第二 Melnikov 条件带来的困难, Geng 和 You^[18-20] 在每一步 KAM 迭代中应用了“紧性性质”. “紧性性质”确保了只需要处理本质上有限个小除数, 但摄动项 $f(u)$ 不能依赖于空间变量. 当非线性项依赖于空间变量时会遭遇本质上无穷多个小除数, 需要更加精细的测度估计. 本文将在“紧性性质”不满足的条件下构建拟周期解.

目前, 尽我们所知, 鲜有关于边值问题 (1.1) 和 (1.2) 周期解、拟周期解和概周期解的结论. 本文难点主要包含两方面. 一是小除数的测度估计. 在周期边值条件下, 重谱将导致一些额外的小除数问题. 而且, 因为非线性项依赖于空间变量, 所以必须在重谱条件下估计无穷多个小除数的测度. 为了克服此问题, 我们构建了偶解, 改进了测度估计技术, 把第 0 个特征值部分单独计算. 另一个难点是正则性的证明. 当我们构建标准型时很难证明辛变换的正则性. 我们引入了对称的整数集合, 受文献 [15] 的启发, 将向量场分成了平均值部分和其余部分, 对这两部分分别计算.

本文结构如下: 第 2 节将方程变换为无穷维 Hamilton 系统; 第 3 节化 Birkhoff 标准型; 第 4 节陈述一个非线性偏微分方程的 KAM 定理; 利用此定理在第 5 节完成主要结论的证明; 部分引理的证明放置在附录中.

2 化 Hamilton 系统

对 $\varepsilon = 0$, 方程 (1.1) 变为

$$u_{tt} + u_{xxxx} + \mu u = 0. \quad (2.1)$$

算子 $A = \frac{d^4}{dx^4} + \mu$ 在周期边界条件下具有特征值 $\{\lambda_j = j^4 + \mu, j \in \mathbb{Z}\}$, 而相应的特征函数为

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos jx, & j > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin jx, & j < 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & j = 0. \end{cases}$$

由于特征函数 $\phi_j(x)$ ($j \geq 0$) 构成了 $L^2[0, 2\pi]$ 空间上所有偶函数的完备正交基, 我们将限于此寻找 x 的偶解, 这样可以避免由重特征值引起的麻烦.

线性梁方程 (2.1) 的每一个解可以写成如下形式, 即对任意 $\mathbb{Z}$ 的子集 $\mathcal{J}$, 有

$$u(t, x) = \sum_{j \in \mathcal{J}} q_j(t) \phi_j(x), \quad q_j(t) = I_j \cos(\sqrt{\lambda_j} t + \varphi_j^0),$$

$I_j \geq 0$ 表示振幅, φ_j^0 表示初始相位.

对于方程 (1.1) 和 (1.2) 拟周期解的存在性, 我们将证明定理 5.1, 其为本文的主要结论. 在此之前, 我们先作一些说明. 定义 $D_1(\sigma_1) := \{\vartheta \mid |\operatorname{Im} \vartheta| < \sigma_1\}$, $D_2(2a) := \{x \mid |\operatorname{Im} x| < 2a\}$,

$$\|g(\vartheta, x)\|_{D_1(\sigma_1) \times D_2(2a)} := \sup_{(\vartheta, x) \in D_1(\sigma_1) \times D_2(2a)} |g(\vartheta, x)|.$$

对每个固定的 $\vartheta \in D_1(\sigma_1)$, $|g(\vartheta, x)|_{D_2(2a)} := \sup_{x \in D_2(2a)} |g(\vartheta, x)|$. 全文作如下两个假设:

(H₁) $g(\vartheta, x) = g_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} g_k(x) e^{i\langle k, \vartheta \rangle}$, $0 \neq g_0 \in \mathbb{R}$.

(H₂) 对某个 $\sigma_1 > 0$ 和 $a > 0$, g 对于 ϑ, x 解析延拓至区域 $D_1(\sigma_1) \times D_2(2a)$, g 在 $D_1(\sigma_1) \times D_2(2a)$ 内有界, 其模 $\|g(\vartheta, x)\|_{D_1(\sigma_1) \times D_2(2a)}$ 有限.

本文用 C 表示普适常数. 现在将 (1.1) 改写成如下形式:

$$\partial_t u = v, \quad \partial_t v + Au = -\varepsilon g(\omega t, x) u^3, \quad (2.2)$$

其中 $A = d^4/dx^4 + \mu$, $t \in \mathbb{R}$. 众所周知, 假设把 u 和 $v = \partial_t u$ 当成坐标, (2.2) 可以当作一个无穷维 Hamilton 系统研究, 其 Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2}(v, v) + \frac{1}{2}(Au, u) + \varepsilon \int_0^{2\pi} \chi(u, x, \omega t) dx,$$

其中

$$\chi(u, x, \omega t) = \frac{1}{4} g(\omega t, x) u^4,$$

$(\cdot, \cdot)$ 表示 $L^2[0, 2\pi]$ 空间上的纯量积.

引入无穷维坐标 $q = (q_0, q_1, q_2, \dots)$ 和 $p = (p_0, p_1, p_2, \dots)$, 令

$$u(t, x) = \sum_{j \geq 0} \frac{q_j(t)}{\sqrt[4]{\lambda_j}} \phi_j(x), \quad v(t, x) = \sum_{j \geq 0} \sqrt[4]{\lambda_j} p_j(t) \phi_j(x).$$

上述坐标取自 Hilbert 空间 $l^{a,s}$ ($s > \frac{1}{2}$), 该空间由所有实值无穷序列

$$l^{a,s} = l^{a,s}(\mathbb{R}) := \left\{ q = (q_0, q_1, q_2, \dots), q_i \in \mathbb{R}, i \geq 0 \text{ 且 } (\|q\|_{a,s})^2 = |q_0|^2 + \sum_{i \geq 1} |q_i|^2 i^{2s} e^{2ai} < \infty \right\}$$

构成. 因此, 获得 Hamilton 函数

$$H = \Lambda + \varepsilon G,$$

其中

$$\Lambda = \frac{1}{2} \sum_{j \geq 0} \sqrt{\lambda_j} (q_j^2 + p_j^2), \quad G = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} g(\omega t, x) \left(\sum_{j \geq 0} \frac{q_j(t)}{\sqrt[4]{\lambda_j}} \phi_j(x) \right)^4 dx.$$

相应的运动方程为

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \sqrt{\lambda_j} p_j, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\sqrt{\lambda_j} q_j - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_j}, \quad j \geq 0, \quad (2.3)$$

其辛结构是 $l^{a,s} \times l^{a,s}$ 上的 $\sum dq_i \wedge dp_i$.

下面证明 u 是 (1.1) 的经典解. 首先引入一些模的定义. 对 $k \in \mathbb{N}$, 考虑由所有模有限的函数 $\mathbb{R} \ni t \mapsto (p(t), q(t)) \in l^{a,s} \times l^{a,s}$ 组成的空间 $C^k(\mathbb{R}, l^{a,s})$, 其模定义如下:

$$\|q\|_{C^k(\mathbb{R}, l^{a,s})} := \sum_{h=0}^k \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\partial_t^h q(t)\|_{a,s}.$$

类似地, 对于 C^k 函数 $\mathbb{R} \ni t \mapsto (p(t), q(t)) \in l^{a,s} \times l^{a,s}$, 考虑模

$$\|(p, q)\|_{C^k(\mathbb{R}, l^{a,s} \times l^{a,s})} := \|p\|_{C^k(\mathbb{R}, l^{a,s})} + \|q\|_{C^k(\mathbb{R}, l^{a,s})}.$$

引理 2.1 令 $\mathbb{R} \ni t \mapsto (p(t), q(t)) \in l^{a,s} \times l^{a,s}$ 是 (2.3) 的 C^k ($2 \leq k \leq \infty$) 类解, 则

$$u(t, x) = \sum_{j \geq 0} \frac{q_j(t)}{\sqrt[4]{\lambda_j}} \phi_j(x) \quad (2.4)$$

是 (1.1) 的 C^k 类经典解.

证明 先证明 $u(t, x)$ 是 C^k 类的, 进而证明对固定的 $t \in \mathbb{R}$, 函数 $x \mapsto \partial_t^h u(t, x)$ ($h < k+1$) 是实解析的并可解析延拓到带型区域 $|\operatorname{Im} x| < a$. 因为 $q \in C^k(\mathbb{R}, l^{a,s})$, 所以对所有的 $t \in \mathbb{R}$, 有

$$|q_0|^2 + \sum_{j \geq 1} |q_j|^2 j^{2s} e^{2aj} = (\|q\|_{a,s})^2 \leq (\|q\|_{C^k(\mathbb{R}, l^{a,s})})^2 < \infty. \quad (2.5)$$

然而, 对于固定的 $\tilde{a} < a$,

$$\sup_{|\operatorname{Im} x| \leq \tilde{a}} |\phi_j(x)| \leq \sup_{|\operatorname{Im} x| \leq \tilde{a}} |\cos jx| \leq e^{\tilde{a}j} \quad (2.6)$$

成立. 因此, 由 (2.6) 和 Cauchy-Schwartz 不等式可得

$$\sup_{|\operatorname{Im} x| \leq \tilde{a}} \left| \sum_{j \geq \tilde{j}_0} \frac{q_j(t)}{\sqrt[4]{\lambda_j}} \phi_j(x) \right|^2 \leq \sum_{j \geq \tilde{j}_0} |q_j|^2 j^{2s} e^{2aj} \sum_{j \geq \tilde{j}_0} \lambda_j^{-\frac{1}{2}} [j]^{-2s} e^{-2(a-\tilde{a})j}, \quad \tilde{j}_0 \geq 1,$$

其中 $[j] := \max(|j|, 1)$. 再由 (2.5) 得, 当 $\tilde{j}_0 \rightarrow \infty$ 时,

$$\sup_{|\operatorname{Im} x| \leq \tilde{a}} \left| \sum_{j \geq \tilde{j}_0} \frac{q_j(t)}{\sqrt[4]{\lambda_j}} \phi_j(x) \right|^2 \leq (\|q\|_{C^k(\mathbb{R}, l^{a,s})})^2 \sum_{j \geq \tilde{j}_0} \lambda_j^{-\frac{1}{2}} [j]^{-2s} e^{-2(a-\tilde{a})j} \rightarrow 0.$$

因此, 对于任意的 $t \in \mathbb{R}$, 级数 (2.4) 一致收敛于 2π 周期实解析偶函数, 且能解析延拓至带型区域 $|\operatorname{Im} x| < a$. 再由 Cauchy-Schwartz 不等式可得

$$|\partial_x^h u(t, x)|^2 \leq (\|q\|_{a,s})^2 \sum_{j \geq 0} \lambda_j^{-\frac{1}{2}} [j]^{2(h-s)} e^{-2aj}, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi], \quad h \in \mathbb{N}.$$

因此, 由 (2.5), 对任意 $h \in \mathbb{N}$, 存在 $c_{h,a,s} > 0$ 使得

$$\sup_{(t,x) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]} |\partial_x^h u(t, x)| \leq c_{h,a,s} \quad (2.7)$$

成立. 类似可证, 对于固定的 $x \in [0, 2\pi]$, 函数 $\mathbb{R} \ni t \mapsto u(t, x)$ 连续, 因为级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛 (函数 $t \mapsto q_j(t)$ 也连续, 因为 $q \in C^0(\mathbb{R}, l^{a,s})$). 两个变量的连续性可利用 (2.7), 以及对于 t 而 x_0 固定时的连续性:

$$\begin{aligned} |u(t, x) - u(t_0, x_0)| &\leq |u(t, x) - u(t, x_0)| + |u(t, x_0) - u(t_0, x_0)| \\ &\leq c_{1,a,s} |x - x_0| + |u(t, x_0) - u(t_0, x_0)|. \end{aligned}$$

同上可证, 对于任意固定的 $x \in [0, 2\pi]$, 级数 $\sum_{j \geq 0} \frac{\partial_t q_j(t)}{\sqrt[4]{\lambda_j}} \phi_j(x)$ 对于 $t \in \mathbb{R}$ 一致收敛; 因此可以对于 (2.4) 的和求导, 得到

$$\partial_t u(t, x) = \sum_{j \geq 0} \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda_j}} \partial_t q_j(t) \phi_j(x).$$

利用上述讨论最终可得 $u \in C^k$,

$$\partial_t^h u(t, x) = \sum_{j \geq 0} \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda_j}} \partial_t^h q_j(t) \phi_j(x), \quad h < k + 1$$

对于固定的 $t \in \mathbb{R}$, 是一个 2π 周期的实解析函数, 可解析延拓至带型区域 $|\operatorname{Im} x| < a$.

下面证明定义于 (2.4) 的 u 是 (1.1) 的经典解. 因为

$$\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_j} = \varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\lambda_j}} \frac{\partial \chi}{\partial u}, \phi_j \right),$$

我们有

$$\begin{aligned} u_{tt} + Au &= \sum_{j \geq 0} \frac{\ddot{q}_j}{\sqrt[4]{\lambda_j}} \phi_j + \sum_{j \geq 0} \frac{q_j}{\sqrt[4]{\lambda_j}} A \phi_j \\ &= \sum_{j \geq 0} \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda_j}} \left(-\lambda_j q_j - \varepsilon \sqrt{\lambda_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right) \phi_j + \sum_{j \geq 0} \frac{q_j}{\sqrt[4]{\lambda_j}} \lambda_j \phi_j \\ &= -\varepsilon \sum_{j \geq 0} \left(\frac{\partial \chi}{\partial u}, \phi_j \right) \phi_j = -\varepsilon g(\omega t, x) u^3, \end{aligned}$$

即为所求. □

注 2.1 如果 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间, 曲线 $I \rightarrow (p(t), q(t))$ 是 (2.3) 的实解析解, 则 (2.4) 是 (1.1) 的经典解, 且在 $I \times [0, 2\pi]$ 上实解析 (参见文献 [5]).

通过引入作用量 - 角变量 $(J, \vartheta) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^m$ ($\mathbb{T}^m := \mathbb{R}^m / 2\pi \mathbb{Z}^m$), 可以获得不依赖于时间变量的等价 Hamilton 函数, 因此所要研究问题的自治形式如下:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j \geq 0, \quad \dot{\vartheta} = \omega, \quad \dot{J} = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial \vartheta} = -\varepsilon \frac{\partial \int_0^{2\pi} \chi dx}{\partial \vartheta},$$

这是一个 Hamilton 系统 (相应的辛结构为 $d\vartheta \wedge dJ + \sum dq_i \wedge dp_i$), Hamilton 函数为

$$H = \langle \omega, J \rangle + \frac{1}{2} \sum_{j \geq 0} \sqrt{\lambda_j} (q_j^2 + p_j^2) + \varepsilon G(q, \vartheta), \quad (2.8)$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathbb{C}^m$ 上的标准内积.

为了继续考察 Hamilton 函数 (2.8), 需要建立相应于 G 的非线性 Hamilton 向量场 X_G 的正则性.

令 l_b^2 和 L^2 分别为双边无穷的平方可和复系数序列 Hilbert 空间及 $[0, 2\pi]$ 上的平方可积复值函数 Hilbert 空间. 假设

$$\mathcal{F}: l_b^2 \rightarrow L^2, \quad q \mapsto \mathcal{F}q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_j q_j e^{ijx}$$

是逆离散 Fourier 变换, 其定义了这两个空间之间的同胚. 根据定义, 子空间 $l_b^{a,s} \subset l_b^2$ 由所有带有限模

$$(\|q\|_{a,s}^1)^2 = |q_0|^2 + \sum_i |q_i|^2 |i|^{2s} e^{2a|i|}$$

的双边无穷序列构成. 通过 $\mathcal{F}$ 可定义子空间 $W^{a,s}[0, 2\pi] \subset L^2[0, 2\pi]$, 其模设置为 $\|\mathcal{F}q\|_{a,s}^1 = \|q\|_{a,s}^1$.

下列引理已经在文献 [5] 中证明, 此处仅给出结论.

引理 2.2 空间 $l_b^{a,s}$ 是一个相应于序列的卷积 $(q * p)_j := \sum_k q_{j-k} p_k$ 的 Hilbert 代数, 其中

$$\|q * p\|_{a,s}^1 \leq c \|q\|_{a,s}^1 \|p\|_{a,s}^1,$$

c 依赖于 s . 因此, $W^{a,s}$ 是一个相应于函数乘法的 Hilbert 代数.

利用以上引理可得下列结论.

