论 文

基于移位反射边界条件的图像复原

黄捷^①, 黄廷祝^{①*}, 赵熙乐^①, 徐宗本^②^① 电子科技大学数学科学学院, 成都 611731^② 西安交通大学信息与系统科学研究所, 西安 710049

* 通信作者. E-mail: tingzhuang@126.com

收稿日期: 2011-03-04; 接受日期: 2011-05-23

国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2007CB311002)、国家自然科学基金 (批准号: 60973015)、四川省应用基础研究项目 (批准号: 2011JY0002) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: E022050205) 资助项目

摘要 在信号和图像处理中, 期望将原始场景从观测到的降质数据中恢复出来. 在数学上, 这个过程就转化成为求解一个系数矩阵为模糊矩阵的线性系统. 该模糊矩阵是由刻画模糊的点扩散函数和假设原始图像外部数据的边界条件所决定的. 为了更好地保留边界连续性以及减少复原图像中的振铃效应, 本文提出移位反射边界条件, 并在不依赖于点扩散函数对称性的情形下, 给出了对该边界条件下的模糊矩阵的 Kronecker 积逼近和相应的 SVD 型正则化算法. 实验结果表明, 基于移位反射边界条件的 SVD 型正则化算法效果很好.

关键词 图像复原 边界条件 Kronecker 积 奇异值分解 正则化

1 引言

图像复原是从观察到的降质图像中复原出原始图像的过程, 其数学模型为求解线性方程组

$$g = Kf + n, \quad (1)$$

其中 f 为真实图像, n 为任意噪声, g 为降质图像, K 为模糊矩阵. 点扩散函数 (PSF) 表示了如何扭曲图像中的点, 如果图像中的每个像素点均被同一个 PSF 所模糊, 则这种模糊被称为空间不变的; 如果图像中不同的像素点被不同的 PSF 模糊, 则这种模糊称为空间可变的. 空间不变模糊在实际问题中最为常见^[1], 因而也是本文所考虑的问题. 由于模糊过程的本质为做卷积, 向量 g 不仅仅依赖于向量 f , 还与向量 f 之外的值有关. 因此需要对向量 f 之外的这些值做一定的假设, 这些假设就称为边界条件.

零边界条件假设向量 f 之外的值均为零. 由此得到的模糊矩阵在一维情形下为 Toeplitz 矩阵, 二维情形下为块 Toeplitz 矩阵且子块也为 Toeplitz 矩阵^[2]. 但是, 如果原始信号或者图像在边界处元素值与零元相差很大, 假设零边界条件则导致了边界处的不连续性, 由此在复原图像中则会出现振铃效应. 除此之外, 求解系数矩阵为块 Toeplitz 矩阵且子块也为 Toeplitz 矩阵的线性方程组十分困难^[3~8].

假设循环边界条件能很好地解决零边界条件下图像复原问题的计算困难. 它假设向量 f 之外的值为向量 f 的循环延拓. 对应的模糊矩阵在一维情形时为循环矩阵, 二维情形时为块循环循环块矩

引用格式: 黄捷, 黄廷祝, 赵熙乐, 等. 基于移位反射边界条件的图像复原. 中国科学: 信息科学, 2012, 42: 504-519

阵^[9]. 因此, 可以使用 (二维) 快速 Fourier 变换 (FFTs) 求取这些矩阵的逆. 然而, 在大多数实际应用中, 原始信号或图像并不满足循环边界条件, 在该假设下得到的复原结果振铃效应很明显.

Ng 等^[10] 考虑了 Neumann 边界, 他们假设观测场景之外的数据是观测场景之内数据的一个反射. 对应的模糊矩阵则属于一类特殊的 (块) Toeplitz-plus-Hankel 矩阵, 它能够被离散余弦变换矩阵对角化, 因此可以快速示方程 (1) 的解. 除此之外, 在不要求 PSF 对称的情形下, Nagy 等^[11] 给出了 Neumann 边界条件下的基于截断奇异值分解 (TSVD) 的 Kronecker 积逼近算法, 该算法延拓了 Kamm 和 Nagy^[3] 的算法.

最近, Serra-Capizzano^[12] 提出了能够保持 C^1 连续性的 antireflective 边界条件. 若 PSF 对称, 则对应的模糊矩阵能够被第一类快速正弦变换 (DST I) 所对角化. Perrone^[13] 提出了一种高效算法, 它能够快速构造 antireflective 边界条件下模糊矩阵的 Kronecker 积逼近, 并且不要求 PSF 对称. 此外, 在图像处理领域, 还有很多学者设计出了许多的边界条件, 具体可参见 Lagendijk 和 Biemond^[14] 及其引用的参考文献.