引理 2.3 梯度 $\partial_q G$ 作为一个从 $l^{a,s}$ 的原点某邻域到 $l^{a,s}$ 的映射是实解析的, 并有

$$\|\partial_q G\|_{a,s} = \mathcal{O}((\|q\|_{a,s})^3).$$

证明 令 $q \in l^{a,s}$. 作为 $[0, 2\pi]$ 空间上的函数, $u = \sum_{j \geq 0} \frac{q_j(t)}{\sqrt[4]{\lambda_j}} \phi_j(x)$ 属于 $W^{a,s}$ 且

$$\|u\|_{a,s}^1 \leq c \|q\|_{a,s}. \quad (2.9)$$

对每一个 $\vartheta \in D_1(\sigma_1)$, 我们将 g 按 Fourier 级数展开为

$$g(\vartheta, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_j g_j(\vartheta) e^{ijx}.$$

通过利用文献 [21, 定理 A.1] 得, 对每一个 $j \in \mathbb{Z}$,

$$|g_j(\vartheta)| \leq C |g(\vartheta, x)|_{D_2(2a)} e^{-2a|j|} \quad (2.10)$$

成立. 因此,

$$\begin{aligned} (\|g\|_{a,s}^1)^2 &= |g_0(\vartheta)|^2 + \sum_{j \neq 0} |g_j(\vartheta)|^2 |j|^{2s} e^{2a|j|} \\ &< C \sum |g(\vartheta, x)|_{D_2(2a)}^2 e^{-4a|j|} |j|^{2s} e^{2a|j|} \\ &< C \|g(\vartheta, x)\|_{D_1(\sigma_1) \times D_2(2a)}^2 \sum_j e^{-2a|j|} |j|^{2s} < \infty. \end{aligned}$$

因此, $g \in W^{a,s}[0, 2\pi]$. 由 (2.9), 通过引理 2.2 以及 g 和 u^3 的解析性可得, 函数 $g(\vartheta, x)u^3$ 也属于空间 $W^{a,s}[0, 2\pi]$, 并且 $\|g(\vartheta, x)u^3\|_{a,s}^1 \leq C(\|q\|_{a,s})^3$ 在一个原点的充分小的邻域内成立, 其中 C 依赖于 s 、 a 、 σ_1 和 g . 另一方面, 因为

$$\frac{\partial G}{\partial q_j} = \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda_j}} \int_0^{2\pi} g(\vartheta, x)u^3 \phi_j(x) dx,$$

G_q 的元素是 $g(\vartheta, x)u^3$ 的 Fourier 系数, 因此, G_q 属于 $l^{a,s}$, 且有

$$\|G_q\|_{a,s} \leq C\|g(\vartheta, x)u^3\|_{a,s}^1 \leq C(\|q\|_{a,s})^3,$$

其中最后一个常数 C 依赖于 s 、 a 、 μ 、 σ_1 和 g . G_q 的正则性来自于元素的正则性和自身的局部有界性. $\square$

3 Birkhoff 标准型

因为 $\chi(u, x, \vartheta) = \frac{1}{4}g(\vartheta, x)u^4$ 和 $u = \sum_j \frac{q_j}{\sqrt[4]{\lambda_j}}\phi_j$, 我们发现

$$G(q, \vartheta) = \frac{1}{4} \sum_{i,j,d,l} \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda_i \lambda_j \lambda_d \lambda_l}} \int_0^{2\pi} g(\vartheta, x) \phi_i \phi_j \phi_d \phi_l dx q_i q_j q_d q_l.$$

由假设 (H₁) 可得

$$G(q, \vartheta) = \frac{1}{4} \sum_{i,j,d,l} \frac{G_{ijdl}}{\sqrt[4]{\lambda_i \lambda_j \lambda_d \lambda_l}} q_i q_j q_d q_l + \frac{1}{4} \sum_{|k| \geq 1, i,j,d,l} \frac{G_{k,ijdl}}{\sqrt[4]{\lambda_i \lambda_j \lambda_d \lambda_l}} e^{i\langle k, \vartheta \rangle} q_i q_j q_d q_l, \quad (3.1)$$

其中

$$G_{ijdl} = g_0 \int_0^{2\pi} \phi_i \phi_j \phi_d \phi_l dx, \quad (3.2)$$

$$G_{k,ijdl} = \int_0^{2\pi} g_k(x) \phi_i \phi_j \phi_d \phi_l dx, \quad |k| \geq 1. \quad (3.3)$$

初等计算表明, $G_{ijdl} = 0$ 除非 $i \pm j \pm d \pm l = 0$ 对于至少一组加减号组合成立. 特别地,

$$G_{ijij} = \frac{g_0}{4\pi} (2 + \delta_{ij}), \quad (3.4)$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \neq 0, \\ 0, & i = j = 0, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

再通过

$$z_i = \frac{q_i + ip_i}{\sqrt{2}}, \quad \bar{z}_i = \frac{q_i - ip_i}{\sqrt{2}}$$

将坐标转化为复的, 其中复坐标来自于复 Hilbert 空间

$$l^{a,s} = l^{a,s}(\mathbb{C}) := \left\{ z = (z_0, z_1, z_2, \dots), z_i \in \mathbb{C}, i \geq 0 \text{ 且 } (\|z\|_{a,s})^2 = |z_0|^2 + \sum_{i \geq 1} |z_i|^{2i} e^{2ai} < \infty \right\}.$$

如此一来, Hamilton 函数 (辛结构为 $d\vartheta \wedge dJ + i \sum_i dz_i \wedge d\bar{z}_i$) 可由下式给出,

$$H = \Lambda + \varepsilon G, \quad (3.5)$$

其中

$$\Lambda = \langle \omega, J \rangle + \sum_j \sqrt{\lambda_j} z_j \bar{z}_j, \quad G = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} g(\vartheta, x) \left(\sum_{j \geq 0} \frac{z_j + \bar{z}_j}{\sqrt[4]{4\lambda_j}} \phi_j(x) \right)^4 dx.$$

而且, 由 (3.1)–(3.3), 有

$$G = \frac{1}{16} \sum_{i,j,d,l, i \pm j \pm d \pm l = 0} \frac{G_{ijkl}}{\sqrt[4]{\lambda_i \lambda_j \lambda_d \lambda_l}} (z_i + \bar{z}_i)(z_j + \bar{z}_j)(z_d + \bar{z}_d)(z_l + \bar{z}_l) \\ + \frac{1}{16} \sum_{|k| \geq 1, i,j,d,l} \frac{G_{k,ijkl}}{\sqrt[4]{\lambda_i \lambda_j \lambda_d \lambda_l}} e^{i\langle k, \vartheta \rangle} (z_i + \bar{z}_i)(z_j + \bar{z}_j)(z_d + \bar{z}_d)(z_l + \bar{z}_l).$$

下面将 Hamilton 函数 (3.5) 化为四阶 Birkhoff 标准型, 这样它可以作为原点某充分小邻域内的可积系统的小摄动处理. 假设 $\mathbb{Z}' = \{\dots, -2, -1, -0, 0, 1, 2, \dots\}$ 和 $0 \leq n < \infty$. 令

$$\mathcal{L}_n = \{(i, j, d, l) \in \mathbb{Z}'^4 : \min(|i|, |j|, |d|, |l|) \leq n\}$$

且 $\mathcal{N}_n \subset \mathcal{L}_n$ 是所有 $(i, j, d, l) \equiv (p, -p, q, -q)$ 的子集, 即它们具有 $(p, -p, q, -q)$ 或其排列的形式. 我们引入符号

$$\lambda'_i := \operatorname{sgn} i \cdot \sqrt{\lambda_{|i|}}. \quad (3.6)$$

注 3.1 在集合 $\mathbb{Z}'$ 中, 我们设定 0 和 -0 是两种不同的指标, 目的是为了在后面性质 3.1 的证明中避免 z_0 和 $\bar{z}_0$ 使用同样的坐标符号.

以下引理将用于性质的证明. 这些引理的证明放在附录.

引理 3.1 若 $(i, j, d, l) \in \mathcal{L}_n / \mathcal{N}_n$, 而且

$$|i| \pm |j| \pm |d| \pm |l| = 0 \quad (3.7)$$

成立, 则对任意的 $0 < \eta < 1$, 存在子集 $S \subset (0, \infty)$ 并有 $\operatorname{meas} S = \mathcal{O}(\eta)$, 使得对任意的 $\mu \in (0, \infty) \setminus S$,

$$|\lambda'_i + \lambda'_j + \lambda'_d + \lambda'_l| \geq c > 0 \quad (3.8)$$

成立, 其中常数 c 依赖于 μ, η 和 n , 符号 meas 表示 Lebesgue 测度.

引理 3.2 存在子集 $\underline{\Omega} \subset [\varrho, 2\varrho]^m$ 使得每一个 $\omega \in \underline{\Omega}$ 满足, 对所有 $0 \neq k \in \mathbb{Z}^m$,

$$|\langle k, \omega \rangle| \geq \frac{\varrho \varepsilon^{\frac{1}{3}}}{|k|^{m+1}}$$

成立, 且有

$$\operatorname{meas} \underline{\Omega} \geq (1 - C_1 \varepsilon^{\frac{1}{3}}) \varrho^m,$$

其中常数 C_1 依赖于 m .

引理 3.3 假设 $(i, j, d, l) \in \mathcal{L}_n$, $k \neq 0$, 则当 ε 充分小时, 存在子集 $\bar{\Omega} \subset [\varrho, 2\varrho]^m$ 满足, 对任意 $\omega \in \bar{\Omega}$ 和 $\lambda'_i + \lambda'_j + \lambda'_d + \lambda'_l \neq 0$,

$$|\lambda'_i + \lambda'_j + \lambda'_d + \lambda'_l + \langle k, \omega \rangle| \geq \frac{\varrho \varepsilon^{\frac{1}{3}}}{|k|^{m+5}}$$

成立, 并有

$$\text{meas } \bar{\Omega} \geq \varrho^m (1 - C_2 \varepsilon^{\frac{1}{3}}),$$

其中 C_2 是一个依赖于 n, m, ϱ 和 μ 的常数.

引理 3.4 对于 $x_k \in \mathbb{C}$ 和 $k \in \mathbb{Z}^m$, 如果级数 $\sum_k [k]^{2m+1} |x_k|^2$ 收敛, 则不等式

$$\left| \sum_k x_k \right|^2 \leq c \sum_k [k]^{2m+1} |x_k|^2$$

成立, 其中 $[k] = \max\{|k|, 1\}$, $|k| = |k_1| + |k_2| + \cdots + |k_m|$, 常数 c 依赖于 m .

考虑 Hamilton 函数 (3.5). 对每一个固定的子集 $\mathcal{L}_n$ 且 $\mu \notin S$, 下列性质 3.1 成立.

性质 3.1 当 ε 充分小时, 存在子集 $\Omega \subset [\varrho, 2\varrho]^m$ 且 $\text{meas } \Omega > 0$, 对每一个 $\omega \in \Omega$, 存在实解析的辛坐标变换 Ψ 能将 Hamilton 函数 (3.5) 化为其 Birkhoff 标准型, 即

$$H \circ \Psi = \Lambda + \varepsilon \bar{G} + \varepsilon \check{G} + \varepsilon^2 K,$$

其中 $|\check{G}| = \mathcal{O}(\|Z\|_{a,s}^4)$, $\varepsilon^{\frac{1}{3}} |K| = \mathcal{O}(\|z\|_{a,s}^6)$,

$$\bar{G}(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} \sum_{\min\{i,j\} \leq n} \bar{G}_{ij} |z_i|^2 |z_j|^2,$$

最后一个式子的系数由下式唯一确定,

$$\bar{G}_{ij} = \begin{cases} \frac{3g_0}{4\pi\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}, & \text{当 } i \neq j, \\ \frac{9g_0}{16\pi\lambda_i}, & \text{当 } i = j \neq 0, \\ \frac{3g_0}{8\pi\lambda_0}, & \text{当 } i = j = 0, \end{cases}$$

$Z = (z_{n+1}, z_{n+2}, \dots)$, $z = (z_0, z_1, z_2, \dots)$. 并且, 变换 Ψ 定义在环面 $\mathbb{T}^m$ 的复邻域 $D_1(\frac{\sigma_1}{2}) := \{\vartheta \mid |\text{Im}\vartheta| < \frac{\sigma_1}{2}\}$ 和 $l^{a,s}$ 上的原点邻域内.

证明 为了方便起见, 引入另一坐标 $(\dots, w_{-2}, w_{-1}, w_{-0}, w_0, w_1, w_2, \dots)$, 其属于空间 $\hat{l}_b^{a,s}$. 设 $z_0 = w_0$, $\bar{z}_0 = w_{-0}$, $z_j = w_j$, $\bar{z}_j = w_{-j}$ ($j \geq 1$). 此处空间

$$\hat{l}_b^{a,s} = \hat{l}_b^{a,s}(\mathbb{C}) := \{(\dots, w_{-1}, w_{-0}, w_0, w_1, \dots), w_i \in \mathbb{C}, \text{ 且 } (\|w\|_{a,s}^2)^2 < \infty\},$$

且模为

$$(\|w\|_{a,s}^2)^2 = |w_{-0}|^2 + |w_0|^2 + \sum_{|i|=1}^{\infty} |w_i|^2 |i|^{2s} e^{2a|i|}.$$

因此有

$$H = \langle \omega, J \rangle + \sum_{j \geq 0} \sqrt{\lambda_j} w_j w_{-j} + \frac{\varepsilon}{16} \sum'_{i,j,d,l, |i| \pm |j| \pm |d| \pm |l| = 0} g_{ijdl} w_i w_j w_d w_l$$

$$+ \frac{\varepsilon}{16} \sum_{|k| \geq 1} \sum'_{i,j,d,l} g_{k,ijdl} e^{i\langle k, \vartheta \rangle} w_i w_j w_d w_l,$$

其中

$$g_{ijdl} = \frac{G_{|i||j||d||l|}}{\sqrt[4]{\lambda_{|i|}\lambda_{|j|}\lambda_{|d|}\lambda_{|l|}}}, \quad g_{k,ijdl} = \frac{G_{k,|i||j||d||l|}}{\sqrt[4]{\lambda_{|i|}\lambda_{|j|}\lambda_{|d|}\lambda_{|l|}}}, \quad (3.9)$$

这里加和号的上标'表示指标取自集合 $\mathbb{Z}'$. 由于 $G_{ijdl} = 0$ 除非 $i \pm j \pm d \pm l = 0$ 对至少一组加减号组合成立, 因此,

$$g_{ijdl} = 0 \quad (3.10)$$

除非 $|i| \pm |j| \pm |d| \pm |l| = 0$.

第 1 步 构建辛坐标变换. 考虑 Hamilton 函数

$$\mathcal{F} = \varepsilon F = \varepsilon \sum'_{i,j,d,l} F_{ijdl} w_i w_j w_d w_l + \varepsilon \sum_{|k| \geq 1} \sum'_{i,j,d,l} F_{k,ijdl} e^{i\langle k, \vartheta \rangle} w_i w_j w_d w_l,$$

令其系数为

$$iF_{ijdl} = \begin{cases} \frac{g_{ijdl}}{16(\lambda'_i + \lambda'_j + \lambda'_d + \lambda'_l)}, & \text{当 } (i, j, d, l) \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{N}_n, \quad |i| \pm |j| \pm |d| \pm |l| = 0, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

对 $k \neq 0$,

$$iF_{k,ijdl} = \begin{cases} \frac{g_{k,ijdl}}{16\langle k, \omega \rangle}, & \text{当 } (i, j, d, l) \in \mathcal{L}_n, \quad \lambda'_i + \lambda'_j + \lambda'_d + \lambda'_l = 0, \quad |k| \geq 1, \\ \frac{g_{k,ijdl}}{16(\lambda'_i + \lambda'_j + \lambda'_d + \lambda'_l + \langle k, \omega \rangle)}, & \text{当 } (i, j, d, l) \in \mathcal{L}_n, \quad \lambda'_i + \lambda'_j + \lambda'_d + \lambda'_l \neq 0, \quad |k| \geq 1, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

令 $\Psi = X_{\mathcal{F}}^1$ 是 Hamilton 函数 $\mathcal{F}$ 向量场的时间 1 映射. 在 $t = 0$ 点利用 Taylor 公式展开得

$$\begin{aligned} H \circ \Psi &= H + \{H, \mathcal{F}\} + \int_0^1 (1-t) \{\{H, \mathcal{F}\}, \mathcal{F}\} \circ X_{\mathcal{F}}^t dt \\ &= \Lambda + \varepsilon G + \varepsilon \{\Lambda, F\} + \varepsilon^2 \{G, F\} + \varepsilon^2 \int_0^1 (1-t) \{\{H, F\}, F\} \circ X_{\mathcal{F}}^t dt. \end{aligned} \quad (3.11)$$

下面计算 $G + \{\Lambda, F\}$. 为了方便, 记

$$\begin{aligned} I_{ijdl} &:= \left[\frac{1}{16} g_{ijdl} - i(\lambda'_i + \lambda'_j + \lambda'_d + \lambda'_l) F_{ijdl} \right] w_i w_j w_d w_l, \\ I_{k,ijdl} &:= \left[\frac{1}{16} g_{k,ijdl} - i(\lambda'_i + \lambda'_j + \lambda'_d + \lambda'_l + \langle k, \omega \rangle) F_{k,ijdl} \right] e^{i\langle k, \vartheta \rangle} w_i w_j w_d w_l, \end{aligned}$$

则由 (3.10), 得

$$\begin{aligned} G + \{\Lambda, F\} &= \sum'_{i,j,d,l, |i| \pm |j| \pm |d| \pm |l| = 0} I_{ijdl} + \sum_{|k| \geq 1} \sum'_{i,j,d,l} I_{k,ijdl} \\ &= \left(\sum'_{(i,j,d,l) \in \mathcal{N}_n} I_{ijdl} + \sum'_{(i,j,d,l) \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{N}_n, |i| \pm |j| \pm |d| \pm |l| = 0} I_{ijdl} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum'_{(i,j,d,l) \notin \mathcal{L}_n, |i| \pm |j| \pm |d| \pm |l| = 0} I_{ijdl} \Big) + \Big(\sum'_{(i,j,d,l) \in \mathcal{L}_n} \sum_{|k| \geq 1} I_{k,ijdl} \\
 & + \sum'_{(i,j,d,l) \notin \mathcal{L}_n} \sum_{|k| \geq 1} I_{k,ijdl} \Big). \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

利用 F 的定义, 有

$$\begin{aligned}
 \sum'_{(i,j,d,l) \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{N}_n, |i| \pm |j| \pm |d| \pm |l| = 0} I_{ijdl} &= \sum'_{(i,j,d,l) \in \mathcal{L}_n} \sum_{|k| \geq 1} I_{k,ijdl} = 0, \\
 I_{ijdl} &= \frac{1}{16} g_{ijdl} w_i w_j w_d w_l, \quad (i, j, d, l) \notin \mathcal{L}_n, \\
 I_{k,ijdl} &= \frac{1}{16} g_{k,ijdl} e^{i\langle k, \vartheta \rangle} w_i w_j w_d w_l, \quad (i, j, d, l) \notin \mathcal{L}_n, \quad |k| \geq 1
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

成立. 将最后两个等式合并为

$$\sum'_{(i,j,d,l) \notin \mathcal{L}_n, |i| \pm |j| \pm |d| \pm |l| = 0} I_{ijdl} + \sum'_{(i,j,d,l) \notin \mathcal{L}_n} \sum_{|k| \geq 1} I_{k,ijdl} =: \check{G}. \tag{3.14}$$

因此, 由 (3.12)–(3.14) 得到

$$G + \{\Lambda, F\} = \bar{G} + \check{G}, \tag{3.15}$$

其中 $\bar{G} := \sum'_{(i,j,d,l) \in \mathcal{N}_n} I_{ijdl}$. 由 (3.9) 和 (3.4), 我们得

$$\bar{G} = \frac{1}{2} \sum_{\min(|i|, |j|) \leq n} \bar{G}_{ij} w_i w_{-i} w_j w_{-j},$$

其中

$$\bar{G}_{ij} = \begin{cases} \frac{3g_0}{4\pi\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}, & \text{若 } i \neq j, \\ \frac{9g_0}{16\pi\lambda_i}, & \text{若 } i = j \neq 0, \\ \frac{3g_0}{8\pi\lambda_0}, & \text{若 } i = j = 0. \end{cases}$$

因此, 利用 (3.11) 和 (3.15), 有

$$H \circ \Psi = \Lambda + \varepsilon \bar{G} + \varepsilon \check{G} + \varepsilon^2 \{G, F\} + \varepsilon^2 \int_0^1 (1-t) \{ \{H, F\}, F \} \circ X_{\mathcal{F}}^t$$

成立.

第 2 步 证明 Ψ 实解析.

结论: Hamilton 函数 X_F 的向量场在 $\mathbb{T}^m$ 的复邻域 $\vartheta \in D_1(\frac{\sigma_1}{2})$ 和 $\hat{l}_b^{a,s}$ 的原点某邻域内实解析, 且满足 $\|F_w\|_{a,s}^2 \leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}} (\|w\|_{a,s}^2)^3$, 其中 F_w 表示 $\partial_w F$.

事实上, 令 $w \in \hat{l}_b^{a,s}$, $\vartheta \in D_1(\sigma_1)$, 根据 (3.2)、(3.8) 和 (3.9), 对所有 $r, j, d, l \in \mathbb{Z}'$, 我们有

$$|F_{rjdl}| = \left| \frac{g_{rjdl}}{16(\lambda'_r + \lambda'_j + \lambda'_d + \lambda'_l)} \right| \leq C \left| \frac{g_0}{\sqrt[4]{\lambda_r \lambda_j \lambda_d \lambda_l}} \right| \leq C |g_0| \leq C \tag{3.16}$$

成立, 其中常数 C 依赖于 g, n, η 和 μ . 另一方面, g_k 的 Fourier 变换为

$$g_k(x) = \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} g_k^\tau e^{i\tau x}. \quad (3.17)$$

因此, 固定 $r, j, d, l \in \mathbb{Z}'$, 由 (3.3) 可得

$$G_{k, |r||j||d||l|} = \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} g_k^\tau \int_0^{2\pi} e^{i\tau x} \phi_{|r|} \phi_{|j|} \phi_{|d|} \phi_{|l|} dx = \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} g_k^\tau \int_0^{2\pi} \cos \tau x \phi_{|r|} \phi_{|j|} \phi_{|d|} \phi_{|l|} dx. \quad (3.18)$$

易计算得

$$\int_0^{2\pi} \cos \tau x \phi_{|r|} \phi_{|j|} \phi_{|d|} \phi_{|l|} dx = 0 \quad (3.19)$$

除非 $\tau \pm |r| \pm |j| \pm |d| \pm |l| = 0$ 的至少一组加减组合成立, 且

$$\left| \int_0^{2\pi} \cos \tau x \phi_{|r|} \phi_{|j|} \phi_{|d|} \phi_{|l|} dx \right| \leq \frac{2}{\pi} \quad (3.20)$$

对所有 $\tau \in \mathbb{Z}$ 和 $r, j, d, l \in \mathbb{Z}'$ 都成立.

根据引理 3.2 和 3.3, 我们假设 $\Omega = \bar{\Omega} \cap \underline{\Omega}$. 显然, $\text{meas } \Omega \geq \varrho^m (1 - C_1 \varepsilon^{\frac{1}{3}} - C_2 \varepsilon^{\frac{1}{3}})$. 所以, 当 ε 充分小时, $\text{meas } \Omega > 0$. 因此, 当 $\omega \in \Omega$ 时, 由 $F_{k, rjdl}$ 的定义, 利用引理 3.2 和 3.3 可得, 对所有 $|k| \geq 1$,

$$|F_{k, rjdl}| \leq \frac{|k|^{m+5}}{16\varrho\varepsilon^{\frac{1}{3}}} |g_{k, rjdl}|.$$

因此, 由 (3.9) 得

$$|F_{k, rjdl}| \leq C \frac{|k|^{m+5}}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}} |G_{k, |r||j||d||l|}|,$$

再根据 (3.18)–(3.20) 得到

$$|F_{k, rjdl}| \leq C \frac{|k|^{m+5}}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}} \sum_{\tau, \tau \pm |r| \pm |j| \pm |d| \pm |l| = 0} |g_k^\tau|, \quad (3.21)$$

其中常数 C 依赖于 ϱ 和 μ . 另外, 假设

$$F_{0r} = \left| \sum'_{j, d, l, |r| \pm |j| \pm |d| \pm |l| = 0} F_{rjdl} w_j w_d w_l \right|, \quad F_{1r} = \left| \sum_{|k| \geq 1} \sum'_{j, d, l} F_{k, rjdl} e^{i\langle k, \theta \rangle} w_j w_d w_l \right|,$$

显然,

$$|F_{w_r}|^2 \leq C(F_{0r})^2 + C(F_{1r})^2. \quad (3.22)$$

下面分别计算 $(F_{0r})^2$ 和 $(F_{1r})^2$.

首先, 估计 $(F_{0r})^2$. 由 (3.16),

$$F_{0r} \leq C \sum'_{j, d, l, |r| \pm |j| \pm |d| \pm |l| = 0} |w_j w_d w_l|.$$

当 $r = 0$ 和 -0 时, 有

$$F_{00}, F_{0-0} \leq C \sum'_{j, d, l, \pm |j| \pm |d| \pm |l| = 0} |w_j w_d w_l|$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C \left[|w_0|^3 + |w_{-0}|^3 + 3|w_0^2 w_{-0}| + 3|w_0 w_{-0}^2| + 3(|w_0| + |w_{-0}|) \right. \\
 &\quad \times \sum'_{j,d \neq 0, -0, \pm|j| \pm |d|=0} |w_j w_d| + \sum'_{j,d,l \neq 0, -0, \pm|j| \pm |d| \pm |l|=0} |w_j w_d w_l| \Big] \\
 &\leq C \left[(|w_0| + |w_{-0}|)^3 + (|w_0| + |w_{-0}|) \sum'_{j,d \neq 0, -0, \pm|j| \pm |d|=0} |w_j w_d| \right. \\
 &\quad \left. + \sum'_{j,d,l \neq 0, -0, \pm|j| \pm |d| \pm |l|=0} |w_j w_d w_l| \right].
 \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
 F_{00}^2, F_{0-0}^2 &\leq C \left[(|w_0| + |w_{-0}|)^6 + (|w_0| + |w_{-0}|)^2 \left(\sum'_{j,d \neq 0, -0, \pm|j| \pm |d|=0} |w_j w_d| \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left(\sum'_{j,d,l \neq 0, -0, \pm|j| \pm |d| \pm |l|=0} |w_j w_d w_l| \right)^2 \right].
 \end{aligned}$$

假设

$$\tilde{w}_j := |w_j| + |w_{-j}|, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (3.23)$$

则得

$$\begin{aligned}
 F_{00}^2, F_{0-0}^2 &\leq C \left[\tilde{w}_0^6 + \tilde{w}_0^2 \left(\sum_{j,d \neq 0, j+d=0} \tilde{w}_j \tilde{w}_d \right)^2 + \left(\sum_{j,d,l \neq 0, j+d+l=0} \tilde{w}_j \tilde{w}_d \tilde{w}_l \right)^2 \right] \\
 &= C [\tilde{w}_0^6 + \tilde{w}_0^2 (\tilde{w} * \tilde{w})_0^2 + (\tilde{w} * \tilde{w} * \tilde{w})_0^2] \\
 &= C [|w_0|^6 + |w_0|^2 |(\tilde{w} * \tilde{w})_0|^2 + |(\tilde{w} * \tilde{w} * \tilde{w})_0|^2].
 \end{aligned} \quad (3.24)$$

当 $r \neq 0$ 和 -0 时, 我们有

$$\begin{aligned}
 F_{0r} &\leq C \left[(|w_0|^2 + |w_{-0}|^2 + 2|w_0 w_{-0}|) \sum'_{j \neq 0, -0, |r| \pm |j|=0} |w_j| \right. \\
 &\quad + (|w_0| + |w_{-0}|) \sum'_{j,d \neq 0, -0, |r| \pm |j| \pm |d|=0} |w_j w_d| \\
 &\quad \left. + \sum'_{j,d,l \neq 0, -0, |r| \pm |j| \pm |d| \pm |l|=0} |w_j w_d w_l| \right].
 \end{aligned}$$

因此, 利用 (3.23) 可得

$$\begin{aligned}
 F_{0r}^2 &\leq C \left[(|w_0| + |w_{-0}|)^4 \left(\sum'_{j \neq 0, -0, |r| \pm |j|=0} |w_j| \right)^2 \right. \\
 &\quad + (|w_0| + |w_{-0}|)^2 \left(\sum'_{j,d \neq 0, -0, |r| \pm |j| \pm |d|=0} |w_j w_d| \right)^2 \\
 &\quad \left. + \left(\sum'_{j,d,l \neq 0, -0, |r| \pm |j| \pm |d| \pm |l|=0} |w_j w_d w_l| \right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\leq C[|\tilde{w}_0|^4|\tilde{w}_r|^2 + |\tilde{w}_0|^2|(\tilde{w} * \tilde{w})_r|^2 + |(\tilde{w} * \tilde{w} * \tilde{w})_r|^2]. \quad (3.25)$$

其次, 估计 F_{1r}^2 . 利用引理 3.4, 可得

$$\begin{aligned} F_{1r}^2 &\leq C \sum_{|k| \geq 1} [k]^{2m+1} \left| \sum'_{j,d,l} F_{k,rjdl} e^{i\langle k, \vartheta \rangle} w_j w_d w_l \right|^2 \\ &\leq C \sum_{|k| \geq 1} [k]^{2m+1} \left(\sum'_{j,d,l} |F_{k,rjdl}| |e^{i\langle k, \vartheta \rangle}| |w_j w_d w_l| \right)^2 \\ &= C \sum_{|k| \geq 1} [k]^{2m+1} |e^{i\langle k, \vartheta \rangle}|^2 \left(\sum'_{j,d,l} |F_{k,rjdl}| |w_j w_d w_l| \right)^2. \end{aligned}$$

再由 (3.21), 得

$$F_{1r}^2 \leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}} \sum_{|k| \geq 1} [k]^{4m+11} |e^{i\langle k, \vartheta \rangle}|^2 \left(\sum'_{j,d,l} \sum_{\tau, \tau \pm |r| \pm |j| \pm |d| \pm |l|=0} |g_k^\tau| |w_j w_d w_l| \right)^2. \quad (3.26)$$

然而, 当 $r = 0$ 和 -0 时,

$$\begin{aligned} &\sum'_{j,d,l} \sum_{\tau, \tau \pm |r| \pm |j| \pm |d| \pm |l|=0} |g_k^\tau| |w_j w_d w_l| \\ &= (|w_0| + |w_{-0}|)^3 |g_k^0| + (|w_0| + |w_{-0}|)^2 \sum'_{j \neq 0, -0} \sum_{\tau, \tau \pm |j|=0} |g_k^\tau| |w_j| \\ &\quad + (|w_0| + |w_{-0}|) \sum'_{j,d \neq 0, -0} \sum_{\tau, \tau \pm |j| \pm |d|=0} |g_k^\tau| |w_j w_d| \\ &\quad + \sum'_{j,d,l \neq 0, -0} \sum_{\tau, \tau \pm |j| \pm |d| \pm |l|=0} |g_k^\tau| |w_j w_d w_l| \end{aligned}$$

成立. 因此, 再由 (3.26), 得

$$\begin{aligned} F_{10}^2, F_{1-0}^2 &\leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}} \sum_{|k| \geq 1} [k]^{4m+11} |e^{i\langle k, \vartheta \rangle}|^2 \left[(|w_0| + |w_{-0}|)^6 |g_k^0|^2 \right. \\ &\quad + (|w_0| + |w_{-0}|)^4 \left(\sum'_{j \neq 0, -0} \sum_{\tau, \tau \pm |j|=0} |g_k^\tau| |w_j| \right)^2 \\ &\quad + (|w_0| + |w_{-0}|)^2 \left(\sum'_{j,d \neq 0, -0} \sum_{\tau, \tau \pm |j| \pm |d|=0} |g_k^\tau| |w_j w_d| \right)^2 \\ &\quad \left. + \left(\sum'_{j,d,l \neq 0, -0} \sum_{\tau, \tau \pm |j| \pm |d| \pm |l|=0} |g_k^\tau| |w_j w_d w_l| \right)^2 \right]. \quad (3.27) \end{aligned}$$

对 $0 \neq \tau \in \mathbb{Z}$, 定义 $\tilde{g}_k^\tau := |g_k^\tau| + |g_k^{-\tau}|$, $\tilde{g}_k^0 := 2|g_k^0|$, 对每个 $0 \neq k \in \mathbb{Z}^m$, 定义

$$\tilde{g}_k := \{\dots, \tilde{g}_k^2, \tilde{g}_k^{-1}, \tilde{g}_k^0, \tilde{g}_k^1, \tilde{g}_k^2, \dots\}. \quad (3.28)$$

由 (3.27) 和 (3.23), 得

$$F_{10}^2, F_{1-0}^2 \leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}} \sum_{|k| \geq 1} [k]^{4m+11} |e^{i\langle k, \vartheta \rangle}|^2 [|\tilde{w}_0|^6 |\tilde{g}_k^0|^2 + |\tilde{w}_0|^4 |(\tilde{g}_k * \tilde{w})_0|^2]$$

$$+ |\tilde{w}_0|^2 |(\tilde{g}_k * \tilde{w} * \tilde{w})_0|^2 + |(\tilde{g}_k * \tilde{w} * \tilde{w})_0|^2]. \quad (3.29)$$

当 $r \neq 0$ 和 -0 时,

$$\begin{aligned} & \sum'_{j,d,l} \sum_{\tau, \tau \pm |r| \pm |j| \pm |d| \pm |l|=0} |g_k^\tau| |w_j w_d w_l| \\ &= (|w_0| + |w_{-0}|)^3 \sum'_{\tau \pm |r|=0} |g_k^\tau| + (|w_0| + |w_{-0}|)^2 \sum'_{j \neq 0, -0} \sum_{\tau, \tau \pm |r| \pm |j|=0} |g_k^\tau| |w_j| \\ &+ (|w_0| + |w_{-0}|) \sum'_{j,d \neq 0, -0} \sum_{\tau, \tau \pm |r| \pm |j| \pm |d|=0} |g_k^\tau| |w_j w_d| \\ &+ \sum'_{j,d,l \neq 0, -0} \sum_{\tau, \tau \pm |r| \pm |j| \pm |d| \pm |l|=0} |g_k^\tau| |w_j w_d w_l|. \end{aligned}$$

根据 (3.26) 和 (3.23) 得

$$\begin{aligned} F_{1r}^2 &\leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}} \sum_{|k| \geq 1} [k]^{4m+11} |e^{i\langle k, \vartheta \rangle}|^2 \left[(|w_0| + |w_{-0}|)^6 \left(\sum'_{\tau \pm |r|=0} |g_k^\tau| \right)^2 \right. \\ &+ (|w_0| + |w_{-0}|)^4 \left(\sum'_{j \neq 0, -0} \sum_{\tau, \tau \pm |r| \pm |j|=0} |g_k^\tau w_j| \right)^2 \\ &+ (|w_0| + |w_{-0}|)^2 \left(\sum'_{j,d \neq 0, -0} \sum_{\tau, \tau \pm |r| \pm |j| \pm |d|=0} |g_k^\tau| |w_j w_d| \right)^2 \\ &\left. + \left(\sum'_{j,d,l \neq 0, -0} \sum_{\tau, \tau \pm |r| \pm |j| \pm |d| \pm |l|=0} |g_k^\tau| |w_j w_d w_l| \right)^2 \right] \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}} \sum_{|k| \geq 1} [k]^{4m+11} |e^{i\langle k, \vartheta \rangle}|^2 (|\tilde{w}_0|^6 |\tilde{g}_k^r|^2 + |\tilde{w}_0|^4 |(\tilde{g}_k * \tilde{w})_r|^2 \\ &+ |\tilde{w}_0|^2 |(\tilde{g}_k * \tilde{w} * \tilde{w})_r|^2 + |(\tilde{g}_k * \tilde{w} * \tilde{w} * \tilde{w})_r|^2). \end{aligned} \quad (3.30)$$