本文提出移位反射 (shifting reflective) 边界条件, 假设观测场景外的图像是观测场景内的一种移位反射. 首先复制靠近边界的一列像素值, 紧接着使边界外的其他像素值取为里面像素值的一个反射, 从而直接保留了靠近边界处图像的连续性以减少复原图像中的振铃效应. 移位反射边界条件下的模糊矩阵有着特殊的结构性质: Toeplitz+Hankel+ 秩为 2 的矫正块矩阵且每个块也为 Toeplitz+Hankel+ 秩为 2 的矫正矩阵. 基于模糊矩阵的特殊性质, 本文提出了该类模糊矩阵的 Kronecker 积逼近以及相应的奇异值分解 (SVD) 型正则化算法. 对于 $n \times n$ 的图像, 直接对模糊矩阵做 SVD 的计算复杂度为 $O(n^6)$, 而新算法仅仅为 $O(n^3)$, 大大节约了计算时间. 数值实验显示了基于移位反射边界的新算法的有效性.

2 移位反射边界条件

本节首先考虑一维的去模糊问题. 假设原始信号为 $\tilde{f} = (\dots, f_{-m+1}, \dots, f_0, f_1, \dots, f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+m}, \dots)^T$, 模糊函数 (PSF) 为 $h = (\dots, 0, 0, h_{-m}, h_{-m+1}, \dots, h_0, \dots, h_{m-1}, h_m, 0, 0, \dots)^T$. 模糊信号 $g = (g_1, \dots, g_n)^T$ 是 h 与 $\tilde{f}$ 的卷积, 即

$$g_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_{i-j} f_j. \quad (2)$$

去模糊问题即是从长度有限的模糊函数 h 和模糊信号 g 中复原向量 $f = (f_1, \dots, f_n)^T$, 其中

$$g = \begin{pmatrix} h_m & \cdots & h_0 & \cdots & h_{-m} & & & & \\ & h_m & \cdots & h_0 & \cdots & h_{-m} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & h_m & \cdots & h_0 & \cdots & h_{-m} \\ & & & & & h_m & \cdots & h_0 & \cdots & h_{-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{-m+1} \\ f_{-m+2} \\ \vdots \\ f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \\ f_{n+1} \\ \vdots \\ f_{n+m-1} \\ f_{n+m} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

显然, 该线性系统是一个欠定系统, 向量 g 不止由 f 决定, 还由 f 之外的 $(f_{-m+1}, \dots, f_0)^T$ 和 $(f_{n+1}, \dots, f_{n+m})^T$ 所决定. 因此, 我们需要对这些未知元素 $f_{-m+1}, \dots, f_0$ 和 $f_{n+1}, \dots, f_{n+m}$ 进行假设, 使得未知数的个数与方程个数相等.

事实上, 方程 (3) 可变形为

$$T_l f_l + T f + T_r f_r = g, \quad (4)$$

$$\text{其中 } T_l = \begin{pmatrix} h_m & \cdots & h_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & h_m \\ 0 \end{pmatrix}, T_r = \begin{pmatrix} & & 0 \\ h_{-m} & & \\ \vdots & \ddots & \\ h_{-1} & \cdots & h_{-m} \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} h_0 & \cdots & h_{-m} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ h_m & \ddots & \ddots & \ddots & h_{-m} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & h_m & \cdots & h_0 \end{pmatrix},$$

$$f_l = (f_{-m+1}, f_{-m+2}, \dots, f_{-1}, f_0)^T, f_r = (f_{n+1}, f_{n+2}, \dots, f_{n+m-1}, f_{n+m})^T \text{ 及 } f = (f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, f_n)^T.$$

移位反射边界条件假设

$$\begin{cases} f_0 = f_1, \\ f_{-1} = f_1, \\ \vdots \\ f_{-m+1} = f_{m-1}, \end{cases} \quad \text{且} \quad \begin{cases} f_{n+1} = f_n, \\ f_{n+2} = f_n, \\ \vdots \\ f_{n+m} = f_{n-m+2}. \end{cases}$$

因此方程 (4) 变为

$$K f = [(0|T_l)J_1 + T + (T_r|0)J_2]f = g, \quad (5)$$

$$\text{其中, } J_1 = \begin{pmatrix} & & 1 & 0 \\ & \ddots & 0 \\ & 1 & \ddots \\ 1 & 0 \\ 1 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 0 & 1 \\ \ddots & \ddots \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

若进一步假设

$$H = \begin{pmatrix} h_2 & \cdots & h_m \\ \vdots & \ddots \\ h_m & & \\ & & h_{-m} \\ & \ddots & \vdots \\ h_{-m} & \cdots & h_{-2} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ h_m & \vdots \\ 0 & 0 \\ \vdots & h_{-m} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & h_{-1} \end{pmatrix},$$

则方程 (5) 中模糊矩阵 K 变为 $K = T + H + R$.