最后, 计算 $(\|F_w\|_{a,s}^2)^2$. 一方面, 根据 (3.24) 和 (3.25), 有

$$\begin{aligned} & F_{00}^2 + F_{0-0}^2 + \sum_{|r| \geq 1} F_{0r}^2 |r|^{2s} e^{2a|r|} \\ &\leq C \left[|\tilde{w}_0|^6 + |\tilde{w}_0|^2 |(\tilde{w} * \tilde{w})_0|^2 + |(\tilde{w} * \tilde{w} * \tilde{w})_0|^2 + |\tilde{w}_0|^4 \sum_{|r| \geq 1} |\tilde{w}_r|^2 |r|^{2s} e^{2a|r|} \right. \\ &\quad \left. + |\tilde{w}_0|^2 \sum_{|r| \geq 1} |(\tilde{w} * \tilde{w})_r|^2 |r|^{2s} e^{2a|r|} + \sum_{|r| \geq 1} |(\tilde{w} * \tilde{w} * \tilde{w})_r|^2 |r|^{2s} e^{2a|r|} \right] \\ &= C \left[|\tilde{w}_0|^4 \left(|\tilde{w}_0|^2 + \sum_{|r| \geq 1} |\tilde{w}_r|^2 |r|^{2s} e^{2a|r|} \right) \right. \\ &\quad \left. + |\tilde{w}_0|^2 \left(|(\tilde{w} * \tilde{w})_0|^2 + \sum_{|r| \geq 1} |(\tilde{w} * \tilde{w})_r|^2 |r|^{2s} e^{2a|r|} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(|(\tilde{w} * \tilde{w} * \tilde{w})_0|^2 + \sum_{|r| \geq 1} |(\tilde{w} * \tilde{w} * \tilde{w})_r|^2 |r|^{2s} e^{2a|r|} \right) \right] \\ &= C [|\tilde{w}_0|^4 (\|\tilde{w}\|_{a,s}^1)^2 + |\tilde{w}_0|^2 (\|\tilde{w} * \tilde{w}\|_{a,s}^1)^2 + (\|\tilde{w} * \tilde{w} * \tilde{w}\|_{a,s}^1)^2] \end{aligned}$$

成立. 再利用引理 2.2 得

$$\begin{aligned} F_{00}^2 + F_{0-0}^2 + \sum_{|r| \geq 1} F_{0r}^2 |r|^{2s} e^{2a|r|} &\leq C[|\tilde{w}_0|^4 (\|\tilde{w}\|_{a,s}^1)^2 + |\tilde{w}_0|^2 (\|\tilde{w}\|_{a,s}^1)^4 + (\|\tilde{w}\|_{a,s}^1)^6] \\ &\leq C(\|\tilde{w}\|_{a,s}^1)^6 \leq C(\|w\|_{a,s}^2)^6. \end{aligned} \quad (3.31)$$

另一方面, 由 (3.29) 和 (3.30), 可得

$$\begin{aligned} F_{10}^2 + F_{1-0}^2 + \sum_{|r| \geq 1} F_{1r}^2 |r|^{2s} e^{2a|r|} &\leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}} \sum_{|k| \geq 1} [k]^{4m+11} |e^{i\langle k, \vartheta \rangle}|^2 \left[|\tilde{w}_0|^6 \left(|\tilde{g}_k^0|^2 + \sum_{|r| \geq 1} |\tilde{g}_k^r|^2 e^{2a|r|} |r|^{2s} \right) \right. \\ &\quad + |\tilde{w}_0|^4 \left(|(\tilde{g}_k * \tilde{w})_0|^2 + \sum_{|r| \geq 1} |(\tilde{g}_k * \tilde{w})_r|^2 e^{2a|r|} |r|^{2s} \right) \\ &\quad + |\tilde{w}_0|^2 \left(|(\tilde{g}_k * \tilde{w} * \tilde{w})_0|^2 + \sum_{|r| \geq 1} |(\tilde{g}_k * \tilde{w} * \tilde{w})_r|^2 e^{2a|r|} |r|^{2s} \right) \\ &\quad \left. + \left(|(\tilde{g}_k * \tilde{w} * \tilde{w} * \tilde{w})_0|^2 + \sum_{|r| \geq 1} |(\tilde{g}_k * \tilde{w} * \tilde{w} * \tilde{w})_r|^2 e^{2a|r|} |r|^{2s} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

成立. 然而, 对每个 $0 \neq k \in \mathbb{Z}^m$, 由文献 [21, 引理 A.1], 结合 (H₁)、(H₂) 和 (3.17), 得

$$|g_k^r| < \|g(\vartheta, x)\|_{D_1(\sigma_1) \times D_2(2a)} e^{-|k|\sigma_1} e^{-2a|r|}$$

对于 $r \in \mathbb{Z}$ 总成立. 因此, 对所有 $(\vartheta, x) \in D_1(\sigma_1) \times D_2(2a)$,

$$\begin{aligned} (\|\tilde{g}_k\|_{a,s}^1)^2 &= (\tilde{g}_k^0)^2 + \sum_{|r| \geq 1} (\tilde{g}_k^r)^2 e^{2a|r|} |r|^{2s} \\ &\leq (\|g(\vartheta, x)\|_{D_1(\sigma_1) \times D_2(2a)})^2 e^{-2|k|\sigma_1} \left(1 + \sum_{|r| \geq 1} e^{-2a|r|} |r|^{2s} \right). \end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{|r| \geq 1} e^{-2a|r|} |r|^{2s}$ 收敛, 因此, 上述不等式有界且

$$(\|\tilde{g}_k\|_{a,s}^1)^2 \leq C e^{-2|k|\sigma_1} \quad (3.33)$$

成立, 其中常数 C 依赖于 g 、 σ_1 、 a 和 s . 上式结合 (3.32) 得到

$$\begin{aligned} F_{10}^2 + F_{1-0}^2 + \sum_{|r| \geq 1} F_{1r}^2 |r|^{2s} e^{2a|r|} &\leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}} \sum_{|k| \geq 1} [k]^{4m+11} |e^{i\langle k, \vartheta \rangle}|^2 [|\tilde{w}_0|^6 (\|\tilde{g}_k\|_{a,s}^1)^2 \\ &\quad + |\tilde{w}_0|^4 (\|\tilde{g}_k * \tilde{w}\|_{a,s}^1)^2 + |\tilde{w}_0|^2 (\|\tilde{g}_k * \tilde{w} * \tilde{w}\|_{a,s}^1)^2 \\ &\quad + (\|\tilde{g}_k * \tilde{w} * \tilde{w} * \tilde{w}\|_{a,s}^1)^2]. \end{aligned}$$

利用引理 2.2 得

$$\begin{aligned} F_{10}^2 + F_{1-0}^2 + \sum_{|r| \geq 1} F_{1r}^2 |r|^{2s} e^{2a|r|} &\leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}} \sum_{|k| \geq 1} [k]^{4m+11} |e^{i\langle k, \vartheta \rangle}|^2 [|\tilde{w}_0|^6 (\|\tilde{g}_k\|_{a,s}^1)^2 \\ &\quad + |\tilde{w}_0|^4 (\|\tilde{g}_k\|_{a,s}^1 \|\tilde{w}\|_{a,s}^1)^2 + |\tilde{w}_0|^2 (\|\tilde{g}_k\|_{a,s}^1 \|\tilde{w}\|_{a,s}^1 \|\tilde{w}\|_{a,s}^1)^2 \\ &\quad + (\|\tilde{g}_k\|_{a,s}^1 \|\tilde{w}\|_{a,s}^1)^2]. \end{aligned}$$

$$+ (\|\tilde{g}_k\|_{a,s}^1 \|\tilde{w}\|_{a,s}^1 \|\tilde{w}\|_{a,s}^1 \|\tilde{w}\|_{a,s}^1)^2].$$

再由 (3.33) 得, 对所有 $(\vartheta, x) \in D_1(\sigma_1/2) \times D_2(2a)$, 下式成立

$$F_{10}^2 + F_{1-0}^2 + \sum_{|r| \geq 1} F_{1r}^2 |r|^{2s} e^{2a|r|} \leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}} (\|\tilde{w}\|_{a,s}^1)^6 \left(\sum_{|k| \geq 1} [k]^{4m+11} e^{|k|\sigma_1} \cdot e^{-2|k|\sigma_1} \right). \quad (3.34)$$

然而, 众所周知, 模为固定值的集合, 元素个数满足 (参见文献 [22])

$$\#\{k \in \mathbb{Z}^m : |k| = l\} \leq 2^m l^{m-1}, \quad l \in \mathbb{Z}^+ := \{1, 2, \dots\}. \quad (3.35)$$

因此, 根据级数 $\sum_{1 \leq |k|=l}^\infty 2^m l^{5m+10} e^{-l\sigma_1}$ 的收敛性, 有

$$\sum_{|k| \geq 1} [k]^{4m+11} e^{|k|\sigma_1} \cdot e^{-2|k|\sigma_1} < \sum_{1 \leq |k|=l}^\infty 2^m l^{m-1} l^{4m+11} e^{-l\sigma_1} \leq C,$$

其中 C 是一个依赖于 σ_1 和 m 的常数. 再根据 (3.34), 得

$$F_{10}^2 + F_{1-0}^2 + \sum_{|r| \geq 1} F_{1r}^2 |r|^{2s} e^{2a|r|} \leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}} (\|\tilde{w}\|_{a,s}^1)^6 \leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}} (\|w\|_{a,s}^2)^6, \quad (3.36)$$

其中常数 C 依赖于 ϱ 、 μ 、 g 、 σ_1 、 a 、 m 和 s . 由 (3.22), 得

$$\begin{aligned} (\|F_w\|_{a,s}^2)^2 &= |F_{w_0}|^2 + |F_{w_{-0}}|^2 + \sum_{|r| \geq 1} |F_{w_r}|^2 e^{2a|r|} |r|^{2s} \\ &\leq C \left(F_{00}^2 + F_{10}^2 + F_{0-0}^2 + F_{1-0}^2 + \sum_{|r| \geq 1} (F_{0r}^2 + F_{1r}^2) |r|^{2s} e^{2a|r|} \right) \\ &= C \left(F_{00}^2 + F_{0-0}^2 + \sum_{|r| \geq 1} (F_{0r}^2) |r|^{2s} e^{2a|r|} \right) \\ &\quad + C \left(F_{10}^2 + F_{1-0}^2 + \sum_{|r| \geq 1} (F_{1r}^2) |r|^{2s} e^{2a|r|} \right) \end{aligned}$$

成立. 再根据 (3.31) 和 (3.36), 得

$$(\|F_w\|_{a,s}^2)^2 \leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}} (\|w\|_{a,s}^2)^6, \quad (3.37)$$

其中常数 C 依赖于 ϱ 、 n 、 η 、 μ 、 g 、 σ_1 、 a 、 m 和 s . 因此,

$$\|F_w\|_{a,s}^2 \leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}} (\|w\|_{a,s}^2)^3.$$

根据元素的解析性和 F_w 的有界性即得 F_w 的解析性. 结论证毕.

第 3 步 估计 $\check{G}$. 由 (3.14), 我们假设

$$\check{G} = \check{G}_0 + \check{G}_1,$$

其中

$$\check{G}_0 = \sum'_{(i,j,d,l) \notin \mathcal{L}_n, |i| \pm |j| \pm |d| \pm |l| = 0} I_{ijdl}, \quad \check{G}_1 = \sum'_{(i,j,d,l) \notin \mathcal{L}_n} \sum_{|k| \geq 1} I_{k,ijdl}$$

成立. 因为 $(i, j, d, l) \notin \mathcal{L}_n$, $\min\{|i|, |j|, |d|, |l|\} \geq n+1 \geq 1$, 所以, $(i, j, d, l) \in \{\dots, -(n+2), -(n+1), n+1, n+2, \dots\}$. 利用 (3.9) 和 (3.10), 有

$$|\check{G}_0| \leq C \sum_{|i| \pm |j| \pm |d| \pm |l| = 0}'' |w_i w_j w_d w_l|, \quad (3.38)$$

其中加和号的上标''表示指标取自集合 $\{\dots, -(n+2), -(n+1), n+1, n+2, \dots\}$, 常数 C 依赖于 g 和 μ . 假设

$$\tilde{w}_j = \begin{cases} |w_j| + |w_{-j}|, & |j| \geq n+1, \\ 0, & |j| \leq n, \end{cases} \quad (3.39)$$

则得

$$|\check{G}_0| \leq C |(\tilde{w} * \tilde{w} * \tilde{w} * \tilde{w})_0| \leq C (\|\tilde{w}\|_{a,s}^1)^4 \leq C (\|Z\|_{a,s})^4.$$

根据 (3.17)–(3.20)、(3.28) 和 (3.39), 类似于 (3.26) 和 (3.29), 我们得

$$\begin{aligned} |\check{G}_1| &\leq C \sum_{|k| \geq 1} |e^{i\langle k, \vartheta \rangle}| |(g_k * \tilde{w} * \tilde{w} * \tilde{w} * \tilde{w})_0| \\ &\leq C \sum_{|k| \geq 1} |e^{i\langle k, \vartheta \rangle}| \|\tilde{g}_k\|_{a,s}^1 (\|\tilde{w}\|_{a,s}^1)^4. \end{aligned}$$

再由 (3.33) 得

$$|\check{G}_1| \leq C (\|\tilde{w}\|_{a,s}^1)^4 \sum_{|k| \geq 1} |e^{i\langle k, \vartheta \rangle}| e^{-|k|\sigma_1},$$

其中 C 依赖于 μ 、 g 、 σ_1 、 a 和 s . 因此, 对所有 $(\vartheta, x) \in D_1(\sigma_1/2) \times D_2(2a)$,

$$|\check{G}_1| \leq C (\|\tilde{w}\|_{a,s}^1)^4 \sum_{|k| \geq 1} e^{|k|\sigma_1/2} e^{-|k|\sigma_1} \leq C (\|\tilde{w}\|_{a,s}^1)^4 \leq C (\|Z\|_{a,s})^4,$$

其中 C 依赖于 μ 、 g 、 σ_1 、 a 和 s . 综上可得 $|\check{G}| = \mathcal{O}((\|Z\|_{a,s})^4)$.

第 4 步 估计 K . 假设

$$K = \{G, F\} + \int_0^1 (1-t) \{\{H, F\}, F\} \circ X_{\mathcal{F}}^t dt.$$

利用引理 2.3 和 (3.37), 根据事实

$$|\{\Lambda, F\}| = |\bar{G} + \check{G} - G| = \mathcal{O}((\|w\|_{a,s}^2)^4),$$

可得

$$|\{G, F\}| \leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}} (\|w\|_{a,s}^2)^6, \quad |\{\{\Lambda, F\}, F\}| \leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}} (\|w\|_{a,s}^2)^6,$$

并且 $|\{\{G, F\}, F\}| \leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}} (\|w\|_{a,s}^2)^8$ 和事实 $H = \Lambda + \varepsilon G$ 成立. 因此,

$$|K| \leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}} (\|w\|_{a,s}^2)^6,$$

即对于 $\|w\|_{a,s}^2 \leq 1$, 有 $\varepsilon^{\frac{1}{3}} |K| = \mathcal{O}(\|w\|_{a,s}^2)^6$. 证毕. $\square$

固定 $n \geq 0$, 先令 $\mathcal{J} = \{0, 1, \dots, n\}$. 对于一般指标集 $\mathcal{J}$ 的讨论实际上没有差别. 我们引入作用量 - 角变量如下:

$$z_j = \begin{cases} \sqrt{I_j} e^{-i\theta_j}, & 0 \leq j \leq n, \\ z_j, & j \geq n+1. \end{cases} \quad (3.40)$$

标准型变为

$$\Lambda + \varepsilon \bar{G} = \langle \omega, J \rangle + \sum_{0 \leq j \leq n} \sqrt{\lambda_j} I_j + \sum_{j > n} \sqrt{\lambda_j} z_j \bar{z}_j + \frac{\varepsilon}{2} \langle AI, I \rangle + \varepsilon \langle BI, \hat{Z} \rangle,$$

且 $I = (I_0, I_1, \dots, I_n)$, $A = (\bar{G}_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$, $B = (\bar{G}_{ij})_{0 \leq j \leq n < i}$, $\hat{Z} = (|z_{n+1}|^2, |z_{n+2}|^2, \dots)$. 假设参数向量为 $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_j)_{0 \leq j \leq n}$, 新作用量 $\tilde{\rho} = (\tilde{\rho}_j)_{0 \leq j \leq n}$ 如下:

$$I_j = \varepsilon \tilde{\xi}_j + \tilde{\rho}_j, \quad \tilde{\xi}_j \in [0, 1], \quad |\tilde{\rho}_j| < \varepsilon^2, \quad 0 \leq j \leq n,$$

则标准型变为

$$\begin{aligned} \Lambda + \varepsilon \bar{G} = & \langle \omega, J \rangle + \sum_{0 \leq j \leq n} \sqrt{\lambda_j} \tilde{\rho}_j + \sum_{j > n} \sqrt{\lambda_j} z_j \bar{z}_j \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{0 \leq i, j \leq n} \bar{G}_{ij} \tilde{\rho}_i \tilde{\xi}_j + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{0 \leq i, j \leq n} \bar{G}_{ij} \tilde{\xi}_i \tilde{\rho}_j + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{0 \leq i, j \leq n} \bar{G}_{ij} \tilde{\rho}_i \tilde{\rho}_j \\ & + \varepsilon^2 \sum_{0 \leq i \leq n < j} \bar{G}_{ij} \tilde{\xi}_i |z_j|^2 + \varepsilon \sum_{0 \leq j \leq n < i} \bar{G}_{ij} \tilde{\rho}_j |z_i|^2. \end{aligned}$$

因此, 总的 Hamilton 函数为

$$\begin{aligned} H = & \langle \omega, J \rangle + \sum_{0 \leq j \leq n} \sqrt{\lambda_j} \tilde{\rho}_j + \sum_{j > n} \sqrt{\lambda_j} z_j \bar{z}_j + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{0 \leq i, j \leq n} \bar{G}_{ij} \tilde{\rho}_i \tilde{\xi}_j \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{0 \leq i, j \leq n} \bar{G}_{ij} \tilde{\xi}_i \tilde{\rho}_j + \varepsilon^2 \sum_{0 \leq j \leq n < i} \bar{G}_{ij} \tilde{\xi}_j |z_i|^2 + P, \end{aligned} \quad (3.41)$$

其中

$$P = \varepsilon \check{G} + \varepsilon \check{G} + \varepsilon^2 K, \quad |\check{G}| = \mathcal{O}(|\tilde{\rho}|^2) + \mathcal{O}(|\tilde{\rho}| \|\hat{Z}\|_{a,s}). \quad (3.42)$$

本节最后给出摄动项 P 的估计. 首先, 引入文献 [4] 的注释. 假设 $z = (z_0, z_1, z_2, \dots)$ 且 $\|z\|_{a,s} < \infty$; $l_{n+1}^{a,s}$ 是由复序列 $Z = \{z_j \in \mathbb{C} : j \geq n+1\}$ 构成的 Hilbert 空间 $\|Z\|_{a,s} := \|\tilde{Z}\|_{a,s}$, $\tilde{Z} = \{\tilde{z}_j \in \mathbb{C}, j \geq 0\}$, 当 $0 \leq j \leq n$ 时, $\tilde{z}_j = 0$, 而当 $j \geq n+1$ 时, $\tilde{z}_j = z_j$; $x' = \vartheta \oplus \theta$, $y = J \oplus \tilde{\rho}$, $\zeta = \omega \oplus (\tilde{\xi}_j)_{0 \leq j \leq n}$, 则相空间为

$$\mathcal{P}^{a,s} = \hat{\mathbb{T}}^{m+n+1} \times \mathbb{C}^{m+n+1} \times l_{n+1}^{a,s} \times l_{n+1}^{a,s} \ni (x', y, Z, \bar{Z}),$$

且

$$D(\sigma, r) := \{(x', y, Z, \bar{Z}) \in \mathcal{P}^{a,s} : |\operatorname{Im} x'| < \sigma, |y| < r^2, \|Z\|_{a,s} + \|\bar{Z}\|_{a,s} < r\},$$

其中 $\theta = (\theta_j)_{0 \leq j \leq n}$, $\hat{\mathbb{T}}^{m+n+1}$ 是普通 $m+n+1$ 维环面 $\mathbb{T}^{m+n+1}$ 的复化空间, $\sigma > 0$, $r > 0$. 对于 $W = (x', y, Z, \bar{Z}) \in \mathcal{P}^{a,s}$, 定义加权相模

$$|W|_r = |W|_{\bar{s}, r} = |x'| + \frac{1}{r^2} |y| + \frac{1}{r} \|Z\|_{a,\bar{s}} + \frac{1}{r} \|\bar{Z}\|_{a,\bar{s}},$$

对映射 $U : D(\sigma, r) \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}^{a, \bar{s}}$, 定义其 Lipschitz 半模

$$|U|_r^{\mathcal{L}} = \sup_{\xi \neq \zeta} \frac{|\Delta_{\xi\zeta} U|_r}{|\xi - \zeta|},$$

其中 Σ 是参数集合 $\Omega \times [0, 1]^{n+1}$, $\Delta_{\xi\zeta} U = U(\cdot, \xi) - U(\cdot, \zeta)$, 上确界指取遍所有 Σ 的上确界. 用 X_P 定义 Hamilton 函数 P 的向量场

$$X_P = (\partial_y P, -\partial_{x'} P, -i\nabla_{\bar{Z}} P, i\nabla_Z P),$$

相应的辛结构为 $dx' \wedge dy + i dZ \wedge d\bar{Z}$. 符号 $\mathcal{A}(l^{a,s}, l^{a,\bar{s}})$ 表示从空间 $l^{a,s}$ 的原点某邻域映到 $l^{a,\bar{s}}$ 的实解析映射类.

引理 3.5 摄动 $P(x', y, Z, \bar{Z}; \zeta)$ 对于变量 $(x', y, Z, \bar{Z}) \in D(2\sigma, 2r)$ 和给定的 $\sigma, r > 0$ 是实解析的, 而 P 对于参数 $\zeta \in \Sigma$ 是 Lipschitz 的. 对于每一个 $\zeta \in \Sigma$, P 的梯度满足

$$\partial_Z P, \partial_{\bar{Z}} P \in \mathcal{A}(l_{n+1}^{a,s}, l_{n+1}^{a,\bar{s}}).$$

另外, 对于摄动项 P , 有如下估计:

$$\sup_{D(\sigma,r) \times \Sigma} |X_P|_r \leq C\varepsilon^{\frac{8}{3}}, \quad \sup_{D(\sigma,r) \times \Sigma} |\partial_{\zeta} X_P|_r \leq C\varepsilon^{\frac{8}{3}},$$

其中 $\sigma = \frac{\sigma_1}{4}$, $r = \frac{\varepsilon}{2}$.

证明 由 (3.40) 和事实 $\|Z\|_{a,s} \leq 2r = \varepsilon$, 我们有 $\|z\|_{a,s} \leq C\varepsilon^{1/2}$, 其中 $z = (z_0, z_1, \dots, z_n) \oplus Z$. 由性质 3.1 和 (3.42) 得 $|\check{G}| = \mathcal{O}(\varepsilon^4)$, $|\check{G}| = \mathcal{O}(\varepsilon^4)$, $|K| = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{8}{3}})$. 因此, $|P| = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{14}{3}})$ 在 $D(2\sigma, 2r)$ 上成立. 对 $\partial_{x'} P$, $\partial_y P$, $\partial_{\bar{Z}} P$ 和 $\partial_Z P$ 利用 Cauchy 估计得 $|\partial_{x'} P| = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{14}{3}})$, $|\partial_y P| = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{8}{3}})$, $|\partial_{\bar{Z}} P| = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{11}{3}})$, $|\partial_Z P| = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{11}{3}})$ 在 $D(\sigma, r)$ 上成立. 因此有 $\sup_{D(\sigma,r) \times \Sigma} |X_P|_r \leq C\varepsilon^{\frac{8}{3}}$. 再对 ζ 用 Cauchy 估计, 得 $\sup_{D(\sigma,r) \times \Sigma} |\partial_{\zeta} X_P|_r \leq C\varepsilon^{\frac{8}{3}}$ 也成立. 证毕. $\square$

4 偏微分方程的无穷维 KAM 定理

为了证明主要结论 (定理 5.1), 我们应用一个现有的 KAM 定理^[2, 4], 叙述如下.

考查下列 n' 维作用量 - 角变量和无穷维 Cardan 坐标 (u, v) 下的线性可积 Hamilton 函数族的摄动

$$H_0 = \sum_{j=1}^{n'} \hat{\omega}_j(\xi) y_j + \frac{1}{2} \sum_{j=n'+1}^{\infty} \hat{\Omega}_j(\xi) (u_j^2 + v_j^2),$$

相应的辛结构为

$$\sum_{j=1}^{n'} dx'_j \wedge dy_j + \sum_{j=n'+1}^{\infty} du_j \wedge dv_j,$$

其中 $n' > 0$ 是一个整数. 切频 $\hat{\omega} = (\hat{\omega}_1, \dots, \hat{\omega}_{n'})$ 和法频 $\hat{\Omega} = (\hat{\Omega}_{n'+1}, \hat{\Omega}_{n'+2}, \dots)$ 依赖于 n' 个参数 $\xi \in \Pi \subset \mathbb{R}^{n'}$, 其中 Π 是正 Lebesgue 测度下的有界闭集.

对每个 ξ , 必然存在频率为 $\hat{\omega}(\xi)$ 的 n' 维环面 $\mathcal{T}_0^{n'} = \mathbb{T}^{n'} \times \{0, 0, 0\}$. 其法平面的原点是一个椭圆不动点, 特征频率为 $\hat{\Omega}(\xi)$. 因此, $\mathcal{T}_0^{n'}$ 线性稳定. 下列定理欲证明在 H_0 的小摄动 $H = H_0 + P$ 下, 线性稳定旋转环面族的大部分能保持下来. 首先假设如下.

假设 A (非退化性) 映射 $\xi \mapsto \widehat{\omega}(\xi)$ 是 Π 和其象间的 Lipschitz 同胚. 对于所有整向量 $(k, l) \in \mathbb{Z}^{n'} \times \mathbb{Z}^\infty$, $1 \leq |l| \leq 2$, 有 $\text{meas} \{ \xi : \langle k, \widehat{\omega}(\xi) \rangle + \langle l, \widehat{\Omega}(\xi) \rangle = 0 \} = 0$ 和 $\langle l, \widehat{\Omega}(\xi) \rangle \neq 0$ 在 Π 上成立.

假设 B (谱的渐近性和 Lipschitz 性) 存在 $\varsigma \geq 1$ 和 $\delta < \varsigma - 1$ 使得 $\widehat{\Omega}_j(\xi) = j^\varsigma + \cdots + O(j^\delta)$, 此处省略号表示阶数低于 j 的固定项, 即存在固定的、不依赖于参数的序列 $\overline{\Omega}$ 和 $\overline{\Omega}_j = j^\varsigma + \cdots$ 使得 $\widehat{\Omega}_j - \overline{\Omega}_j$ 是一个 Lipschitz 映射 $\widehat{\Omega}_j - \overline{\Omega}_j : \Pi \rightarrow l_\infty^{-\delta}$, 其中 l_∞^p 是模 $|w|_p = \sup_j |w_j| j^p$ 有限的实序列.

假设 C (正则性) 摄动 $P(x, y, u, v; \xi)$ 对于实变量 $(x, y, u, v) \in D(\sigma, r)$ 实解析, 其中 $\sigma, r > 0$, 对于参数 $\xi \in \Pi$ 是 Lipschitz 的; 对于每个 $\xi \in \Pi$, 其梯度满足

$$P_u, P_v \in \mathcal{A}(l^{a,p}, l^{a,\bar{p}}), \quad \begin{cases} \bar{p} \geq p, & \varsigma > 1, \\ \bar{p} > p, & \varsigma = 1. \end{cases}$$

设

$$|\widehat{\omega}|_\Pi^\mathcal{L} + |\widehat{\Omega}|_{-\delta, \Pi}^\mathcal{L} \leq M < \infty, \quad |(\widehat{\omega})^{-1}|_{\widehat{\omega}(\Pi)}^\mathcal{L} \leq L < \infty. \quad (4.1)$$

引入符号 $\langle l \rangle_\varsigma = \max(1, |\sum_j j^\varsigma l_j|)$, $A_k = 1 + |k|^\tau$. 此处固定 $\tau > n' + 1$. 令 $\mathcal{Z} = \{(k, l) \neq 0, |l| \leq 2\} \subset \mathbb{Z}^{n'} \times \mathbb{Z}^\infty$.

定理 4.1 ^[4] (定理 A) 假设 $H = H_0 + P$ 满足假设 A、B 和 C, 且

$$\epsilon = \sup_{D(\sigma, r) \times \Pi} |X_P|_r + \sup_{D(\sigma, r) \times \Pi} \frac{\alpha}{M} |X_P|_r^\mathcal{L} \leq \gamma \alpha, \quad (4.2)$$

其中 $0 < \alpha \leq 1$ 是参数, γ 依赖于 n' 、 τ 和 σ , 则存在一个 Cantor 集 $\Pi_\alpha \subset \Pi$ 当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, 满足 $\text{meas}(\Pi \setminus \Pi_\alpha) \rightarrow 0$, 存在一个 Lipschitz 连续环面嵌入族 $\Phi : \mathbb{T}^{n'} \times \Pi_\alpha \rightarrow \mathcal{P}^{a, \bar{p}}$, 存在一个 Lipschitz 连续映射 $\tilde{\omega} : \Pi_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{n'}$, 使得对每个 $\xi \in \Pi_\alpha$, 限定于 $\mathbb{T}^{n'} \times \{\xi\}$ 上的映射 Φ 是实解析的椭圆旋转环面嵌入, 其 Hamilton 函数 H 在 ξ 处的频率为 $\tilde{\omega}(\xi)$.

在 $|\text{Im} x| < \frac{\sigma}{2}$ 内的每个嵌入都是实解析的,

$$\begin{aligned} |\Phi - \Phi_0|_r + \frac{\alpha}{M} |\Phi - \Phi_0|_r^\mathcal{L} &\leq \frac{c\epsilon}{\alpha}, \\ |\tilde{\omega} - \widehat{\omega}| + \frac{\alpha}{M} |\tilde{\omega} - \widehat{\omega}|^\mathcal{L} &\leq c\epsilon \end{aligned} \quad (4.3)$$

在该区域和 Π_α 上一致成立, 其中 $\Phi_0 : \mathbb{T}^{n'} \times \Pi \rightarrow \mathcal{T}_0^{n'}$ 为平凡嵌入, $c \leq \gamma^{-1}$ 依赖于与 γ 同样的参数.

而且, 存在 Lipschitz 映射 μ_j 和 Λ_j 在集合 Π 上对所有的 $j \geq 0$ 满足 $\mu_0 = \widehat{\omega}$, $\Lambda_0 = \widehat{\Omega}$ 和

$$|\mu_j - \widehat{\omega}| + \frac{\alpha}{M} |\mu_j - \widehat{\omega}|^\mathcal{L} \leq c\epsilon, \quad |\Lambda_j - \widehat{\Omega}|_{-\delta} + \frac{\alpha}{M} |\Lambda_j - \widehat{\Omega}|_{-\delta}^\mathcal{L} \leq c\epsilon,$$

使得 $\Pi \setminus \Pi_\alpha \subset \cup \mathcal{R}_{k,l}^j(\alpha)$, 其中

$$\mathcal{R}_{k,l}^j(\alpha) = \left\{ \xi \in \Pi : |\langle k, \mu_j(\xi) \rangle + \langle l, \Lambda_j(\xi) \rangle| < \alpha \frac{\langle l \rangle_d}{A_k} \right\},$$

此处并集取遍所有 $j \geq 0$ 和满足下列条件的 $(k, l) \in \mathcal{Z}$, 条件是: 对 $j \geq 1$, 有 $|k| > K_1 2^{j-1}$, 这里常数 $K_1 \geq 1$ 依赖于 n' 和 τ .

定理 4.2 ^[4] (定理 D) 假设定理 4.1 中未摄频率是参数的仿射函数, 则存在常数 $\tilde{c}$ 使得

$$\text{meas}(\Pi \setminus \Pi_\alpha) \leq \tilde{c}(\text{diam} \Pi)^{n'-1} \alpha^{\tilde{\mu}}, \quad \tilde{\mu} = \begin{cases} 1, & \varsigma > 1, \\ \frac{\kappa}{\kappa + 1 - (\varpi/4)}, & \varsigma = 1 \end{cases}$$

对充分小的 α 成立, 其中 ϖ 是任意 $[0, \min(\bar{p} - p, 1))$ 间的数. 如果 $\varsigma = 1$, 则 κ 是一个使得

$$\frac{\hat{\Omega}_i - \hat{\Omega}_j}{i - j} = 1 + \mathcal{O}(j^{-k}), \quad i > j \quad (4.4)$$

在 Π 上成立的正数.

注 4.1 由文献 [7] 的注释知, $\tilde{c} = c_1 L^{n'} M^{n'-1}$, 其中 c_1 是绝对常数.

对任意固定的 $\omega_- \in \Omega$ 和 $\omega \in \bar{\Omega} := \{\omega \in \Omega \mid |\omega - \omega_-| \leq \varepsilon\}$, 我们引入新参数 $\bar{\omega}$ 如下:

$$\omega = \omega_- + \varepsilon^2 \bar{\omega}, \quad \bar{\omega} \in [0, 1]^m. \quad (4.5)$$

因此, Hamilton 函数 (3.41) 变为

$$H = \langle \hat{\omega}(\xi), y \rangle + \langle \hat{\Omega}(\xi), \hat{Z} \rangle + P, \quad (4.6)$$

其中

$$\hat{\omega}(\xi) = \omega \oplus \check{\omega}, \quad \hat{\Omega}(\xi) = \tilde{\beta} + \varepsilon^2 B \tilde{\xi}, \quad (4.7)$$

$B = (\bar{G}_{ij})_{0 \leq j \leq n < i}$, $\check{\omega} = \tilde{\alpha} + \varepsilon^2 A \tilde{\xi}$, $A = (\bar{G}_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$, $\xi = \bar{\omega} \oplus \tilde{\xi}$, $\hat{Z} = (|z_{n+1}|^2, |z_{n+2}|^2, \dots)$, $y = J \oplus \bar{\rho}$, $\tilde{\alpha} = (\sqrt{\lambda_0}, \sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, $\tilde{\beta} = (\sqrt{\lambda_{n+1}}, \sqrt{\lambda_{n+2}}, \dots)$. 因此, $\check{\omega}_j$ ($0 \leq j \leq n$) 可以写成

$$\check{\omega}_j = \sqrt{\lambda_j} + \varepsilon^2 \sum_{i=0}^n A_{ji} \tilde{\xi}_i, \quad A_{ij} = \begin{cases} \frac{3g_0}{4\pi\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}, & \text{若 } i \neq j, \\ \frac{9g_0}{16\pi\lambda_i}, & \text{若 } i = j \neq 0, \\ \frac{3g_0}{8\pi\lambda_0}, & \text{若 } i = j = 0. \end{cases}$$

显然,

$$|\check{\omega}_j - \sqrt{\lambda_j}| \leq C\varepsilon^2 \quad (4.8)$$

对所有 $0 \leq j \leq n$ 成立, 且常数 C 依赖于 n 、 μ 和 g_0 .

引理 4.1 设 $\Pi = [0, 1]^{m+n+1}$, 有 $X_P \in \mathcal{A}(l_{n+1}^{a,s}, l_{n+1}^{a,s})$,

$$\sup_{D(\sigma,r) \times \Pi} |X_P|_r \leq C\varepsilon^{\frac{8}{3}}, \quad \sup_{D(\sigma,r) \times \Pi} |\partial_\zeta X_P|_r \leq C\varepsilon^{\frac{8}{3}}$$

成立.

证明同引理 3.5.

5 结论

定理 5.1 假设 (H_1) 和 (H_2) 成立. 对每个 $0 \leq n < \infty$ 和任意 $0 < \eta < 1$, 存在子集 $S \subset (0, \infty)$, 满足 $\text{meas } S = \mathcal{O}(\eta)$, 使得对于每一个指标集 $\mathcal{J} = \{j_0 < j_1 < j_2 < \dots < j_n\} \subset \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$, 对任意的 $\mu \in (0, \infty) \setminus S$ 和任意的 $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, 其中 ε^* 充分小, 存在子集 $\Omega \subset [\varrho, 2\varrho]^m$, $\text{meas } \Omega > 0$ 和子集 $\Sigma_\varepsilon \subset \Sigma := \Omega \times [0, 1]^{n+1}$, $\text{meas}(\Sigma \setminus \Sigma_\varepsilon) < \varepsilon^{\frac{1}{4}}$, 满足: 对任意 $\xi = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m, \tilde{\xi}_{j_0}, \tilde{\xi}_{j_1}, \dots, \tilde{\xi}_{j_n}) \in \Sigma_\varepsilon$, 边值问题 (1.1) + (1.2) 具有时间拟周期解. 进一步, 如果 $j_0 = 0$, 则

$$u(t, x) = \sqrt{\frac{\varepsilon \tilde{\xi}_{j_0} + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{7}{3}})}{\pi \sqrt{\mu}}} \cos \tilde{\omega}_{j_0} t + \sum_{j_i \in \mathcal{J} \setminus \{j_0\}} \sqrt{\frac{2(\varepsilon \tilde{\xi}_{j_i} + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{7}{3}}))}{\pi \sqrt{\lambda_{j_i}}}} \cos \tilde{\omega}_{j_i} t \cos j_i x + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{4}{3}}); \quad (5.1)$$

如果 $j_0 > 0$, 则

$$u(t, x) = \sum_{j_i \in \mathcal{J}} \sqrt{\frac{2(\varepsilon \tilde{\xi}_{j_i} + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{7}{3}}))}{\pi \sqrt{\lambda_{j_i}}}} \cos \tilde{\omega}_{j_i} t \cos j_i x + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{4}{3}}), \quad (5.2)$$

其中, 对所有 $j_i \in \mathcal{J}$, 有

$$|\tilde{\omega}_{j_i}(\xi) - \sqrt{\lambda_{j_i}}| < c\varepsilon^2. \quad (5.3)$$

注 5.1 方程 (1.1) 具有 $m+n+1$ 维旋转环面的 Cantor 集族, 其频率为 $\tilde{\omega}$, 其中 $\tilde{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m, \tilde{\omega}_{j_0}, \tilde{\omega}_{j_1}, \dots, \tilde{\omega}_{j_n})$.

注 5.2 很多函数都满足假设 (H_1) 和 (H_2) , 例如, $2 + \sin(\omega_1 t + x) + \sin(\omega_2 t + x) + \dots + \sin(\omega_m t + x)$.

注 5.3 为了避免重特征值带来的麻烦, 我们只选择了偶的完备正交基 $\phi_j(x)$ ($j \geq 0$), 这导致了构造出的解也是偶的.

注 5.4 在假设 (H_2) 中, g 定义在特定带型区域 $D_2(2a)$ 上. 事实上, g 可以定义在任意带型区域 $D_2(\hat{a})$ 上, 只要 $\hat{a} > a$. 固定的正数 a 将用于定义下面的 Hilbert 空间 $l^{a,s}$.

注 5.5 定理 5.1 中, 坏测度 $\text{meas}(\Sigma \setminus \Sigma_\varepsilon) < \varepsilon^{\frac{1}{4}}$. 事实上, 指数 $\frac{1}{4}$ 并不唯一确定. 坏测度的尺度为 $\mathcal{O}(\varepsilon^\iota)$, 其中 ι 可以选取区间 $(0, 1/3]$ 内的任意值. 同样, (5.1) 和 (5.2) 中的项 $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{7}{3}})$ 可换成 $\mathcal{O}(\varepsilon^{2+\iota})$; (5.1) 和 (5.2) 中的 $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{4}{3}})$ 可换成 $\mathcal{O}(\varepsilon^{1+\iota})$. 对结论的评论如下:

(1) 依赖于空间变量. 方程 (1.1) 中的非线性项 g 依赖于空间变量 x , 这说明方程在 x 的变换下是不变的, 但是导致出现了本质上无穷多个小除数. 文献 [12] 指出, 当一个偏微分方程 (PDE) 的非线性项不依赖于 x 时, “相应向量场 X 的所有单项式的动量都等于零”. 该文献中引入了向量场的加权强模去克服 “动量不守恒” 问题. 本文仅假设 g 有界, 即 (H_2) . 衰变性起了关键作用, 如 (2.10).

(2) 解频率 $\tilde{\omega}$. 利用本文方法, 不能得到方程 (1.1) 的、同 g 具有相同频率的拟周期解. 这是因为在应用 KAM 定理时引入了外参数而导致的附加频率. 然而, 虽然梁方程已经得到了较多研究, 但本文结论仍然是新的.

(3) 参数 μ . 结论对于大多数 $\mu > 0$ 都成立. 因为我们把 μ 当成一个重要参数, 所以仅利用本文的方法不能得到一个对所有 $\mu > 0$ 都适用的结论. 值得思考的是, 结论是否对于所有的 $\mu > 0$ 都成立呢? 另外, 参数 $\mu = 0$ 的情形会更加复杂.

定理 5.1 的证明 引入 $z_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_j + iv_j)$. 标准型 (4.6) 变为

$$H = \langle \hat{\omega}(\xi), y \rangle + \frac{1}{2} \langle \hat{\Omega}(\xi), u^2 + v^2 \rangle + P, \quad (5.4)$$

其相应的辛结构为 $\sum_{0 \leq j \leq n+m} dx_j \wedge dy_j + \sum_{j \geq n+m+1} du_j \wedge dv_j$. 下面对 Hamilton 函数 (5.4) 验证假设 A、B 和 C.

根据性质 3.1, 有

$$A = (\bar{G}_{ij})_{0 \leq i, j \leq n} = \frac{3g_0}{16\pi} \begin{pmatrix} \frac{2}{\lambda_0} & \frac{4}{\sqrt{\lambda_0 \lambda_1}} & \cdots & \frac{4}{\sqrt{\lambda_0 \lambda_n}} \\ \frac{4}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_0}} & \frac{3}{\lambda_1} & \cdots & \frac{4}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{4}{\sqrt{\lambda_n \lambda_0}} & \frac{4}{\sqrt{\lambda_n \lambda_1}} & \cdots & \frac{3}{\lambda_n} \end{pmatrix}_{(n+1) \times (n+1)},$$

$$B = (\bar{G}_{ij})_{0 \leq j \leq n < i} = \frac{3g_0}{4\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1}\lambda_0}} & \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1}\lambda_1}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1}\lambda_n}} \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+2}\lambda_0}} & \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+2}\lambda_1}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+2}\lambda_n}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}_{\infty \times (n+1)}.$$

我们可证 $\det A \neq 0$. 事实上, 矩阵 A 可写成

$$A = \frac{3g_0}{4\pi} \Lambda_1 A_1 \Lambda_1,$$

其中

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_1 = \text{diag}\{\sqrt{\frac{1}{\lambda_0}}, \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}, \dots, \sqrt{\frac{1}{\lambda_n}}\},$$

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_i = \frac{3}{4}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (5.5)$$

因为

$$\det A_1 = \left(1 + \sum_{i=0}^n \frac{1}{a_i - 1}\right) (a_0 - 1)(a_1 - 1) \cdots (a_n - 1),$$

由 (5.5) 得

$$\det A_1 = \frac{(-1)^n (4n+1)}{2 \cdot 4^n} \neq 0.$$

所以,

$$\det A = \frac{3g_0}{4\pi} \left(\frac{1}{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_n} \right) \det A_1 \neq 0.$$

另一方面, 由 $\hat{\omega}$ 的定义得, 对 $\xi \in \Pi$, 有

$$\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 \text{Id}_m & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 A \end{pmatrix},$$

其中 Id_m 表示 $m \times m$ 阶单位矩阵. 因此, 实映射 $\xi \mapsto \hat{\omega}(\xi)$ 为一个 Π 和其象间的 Lipschitz 同胚.

对于任意的 $k \in \mathbb{Z}^{m+n+1}$, 改写

$$k = (k_1, k_2), \quad k_1 \in \mathbb{Z}^m, \quad k_2 \in \mathbb{Z}^{n+1}.$$

令

$$\mathcal{Y}(\xi) = \langle k, \hat{\omega}(\xi) \rangle + \langle l, \hat{\Omega}(\xi) \rangle = \langle k_1, \omega \rangle + \langle k_2, \tilde{\alpha} + \varepsilon^2 A \tilde{\xi} \rangle + \langle l, \tilde{\beta} + \varepsilon^2 B \tilde{\xi} \rangle, \quad \Delta := \{\xi \in \Pi : \mathcal{Y}(\xi) = 0\},$$

我们将证明 $\text{meas } \Delta = 0$. 分两种情形如下:

情形 1 假设 $k_1 \neq 0$, 则

$$\frac{\partial \mathcal{Y}(\xi)}{\partial \bar{\omega}} = \varepsilon^2 k_1 \neq 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

说明 $\text{meas } \Delta = 0$.

情形 2 假设 $k_1 = 0$, 则

$$\mathcal{Y}(\xi) = \langle k_2, \tilde{\alpha} + \varepsilon^2 A \tilde{\xi} \rangle + \langle l, \tilde{\beta} + \varepsilon^2 B \tilde{\xi} \rangle.$$

因此, 当 ε 充分小时, 测度条件满足, 因为 $\langle k_2, \tilde{\alpha} + A \tilde{\xi} \rangle + \langle l, \tilde{\beta} + B \tilde{\xi} \rangle$ 是一个 $\tilde{\xi}$ 的非平凡的仿射函数, 根据文献 [18, 定理 3] 的证明, 该函数在余维 1 空间中消失. 而且, 当 $0 < \varepsilon \ll 1$, $1 \leq |l| \leq 2$ 和 $\xi \in \Pi$ 时, 易见 $\langle l, \hat{\Omega}(\xi) \rangle \neq 0$. 假设 A 得证.

因为

$$\sqrt{\lambda_j} = \sqrt{j^4 + \mu} = j^2 + \frac{\mu}{2j^2} + O(j^{-6}), \quad j \geq 1,$$

我们有 $\hat{\Omega}_j = j^\varsigma + \dots$, $\varsigma = 2$, $\hat{\Omega}_j - j^2$ 是一个从 Π 到 $l_\infty^{-\delta}$ 的 Lipschitz 映射, $\delta = -2$. 因此, 假设 B 对 $\hat{\Omega}$, $\delta = -2$, $\varsigma = 2$ 满足. 根据引理 4.1, 假设 C 也成立, 令 $\bar{p} = s$ 和 $p = s$. 而且, 如果令 $M = C\varepsilon^2$ 和 $L = C\varepsilon^{-2}$, 根据 (4.7), 则 (4.1) 满足.

下面证明定理 4.1 的小性条件. 令 $\alpha = \varepsilon^{2+\frac{1}{3}}$, 根据引理 4.1, 如果 $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, 常数 $\varepsilon^* = \varepsilon^*(\gamma, C)$, 我们有

$$\sup_{D(\sigma, r) \times \Pi} |X_P|_r + \sup_{D(\sigma, r) \times \Pi} \frac{\alpha}{M} |X_P|_r^C = C\varepsilon^{\frac{8}{3}} + C\varepsilon^3 = \epsilon \leq C\varepsilon^{\frac{8}{3}} \leq \gamma\varepsilon^{2+\frac{1}{3}} = \gamma\alpha,$$

这说明条件 (4.2) 的小性条件满足. 利用 $\hat{\omega}(\xi)$ 是参数 ξ 的仿射函数的事实知, 选择 $\tilde{\mu} = 1$, 定理 4.2 中的条件对 Hamilton 函数 (5.4) 满足.

下面针对 Hamilton 函数 (5.4) 运用定理 4.1 和 4.2. 因此, 存在子集 $\Pi_\alpha \subset \Pi$ 满足

$$\text{meas}(\Pi \setminus \Pi_\alpha) \leq c_1 L^{m+n+1} M^{m+n} (\text{diam} \Pi)^{m+n} \alpha^{\tilde{\mu}} \leq C\varepsilon^{-2} \alpha < \varepsilon^{\frac{1}{4}},$$

存在 Lipschitz 连续的环境嵌入族 $\Phi: \mathbb{T}^{m+n+1} \times \Pi_\alpha \rightarrow \mathcal{P}^{a,s}$, 存在 Lipschitz 映射 $\tilde{\omega}: \Pi_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{m+n+1}$, 使得对每一个 $\xi \in \Pi_\alpha$, 限制于 $\mathbb{T}^{m+n+1} \times \{\xi\}$ 的映射 Φ 是 Hamilton 函数 H 在 ξ 点的带有频率 $\tilde{\omega}(\xi)$ 的实解析的椭圆旋转环面嵌入. 而且, $|\tilde{\omega}(\xi) - \hat{\omega}(\xi)| < c\varepsilon^{\frac{8}{3}}$ 和 (4.3) 成立. 利用 (4.5), 我们从参数集 Π 退回到 $\Pi^*(\omega_-) = \bar{\Omega} \times [0, 1]^n$.

假设 $\Pi^* = \bigcup_{\omega_- \in \Omega} \Pi^*(\omega_-)$, 其中选择 ω_- 使得 $\Pi^*(\omega_-^1) \cap \Pi^*(\omega_-^2) = \emptyset$, 如果 $\omega_-^1 \neq \omega_-^2$. 因此, 我们得到一个子集 $\Pi_\alpha^* \subset \Pi^*$, 使得

$$\Sigma_\varepsilon = \Pi_\alpha^* \subset \Omega \times [0, 1]^{n+1} = \Sigma, \quad \text{meas}(\Sigma \setminus \Sigma_\varepsilon) < \varepsilon^{\frac{1}{4}}.$$

因此, 对于新参数集合, 存在 Lipschitz 连续环境嵌入族 $\Phi: \mathbb{T}^{m+n+1} \times \Sigma_\varepsilon \rightarrow \mathcal{P}^{a,s}$ 和一个 Lipschitz 连续映射 $\tilde{\omega}: \Sigma_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^{m+n+1}$, 使得对于每一个 $\xi \in \Sigma_\varepsilon$, 限制于 $\mathbb{T}^{m+n+1} \times \{\xi\}$ 上的映射 Φ , 对于 Hamilton 函数 H 在 ξ 点, 是一个实解析的椭圆旋转环面嵌入, 其频率为 $\tilde{\omega}(\xi) = (\tilde{\omega}_j)_{0 \leq j \leq m+n+1}$, 且有

$$|\Phi - \Phi_0|_r + \frac{\alpha}{M} |\Phi - \Phi_0|_r^C \leq c(\varepsilon^{\frac{1}{3}} + \varepsilon^{\frac{2}{3}}) < c\varepsilon^{\frac{1}{3}}, \quad (5.6)$$

$$|\tilde{\omega} - \hat{\omega}| + \frac{\alpha}{M} |\tilde{\omega}(\xi) - \hat{\omega}(\xi)|^C \leq c\varepsilon^{\frac{8}{3}} \quad (5.7)$$

成立, 其中 $\xi = (\omega, \tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n)$. 因此, 运动方程开始于环面 $\Phi(\mathbb{T}^{m+n+1} \times \Sigma_\varepsilon)$ 是拟周期的, 频率为 $\tilde{\omega}(\xi)$. 为方便起见, 我们取初始相位 $\theta_j(0) = 0$. 因此, 由 (5.6) 和 (5.7) 可知, 这些运动方程如下:

$$\tilde{\rho}_j(t) = \mathcal{O}(\varepsilon^{2+\frac{1}{3}}), \quad \theta_j(t) = \tilde{\omega}_j t, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n, \quad \|Z\|_{a,s} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1+\frac{1}{3}}),$$

其中 $|\tilde{\omega}_j - \tilde{\omega}_j| < c\varepsilon^{\frac{8}{3}}$. 再根据 (4.8), 得到 (5.3). 退回到最初方程 (1.1), 即可得定理 5.1 所示解. $\square$

致谢 作者对审稿专家提出的有益意见表示由衷感谢.

参考文献

- Chierchia L, You J. KAM tori for 1D nonlinear wave equations with periodic boundary conditions. *Comm Math Phys*, 2000, 211: 497–525
- Kuksin S B. Nearly integrable infinite-dimensional Hamiltonian systems. In: *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1556. New York: Springer-Verlag, 1993, 1–101
- Kuksin S B, Pöschel J. Invariant Cantor manifolds of quasiperiodic oscillations for a nonlinear Schrödinger equation. *Ann of Math (2)*, 1996, 143: 149–179
- Pöschel J. A KAM-theorem for some nonlinear PDEs. *Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci (5)*, 1996, 23: 119–148
- Pöschel J. Quasi-periodic solutions for nonlinear wave equations. *Comment Math Helv*, 1996, 71: 269–296
- Chow S, Lu K, Shen Y. Normal forms for quasiperiodic evolutionary equations. *Discrete Contin Dyn Syst*, 1996, 2: 65–94
- Yuan X. Quasi-periodic solutions of completely resonant nonlinear wave equations. *J Differential Equations*, 2005, 230: 213–274
- Wang Y, Si J. A result on quasi-periodic solutions of a nonlinear beam equation with a quasi-periodic forcing term. *Z Angew Math Phys*, 2012, 63: 189–190
- Tuo Q, Si J. Quasi-periodic solutions of nonlinear beam equations with quintic quasi-periodic nonlinearities. *Electron J Differential Equations*, 2015, 2015: 1–20
- Eliasson L H, Kuksin S B. KAM for the non-linear Schrödinger equation. *Ann of Math (2)*, 2010, 172: 371–435
- Gao M, Liu J. Quasi-periodic solutions for derivative nonlinear derivative nonlinear Schrödinger equation. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2012, 32: 2101–2123
- Berti M, Biasco L, Procesi M. Partial differential equations-existence and stability of quasi-periodic solutions for derivative wave equations. *Atti Accad Naz Lincei Cl Sci Fis Mat Natur Rend Lincei (9) Mat Appl*, 2012, 24: 199–214
- Gao Y, Zhang W, Ji S. Quasi-periodic solutions of nonlinear wave equation with x -dependent coefficients. *Internat J Bifur Chaos*, 2015, 25: 1550043
- Eliasson L H, Grébert B, Kuksin S B. KAM for the nonlinear beam equation 1: Small-amplitude solutions. *ArXiv:1412.2803*, 2015
- Jiao L, Wang Y. The construction of quasi-periodic solutions of quasi-periodic forced Schrödinger equation. *Commun Pure Appl Anal*, 2009, 8: 1585–1606
- Berti M, Bolle P. Partial differential equations-quasi-periodic solutions of nonlinear Schrödinger equations on $\mathbb{T}^d$. *Atti Accad Naz Lincei Cl Sci Fis Mat Natur Rend Lincei (9) Mat Appl*, 2011, 22: 223–236
- Craig W. KAM theory in infinite dimensions. In: *Dynamical Systems and Probabilistic Methods in Partial Differential Equations. Lectures in Applied Mathematics*, vol. 31. Providence: Amer Math Soc, 1996, 31–46
- Geng J, You J. KAM tori of Hamiltonian perturbations of 1D linear beam equations. *J Math Anal Appl*, 2003, 277: 104–121
- Geng J, You J. A KAM theorem for Hamiltonian partial differential equations in higher dimensional spaces. *Comm Math Phys*, 2006, 262: 343–372
- Geng J, You J. KAM tori for higher dimensional beam equations with constant potentials. *Nonlinearity*, 2006, 19: 2405–2423
- Pöschel J. A lecture on the classical KAM theorem. *Proc Sympos Pure Math*, 2001, 69: 707–732
- Broer H W, Huitema G B, Sevryuk M B. Quasi-periodic motions in families of dynamical systems. In: *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1645. Heidelberg: Springer-Verlag, 1996, 1–191

附录 A 引理的证明

引理 3.1 的证明 首先, 我们考虑 i, j, d 和 l 均为非零整数的情形. 不失一般性, 假设 $|i| \leq |j| \leq |d| \leq |l|$, 则 (3.7) 可简化为 $|i| - |j| - |d| + |l| = 0$ 和 $|i| + |j| + |d| - |l| = 0$. 现在根据减号的个数区分符号 $\delta = \lambda'_i + \lambda'_j + \lambda'_d + \lambda'_l$. 为了方便起见, 令 $\delta_{++++} = +\sqrt{\lambda_{|i|}} + \sqrt{\lambda_{|j|}} + \sqrt{\lambda_{|d|}} - \sqrt{\lambda_{|l|}}$, 其余符号类似.

对于“无减号”、“双减号”、“三减号”和“四减号”的情形, 可通过与文献 [18, 引理 4.1] 完全相同的方法证明得到

$$|\lambda'_i + \lambda'_j + \lambda'_d + \lambda'_l| \geq \frac{1}{(\sqrt{h^4 + \mu})^3}, \quad h = \min(|i|, |j|, |d|, |l|).$$

显然,

$$|\lambda'_i + \lambda'_j + \lambda'_d + \lambda'_l| \geq \frac{1}{(\sqrt{h^4 + \mu})^3} \geq \frac{1}{(\sqrt{n^4 + \mu})^3}.$$

我们只用讨论“一减号”的情形. 事实上, 在此情形下, $\delta_{++-+}, \delta_{+-++}, \delta_{-+++} \geq 1$. 所以只用讨论 δ_{++++} . 由 (3.6), 我们考虑函数 $\delta_1(\mu) = \sqrt{i^4 + \mu} + \sqrt{j^4 + \mu} + \sqrt{d^4 + \mu} - \sqrt{l^4 + \mu}$. 因为

$$\begin{aligned} \delta'_1(\mu) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{i^4 + \mu}} + \frac{1}{\sqrt{j^4 + \mu}} + \frac{1}{\sqrt{d^4 + \mu}} - \frac{1}{\sqrt{(j+d)^4 + \mu}} \right) \\ &> \frac{1}{2\sqrt{i^4 + \mu}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n^4 + \mu}} > 0, \end{aligned}$$

所以, $\delta_1(\mu)$ 对于 μ 严格单增, 并有 $\text{meas } S_1 < 2\sqrt{n^4 + \mu} \frac{\eta}{(\sqrt{n^4 + \mu})^3} < 2\eta$, 其中

$$S_1 := \left\{ \mu \in (0, \infty) \mid \delta_1(\mu) < \frac{\eta}{(\sqrt{n^4 + \mu})^3} \right\}.$$

因此, 在去掉了具有测度 $\mathcal{O}(\eta)$ 的集合 S_1 之后, 可得

$$\delta_{++++} \geq \frac{\eta}{(\sqrt{n^4 + \mu})^3}.$$

所以,

$$|\lambda'_i + \lambda'_j + \lambda'_d + \lambda'_l| \geq \frac{\eta}{(\sqrt{n^4 + \mu})^3}$$

对于非零整数 i, j, d 和 l 都成立.

其次, 我们讨论 i, j, d 和 l 中至少有一个为零的情形.

情形 1 所有 i, j, d 和 l 是 0 或 -0 . 因为 $(i, j, d, l) \notin \mathcal{N}_n$, 所以 $(i, j, d, l) \neq (0, -0, 0, -0)$. 故 $|\lambda'_i + \lambda'_j + \lambda'_d + \lambda'_l| = 4\sqrt{\mu}$ 或 $2\sqrt{\mu}$.

情形 2 在 i, j, d 和 l 中有三个是 0 或 -0 . 根据 (3.7), 这种情形可以简化为情形 1.

情形 3 在 i, j, d 和 l 中有两个是 0 或 -0 . 不失一般性, 我们假设 i 和 j 是 0 或 -0 , 再分情形讨论.

情形 3.1 当 $(i, j) \equiv (0, 0)$ 时, 由 (3.7) 得 $|d| = |l|$. 当 $d = -l$ 时, $|\lambda'_i + \lambda'_j + \lambda'_d + \lambda'_l| = 2\sqrt{\mu}$. 当 $d = l > 0$ 时, $|\lambda'_i + \lambda'_j + \lambda'_d + \lambda'_l| \geq 2\sqrt{\mu} + 2\sqrt{1 + \mu}$. 当 $d = l < 0$ 时, $|\lambda'_i + \lambda'_j + \lambda'_d + \lambda'_l| \geq 2\sqrt{1 + \mu} - 2\sqrt{\mu}$.

情形 3.2 当 $(i, j) \equiv (-0, -0)$ 时, 由 (3.7) 得 $|d| = |l|$. 当 $d = -l$ 时, $|\lambda'_i + \lambda'_j + \lambda'_d + \lambda'_l| = 2\sqrt{\mu}$. 当 $d = l > 0$ 时, $|\lambda'_i + \lambda'_j + \lambda'_d + \lambda'_l| \geq 2\sqrt{1 + \mu} - 2\sqrt{\mu}$. 当 $d = l < 0$ 时, $|\lambda'_i + \lambda'_j + \lambda'_d + \lambda'_l| \geq 2\sqrt{\mu} + 2\sqrt{1 + \mu}$.

情形 3.3 当 $(i, j) \equiv (-0, 0)$ 时, 由 (3.7) 得 $|d| = |l|$. 因为 $(i, j, d, l) \notin \mathcal{N}_n$, $d \neq -l$, 因此, $d = l$. 当 $d = l$ 时, $|\lambda'_i + \lambda'_j + \lambda'_d + \lambda'_l| = 2\sqrt{d^4 + \mu} \geq 2\sqrt{1 + \mu}$.

情形 4 当 i, j, d 和 l 中有一个是 0 或 -0 , 不失一般性, 我们假设 $i = 0$ 或 -0 , 且

$$0 = |i| < 1 \leq |j| \leq |d| \leq |l|. \quad (\text{A.1})$$

利用 (A.1), (3.7) 简化为

$$|l| = |j| + |d|. \quad (\text{A.2})$$

现在仅需要根据减号数量讨论 δ . 下面分情形讨论:

情形 4.0 没有减号. 在这种情形下, $\delta_{++++} \geq \sqrt{\mu} + 3\sqrt{\mu + 1}$.

情形 4.1 一个减号. 显然, $\delta_{++--}, \delta_{+-++} \geq \sqrt{1 + \mu} + \sqrt{\mu}$, $\delta_{-+++} > 2\sqrt{1 + \mu}$ 成立. 仅剩讨论 δ_{+++-} . 由 (3.6), 考虑函数 $\delta_2(\mu) = \sqrt{\mu} + \sqrt{j^4 + \mu} + \sqrt{d^4 + \mu} - \sqrt{l^4 + \mu}$, 其中 $j, d \geq 1$. 由 (A.2), 有

$$\delta_2'(\mu) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\sqrt{j^4 + \mu}} + \frac{1}{\sqrt{d^4 + \mu}} - \frac{1}{\sqrt{(j+d)^4 + \mu}} \right) > \frac{1}{2\sqrt{\mu}} > 0.$$

因此, 对于 μ , $\delta_2(\mu)$ 严格单增并有

$$\text{meas } S_2 < 2\sqrt{\mu} \frac{\eta}{2\sqrt{\mu}} < \eta,$$

其中

$$S_2 := \left\{ \mu \in (0, \infty) \mid \delta_2(\mu) < \frac{\eta}{2\sqrt{\mu}} \right\}.$$

故去掉测度为 $\mathcal{O}(\eta)$ 的集合 S_2 后, $\delta_{+++-} \geq \frac{\eta}{2\sqrt{\mu}}$ 成立.

情形 4.2 两个减号. 因为 $\delta_{-+-+}, \delta_{-++-} \geq \delta_{+---}$, $|\delta_{-+-+}| = |\delta_{-++-}|$, $|\delta_{+---}| = |\delta_{-++-}|$ 和 $|\delta_{-++-}| = |\delta_{+---}|$, 所以仅需要讨论 δ_{+---} . 由 (A.2), 有

$$\delta_{+---} = \sqrt{\mu} - \sqrt{|j|^4 + \mu} - \sqrt{|d|^4 + \mu} + \sqrt{(|j| + |d|)^4 + \mu},$$

其中 $j, d \leq -1$.

我们假设 $f_d(x) := \sqrt{(x + |d|)^4 + \mu} - \sqrt{x^4 + \mu}$, $x \geq 0$, 其中 $d \leq -1$ 固定. 因此,

$$f_d'(x) = 2 \frac{(|d| + x)^3 \sqrt{x^4 + \mu} - x^3 \sqrt{(|d| + x)^4 + \mu}}{\sqrt{(|d| + x)^4 + \mu} \sqrt{x^4 + \mu}}.$$

下面比较 $(|d| + x)^3 \sqrt{x^4 + \mu}$ 和 $x^3 \sqrt{(|d| + x)^4 + \mu}$. 因为

$$\begin{aligned} & [|d| + x]^3 \sqrt{x^4 + \mu}^2 - [x^3 \sqrt{(|d| + x)^4 + \mu}]^2 \\ &= |d|^6 x^4 + \mu |d|^6 + 6|d|^5 x^5 + 6\mu |d|^5 x + 14|d|^4 x^6 + 15\mu |d|^4 x^2 \\ & \quad + 16|d|^3 x^7 + 20|d|^3 x^3 + 9|d|^2 x^8 + 15\mu |d|^2 x^4 + 2|d| x^9 + 6\mu |d| x^5 \\ & \geq \mu |d|^6 > 0, \end{aligned}$$

所以, $(|d| + x)^3 \sqrt{x^4 + \mu} > x^3 \sqrt{(|d| + x)^4 + \mu}$ 成立. 这说明 $f_d' > 0$ 对 $x \geq 0$ 成立. 所以, f_d 对于 $x \geq 0$ 严格递增, 当 $j \leq -1$ 时, $f_d(|j|) \geq f_d(1) > f_d(0)$. 那么有 $f_d(|j|) - f_d(0) \geq f_d(1) - f_d(0) > 0$, 即

$$\delta_{+---} = f_d(|j|) - f_d(0) \geq \sqrt{(|d| + 1)^4 + \mu} - \sqrt{1 + \mu} - \sqrt{|d|^4 + \mu} + \sqrt{\mu}. \quad (\text{A.3})$$

另外, 我们假设 $f_1(x) = \sqrt{(x+1)^4 + \mu} - \sqrt{x^4 + \mu}$. 由类似以上的讨论可知, 当 $x \geq 0$ 时, f_1 也严格递增. 因此, $f_1(|d|) > f_1(\frac{1}{2}) > f_1(0)$ 对 $d \leq -1$ 成立. 所以, $f_1(|d|) - f_1(0) > f_1(\frac{1}{2}) - f_1(0) > 0$, 即

$$\sqrt{(|d|+1)^4 + \mu} - \sqrt{1 + \mu} - \sqrt{|d|^4 + \mu} + \sqrt{\mu} > \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^4 + \mu} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \mu} - \sqrt{1 + \mu} + \sqrt{\mu} > 0. \quad (\text{A.4})$$

因此, 由 (A.3) 和 (A.4) 得到

$$\delta_{+---} > \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^4 + \mu} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \mu} - \sqrt{1 + \mu} + \sqrt{\mu} > 0.$$

情形 4.3 三个减号. 此类型可化成情形 4.1.

情形 4.4 四个减号. 此类型可化成情形 4.0.

综上, 这些下界给出了本引理的估计. 因此, 假设 $S = S_1 \cup S_1$, 引理 3.1 成立. 证毕. $\square$

引理 3.2 的证明 令 $0 \neq k \in \mathbb{Z}^m$,

$$\mathcal{R}_k^1 = \left\{ \omega \in [\varrho, 2\varrho]^m : |\langle k, \omega \rangle| < \frac{\varrho \varepsilon^{\frac{1}{3}}}{|k|^{m+1}} \right\}, \quad \Omega^1 = \bigcup_{0 \neq k \in \mathbb{Z}^m} \mathcal{R}_k^1.$$

考虑两个超平面 $\langle k, \omega \rangle = \pm \frac{\varrho \varepsilon^{\frac{1}{3}}}{|k|^{m+1}}$, 我们有

$$\text{meas } \mathcal{R}_k^1 \leq m|k|^{-1}(\sqrt{2}\varrho)^{m-1} \frac{2\varrho \varepsilon^{\frac{1}{3}}}{|k|^{m+1}} \leq \frac{2(\sqrt{2})^{m-1} m \varepsilon^{\frac{1}{3}}}{|k|^{m+2}} \varrho^m.$$

所以,

$$\text{meas } \Omega^1 \leq \sum_{1 \leq k \in \mathbb{Z}^m} \text{meas } \mathcal{R}_k^1 \leq 2(\sqrt{2})^{m-1} m \varepsilon^{\frac{1}{3}} \varrho^m \sum_{1 \leq k \in \mathbb{Z}^m} \frac{1}{|k|^{m+2}}.$$

因此, 由 (3.35) 得

$$\text{meas } \Omega^1 \leq C_1 \varepsilon^{\frac{1}{3}} \varrho^m \sum_{l=1}^{\infty} 2^m l^{m-1} l^{-(m+2)} \leq C_1 \varepsilon^{\frac{1}{3}} \varrho^m.$$

所以, 当假设 $\Omega = [\varrho, 2\varrho]^m \setminus \Omega^1$ 时引理成立. $\square$

引理 3.3 的证明 假设

$$\mathcal{R}_{ijdl,k}^2 = \left\{ \omega \in [\varrho, 2\varrho]^m : |\lambda'_i + \lambda'_j + \lambda'_d + \lambda'_l + \langle k, \omega \rangle| < \frac{\varrho \varepsilon^{\frac{1}{3}}}{|k|^{m+5}} \right\}, \quad \Omega^2 = \bigcup_{|k| \geq 1} \bigcup_{i,j,d,l} \mathcal{R}_{ijdl,k}^2.$$

利用与引理 3.2 同样的方法可得

$$\text{meas } \mathcal{R}_{ijdl,k}^2 \leq C \frac{\varrho^m \varepsilon^{\frac{1}{3}}}{|k|^{m+5}|k|}, \quad (\text{A.5})$$

其中 C 依赖于 m .

令 $\lambda'_i + \lambda'_j + \lambda'_d + \lambda'_l \neq 0$, $k \neq 0$, $(i, j, d, l) \in \mathcal{L}_n$. 现在我们令 $|i| = \min\{|i|, |j|, |d|, |l|\}$. 其余类型 $|j| = \min\{|i|, |j|, |d|, |l|\}$, $|d| = \min\{|i|, |j|, |d|, |l|\}$, $|l| = \min\{|i|, |j|, |d|, |l|\}$ 可同样讨论. 由 $\mathcal{L}_n$ 的定义显然有 $0 \leq |i| \leq n$. 下面分情形讨论.

情形 1 如果 j 、 d 和 l 符号相同, 假设 $f_{jdl} = \operatorname{sgn} j \cdot (\sqrt{\lambda_{|j|}} + \sqrt{\lambda_{|d|}} + \sqrt{\lambda_{|l|}})$. 令

$$\mathcal{R}_{ijdl,k}^{2,1} = \left\{ \omega \in [\varrho, 2\varrho]^m : |f_{jdl} + \lambda'_i + \langle k, \omega \rangle| < \frac{\varrho \varepsilon^{\frac{1}{3}}}{|k|^{m+5}} \right\}, \quad \Omega^{2,1} = \bigcup_{|k| \geq 1} \bigcup_{i,j,d,l} \mathcal{R}_{ijdl,k}^{2,1}.$$

显然, 利用 $0 \leq |i| \leq n$, 得

$$|\lambda'_i + \langle k, \omega \rangle| \leq 2\sqrt{n^4 + \mu} + 2|k||\omega|. \quad (\text{A.6})$$

因此, 当 $|f_{jdl}| > 3\sqrt{n^4 + \mu} + 2|k||\omega|$ 时, 如果 ε 充分小, 则

$$|f_{jdl} + \lambda'_i + \langle k, \omega \rangle| > |f_{jdl}| - |\lambda'_i + \langle k, \omega \rangle| > \sqrt{n^4 + \mu} \geq \frac{\varrho \varepsilon^{\frac{1}{3}}}{|k|^{m+5}}.$$

这说明集合 $\mathcal{R}_{ijdl,k}^{2,1}$ 为空. 所以, 为了计算 $\Omega^{2,1}$, 我们仅需要考虑情形 $j, d, l \leq 3\sqrt{n^4 + \mu} + 2|k||\omega|$. 根据 (A.5) 和 (3.35), 可得

$$\begin{aligned} \operatorname{meas} \Omega^{2,1} &= \operatorname{meas} \bigcup_{|k| \geq 1} \bigcup_{i,j,d,l} \mathcal{R}_{ijdl,k}^{2,1} \\ &= \operatorname{meas} \bigcup_{|k| \geq 1} \bigcup_{0 \leq |i| \leq n} \bigcup_{|j|, |d|, |l| \leq 3\sqrt{n^4 + \mu} + 2|k||\omega|} \mathcal{R}_{ijdl,k}^{2,1} \\ &\leq \sum_{|k| \geq 1} 2(n+1)(6\sqrt{n^4 + \mu} + 4\varrho|k| + 2)^3 \frac{C\varrho^m \varepsilon^{\frac{1}{3}}}{|k|^{m+5}|k|} \\ &\leq C\varrho^m \varepsilon^{\frac{1}{3}} \sum_{|k| \geq 1} \frac{1}{|k|^{m+3}} \leq C\varrho^m \varepsilon^{\frac{1}{3}} \sum_{1 \leq |k|=l} \frac{1}{l^{m+3}} 2^m l^{m-1} \\ &= C2^m \varrho^m \varepsilon^{\frac{1}{3}} \sum_{l \geq 1} \frac{1}{l^4} \leq C\varrho^m \varepsilon^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

其中常数 C 依赖于 μ 、 n 、 ϱ 和 m .

情形 2 当 j 、 d 和 l 具有不同的符号时, 不妨设 j 与 d 符号相同, 而与 l 符号不同. 因此,

$$f_{jdl} = \operatorname{sgn} j \cdot (\sqrt{\lambda_{|j|}} + \sqrt{\lambda_{|d|}} - \sqrt{\lambda_{|l|}}) := \tilde{f}_{jd} + \operatorname{sgn} l \cdot \sqrt{\lambda_{|l|}}.$$

其余类型 l, d 或 l, j 符号相同的情形类似可证. 因此只需考虑以下两种情形.

情形 2.1 设 $|i| \leq |l| \leq \tilde{N}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ijdl,k}^{2,2} &= \left\{ \omega \in [\varrho, 2\varrho]^m : |\tilde{f}_{jd} + \operatorname{sgn} l \cdot \sqrt{\lambda_{|l|}} + \lambda'_i + \langle k, \omega \rangle| < \frac{\varrho \varepsilon^{\frac{1}{3}}}{|k|^{m+5}}, |l| \leq \tilde{N} \right\}, \\ \Omega^{2,2} &= \bigcup_{|k| \geq 1} \bigcup_{i,j,d,l} \mathcal{R}_{ijdl,k}^{2,2}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

其中

$$\tilde{N} = \frac{\tilde{N}_1}{a_0} |k|, \quad \tilde{N}_1 = \sqrt{n^4 + \mu} + 2\varrho + 1, \quad \frac{1}{2} > a_0 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu} + 1} \right) > 0,$$

则

$$|\operatorname{sgn} l \cdot \sqrt{\lambda_{|l|}} + \lambda'_i + \langle k, \omega \rangle| \leq 3\sqrt{\tilde{N}^4 + \mu} + |k||\omega|.$$

当 $|\tilde{f}_{jd}| > 4\sqrt{\tilde{N}^4 + \mu} + |k||\omega|$ 时, 可得, 只要 ε 充分小,

$$\begin{aligned} |\tilde{f}_{jd} + \operatorname{sgn} l \cdot \sqrt{\lambda_{|l|}} + \lambda'_i + \langle k, \omega \rangle| &> |\tilde{f}_{jd}| - |\operatorname{sgn} l \cdot \sqrt{\lambda_{|l|}} + \lambda'_i + \langle k, \omega \rangle| \geq \sqrt{\tilde{N}^4 + \mu} \\ &> \tilde{N}^2 > \frac{\varrho \varepsilon^{\frac{1}{3}}}{|k|^{m+5}}, \end{aligned}$$

这说明 $\mathcal{R}_{ijdl,k}^{2,2}$ 为空. 因此, 为了计算 $\Omega^{2,2}$, 我们仅需考虑 $j, d \leq 4\sqrt{\tilde{N}^4 + \mu} + |k||\omega|$ 的情形. 可得

$$\begin{aligned} \operatorname{meas} \Omega^{2,2} &= \operatorname{meas} \bigcup_{|k| \geq 1} \bigcup_{i,j,d,l} \mathcal{R}_{ijdl,k}^{2,2} \\ &= \operatorname{meas} \bigcup_{|k| \geq 1} \bigcup_{0 \leq |i| \leq n} \bigcup_{|l| \leq \tilde{N}} \bigcup_{|j|, |d| \leq 4\sqrt{\tilde{N}^4 + \mu} + |k||\omega|} \mathcal{R}_{ijdl,k}^{2,2} \\ &\leq \sum_{|k| \geq 1} 4(n+1)(\tilde{N}+1)(8\sqrt{\tilde{N}^4 + \mu} + 4\varrho|k| + 2)^2 \frac{\varrho^m \varepsilon^{\frac{1}{3}}}{|k|^{m+5}|k|} \\ &\leq C \varrho^m \varepsilon^{\frac{1}{3}} \sum_{|k| \geq 1} \frac{1}{|k|^{m+1}} \leq C \varrho^m \varepsilon^{\frac{1}{3}} \sum_{1 \leq |k|=l} \frac{1}{l^{m+1}} 2^m l^{m-1} \\ &= C 2^m \varrho^m \varepsilon^{\frac{1}{3}} \sum_{l \geq 1} \frac{1}{l^2} \leq C \varrho^m \varepsilon^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

其中 C 依赖于 μ, n, ϱ 和 m .

情形 2.2 假设 $|l| > \tilde{N}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ijdl,k}^{2,3} &= \left\{ \omega \in [\varrho, 2\varrho]^m : |\tilde{f}_{jd} + \operatorname{sgn} l \cdot \sqrt{\lambda_{|l|}} + \lambda'_i + \langle k, \omega \rangle| < \frac{\varrho \varepsilon^{\frac{1}{3}}}{|k|^{m+5}}, |l| > \tilde{N} \right\}, \\ \Omega^{2,3} &= \bigcup_{|k| \geq 1} \bigcup_{i,j,d,l} \mathcal{R}_{ijdl,k}^{2,3}. \end{aligned}$$

我们把此情形再细分为两种情形讨论. 不妨设 $|d| = \max\{|j|, |d|\}$. 另一种情形 $|j| = \max\{|j|, |d|\}$ 类似可证.

情形 2.2.1 令 $p = ||d| - |l|| \neq 0$. 若 $|d| - |l| = p \geq 1$, 则由 $|l| > \tilde{N}$, 得

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_{|d|}} - \sqrt{\lambda_{|l|}} &= \frac{d^4 - l^4}{\sqrt{d^4 + \mu} + \sqrt{l^4 + \mu}} \geq \frac{(|l| + p)^3 p}{2\sqrt{(|l| + p)^4 + \mu}} \\ &\geq \frac{(|l| + p)^3}{2(|l| + p)^2 + 2\sqrt{\mu}} = \frac{|l| + p}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{\mu}}{(|l| + p)^2 + \sqrt{\mu}} \right) \\ &\geq (|l| + p)a_0 > \tilde{N}a_0 = \tilde{N}_1|k|. \end{aligned} \tag{A.8}$$

当 ε 充分小时, 有

$$\begin{aligned} |\tilde{f}_{jd} + \operatorname{sgn} l \cdot \sqrt{\lambda_{|l|}} + \lambda'_i + \langle k, \omega \rangle| &\geq |\sqrt{\lambda_{|d|}} - \sqrt{\lambda_{|l|}} - |\lambda'_i + \langle k, \omega \rangle| \\ &\geq \sqrt{\lambda_{|d|}} - \sqrt{\lambda_{|l|}} - \sqrt{i^4 + \mu} - 2\varrho|k| \\ &> \tilde{N}_1|k| - \sqrt{n^4 + \mu} - 2\varrho|k| \\ &= (\sqrt{n^4 + \mu} + 2\varrho + 1)|k| - \sqrt{n^4 + \mu} - 2\varrho|k| \end{aligned}$$

$$\geq |k| \geq 1 \geq \frac{\varrho \varepsilon^{\frac{1}{3}}}{|k|^{m+5}},$$

这说明集合 $\mathcal{R}_{ijdl,k}^{2,3}$ 为空.

同样, 如果 $|l| - |d| = p \geq 1$, 则有

$$\sqrt{\lambda_{|l|}} - \sqrt{\lambda_{|d|}} \geq (|d| + p)a_0 = |l|a_0 > \tilde{N}a_0 = \tilde{N}_1|k|.$$

因此, 我们总能证明 $\mathcal{R}_{ijdl,k}^{2,3}$ 对于 $|l| > \tilde{N}$ 和 $|d| - |l| \neq 0$ 是空的.

情形 2.2.2 如果 $p = ||d| - |l|| = 0$, 则 $\sqrt{\lambda_{|d|}} - \sqrt{\lambda_{|l|}} = 0$. 我们有

$$|\tilde{f}_{jd} + \operatorname{sgn} l \cdot \sqrt{\lambda_{|l|}} + \lambda'_i + \langle k, \omega \rangle| = |\operatorname{sgn} j \cdot \sqrt{\lambda_{|j|}} + \lambda'_i + \langle k, \omega \rangle|.$$

若 $|j| \geq \sqrt{n^4 + \mu} + |k||\omega| + 1$, 只要 ε 充分小, 则得

$$\begin{aligned} |\tilde{f}_{jd} + \operatorname{sgn} l \cdot \sqrt{\lambda_{|l|}} + \lambda'_i + \langle k, \omega \rangle| &\geq |\sqrt{\lambda_{|j|}} - |\lambda'_i + \langle k, \omega \rangle|| \\ &> \sqrt{n^4 + \mu} + |k||\omega| + 1 - \sqrt{n^4 + \mu} - |k||\omega| \\ &\geq 1 \geq \frac{\varrho \varepsilon^{\frac{1}{3}}}{|k|^{m+5}}. \end{aligned}$$

因此, 仅需考虑情形 $|j| < \sqrt{n^4 + \mu} + |k||\omega| + 1$. 事实上,

$$\begin{aligned} \operatorname{meas} \Omega^{2,3} &= \operatorname{meas} \bigcup_{|k| \geq 1} \bigcup_{|j| < \sqrt{n^4 + \mu} + |k||\omega| + 1} \bigcup_{0 \leq |i| \leq n} \mathcal{R}_{ijdl,k}^{2,3} \\ &\leq \sum_{|k| \geq 1} 4(n+1)(\sqrt{n^4 + \mu} + |k||\omega| + 2) \frac{C \varrho^m \varepsilon^{\frac{1}{3}}}{|k||k|^{m+5}} \\ &\leq C \varrho^m \varepsilon^{\frac{1}{3}} \sum_{|k| \geq 1} \frac{1}{|k|^{m+5}} \leq C \varrho^m \varepsilon^{\frac{1}{3}} \sum_{1 \leq |k|=l} \frac{1}{l^{m+5}} 2^m l^{m-1} \\ &= C 2^m \varrho^m \varepsilon^{\frac{1}{3}} \sum_{l \geq 1} \frac{1}{l^6} \leq C \varrho^m \varepsilon^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

其中常数 C 依赖于 n, μ, ϱ 和 m . 同样, 我们可对于 $|j|, |d|$ 和 $|l| = \min\{|i|, |j|, |d|, |l|\}$ 的情形进行类似讨论, 这里可假设类似的集合 $\Omega^{2,1}, \Omega^{2,2}$ 和 $\Omega^{2,3}$ 等. 令 Ω^2 是所有这些集合的并集 (显然这些集合总数有限). 因此, 存在常数 C_2 使得 $\operatorname{meas} \Omega^2 \leq C_2 \varrho^m \varepsilon^{\frac{1}{3}}$ 成立, 其中 C_2 依赖于 μ, n, ϱ 和 m . 下面只需假设 $\bar{\Omega} = [\varrho, 2\varrho]^m \setminus \Omega^2$, 这个集合必满足

$$\operatorname{meas} \bar{\Omega} \leq (1 - C_2 \varepsilon^{\frac{1}{3}}) \varrho^m.$$

因此即得我们所要的结论. 证毕. $\square$

引理 3.4 的证明 由 Schwartz 不等式和 (3.35), 可得

$$\begin{aligned} \left| \sum_k x_k \right|^2 &= \left| \sum_k \frac{[k]^{m+\frac{1}{2}} x_k}{[k]^{m+\frac{1}{2}}} \right|^2 \leq \sum_k \frac{1}{[k]^{2m+1}} \sum_k [k]^{2m+1} |x_k|^2 \\ &= \left(\sum_{k=0} \frac{1}{[k]^{2m+1}} + \sum_{k \neq 0} \frac{1}{[k]^{2m+1}} \right) \sum_k [k]^{2m+1} |x_k|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(1 + \sum_{|k|=1} \frac{1}{[k]^{2m+1}}\right) \sum_k [k]^{2m+1} |x_k|^2 \\
 &\leq \left(1 + \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{a^{2m+1}} 2^m a^{m-1}\right) \sum_k [k]^{2m+1} |x_k|^2 \\
 &= \left(1 + 2^m \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{a^{m+2}}\right) \sum_k [k]^{2m+1} |x_k|^2,
 \end{aligned}$$

其中 $m > 0$. 由于级数 $\sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{a^{m+2}}$ 收敛, 则有

$$\left| \sum_k x_k \right|^2 \leq c \sum_k [k]^{2m+1} |x_k|^2.$$

证毕. □

Quasi-periodic solutions of beam equations with the nonlinear terms depending on the time and space variables

WANG Yi & SI JianGuo

Abstract This article is devoted to the study of a beam equation with a constant potential and an x -periodic and t -quasiperiodic nonlinear term. It is proved that the equation admits small amplitude, linearly stable and t -quasiperiodic solutions under periodic boundary conditions for most values of the frequency vector and for most potentials. By utilizing the measure estimation of essentially finitely many small divisors, we construct a real analytic, symplectic change of coordinates which can transform the Hamiltonian into some Birkhoff normal form. Based on an infinite dimensional KAM theorem, we prove the existence of quasi-periodic solutions.

Keywords infinite dimensional Hamiltonian system, KAM theory, non-autonomous beam equation, x -dependent, quasi-periodic solution, normal form

MSC(2010) 37K55, 70K43, 70K45, 70K40

doi: 10.1360/012015-52