注意到, 此时 K 既不是 Toeplitz 矩阵, 也不是循环矩阵, 它是 Toeplitz+Hankel+ 秩为 2 的矫正矩阵, 其中矫正元素位于第一列和最后一列. 类似地, 二维情形时移位反射边界条件下的模糊矩阵是一个块 Toeplitz+Hankel+ 秩为 2 的矫正块矩阵, 其中每个小块也是一个 Toeplitz+Hankel+ 秩为 2 的矫正矩阵. 虽然该模糊矩阵有点复杂, 但是它能够分解为许多的简单块矩阵

$$K = K_{TT} + K_{TH} + K_{TR} + K_{HT} + K_{HH} + K_{HR} + K_{RT} + K_{RH} + K_{RR}, \quad (6)$$

其中第一个下标和第二个下标分别表示矩阵的块结构和每个块的结构.

假设 $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_n]^T$ 是一个 n 维向量, 我们使用如下的一些记号具体化方程 (6) 中的模糊矩阵 K .

- $\text{toep}(\mathbf{a}, k)$ 为第 k 列为 $\mathbf{a}$ 的 $n \times n$ 带状 Toeplitz 矩阵.
- $\text{hank}(\mathbf{a}, k)$ 为 n 阶 Hankel 矩阵, 它的第一列和最后一行分别是 $[a_{k+2}, \dots, a_n, 0, \dots, 0]^T$ 和 $[0, \dots, 0, a_1, \dots, a_{k-2}]$.
- $\text{r2corr}(\mathbf{a}, k)$ 为 n 阶秩为 2 的矫正矩阵, 它的非零元仅位于第一列和最后一列, 分别为 $[a_{k+1}, \dots, a_n, 0, \dots, 0]^T$ 和 $[0, \dots, 0, a_1, \dots, a_{k-1}]^T$.
- Toep , Hank 和 R2corr 分别定义了 toep , hank 和 r2corr 对应的块矩阵. 基于这些记号, 我们有以下结论.

注 1 假设 P 是中心为 p_{ij} 的 n 阶 PSF, 其第 k 行为 $\mathbf{p}_k^T$. 假设 $T_k = \text{toep}(\mathbf{p}_k, j)$, $T = (T_1^T, \dots, T_n^T)^T$, $H_k = \text{hank}(\mathbf{p}_k, j)$, $H = (H_1^T, \dots, H_n^T)^T$, $C_k = \text{r2corr}(\mathbf{p}_k, j)$ 及 $C = (C_1^T, \dots, C_n^T)^T$. 则 $K_{TT} = \text{Toep}(T, i)$, $K_{TH} = \text{Toep}(H, i)$, $K_{TR} = \text{Toep}(C, i)$, $K_{HT} = \text{Hank}(T, i)$, $K_{HH} = \text{Hank}(H, i)$, $K_{HR} = \text{Hank}(C, i)$, $K_{RT} = \text{R2corr}(T, i)$, $K_{RH} = \text{R2corr}(H, i)$, $K_{RR} = \text{R2corr}(C, i)$, 并且方程 (6) 变为 $K = \text{Toep}(T, i) + \text{Toep}(H, i) + \text{Toep}(C, i) + \text{Hank}(T, i) + \text{Hank}(H, i) + \text{Hank}(C, i) + \text{R2corr}(T, i) + \text{R2corr}(H, i) + \text{R2corr}(C, i)$.

实际上, 移位反射边界条件下模糊矩阵的总体结构与 Neumann 边界条件^[11]和 antireflective 边界条件^[13]下模糊矩阵的结构仅有很小的差异. 但是, 在复原图像的精度方面, 特别是靠近边界的地方, 和在图像复原的计算时间上面^[12], 这些“很小的差异”能够产生“巨大的”影响.

另外, 我们定义如下两个算子.

- vec 算子将矩阵按列串联为一个列向量. 比如, 若 $X = (x_{ij})_{n,n}$, 则 $\text{vec}(X) = (x_{11}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{nn})^T$.
- tilde 算子将块矩阵进行如下重排序, 若 $K = (K_{ij})_{i,j=1}^n$, 则 $\tilde{K} = (\text{vec}(K_{11}), \dots, \text{vec}(K_{n1}), \dots, \text{vec}(K_{1n}), \dots, \text{vec}(K_{nn}))^T$.

显然, 在 tilde 变换下, 有

$$\tilde{K} = \tilde{K}_{TT} + \tilde{K}_{TH} + \tilde{K}_{TR} + \tilde{K}_{HT} + \tilde{K}_{HH} + \tilde{K}_{HR} + \tilde{K}_{RT} + \tilde{K}_{RH} + \tilde{K}_{RR}. \quad (7)$$

最后, 我们介绍移位矩阵: $Z = (z_{ij})_{i,j=1}^n$, 其中 $z_{i,i+1} = 1$, $i = 1, \dots, n-1$, 其他元素均为零. 容易验证: $\text{toep}(\mathbf{a}, k) = [Z^{k-1}\mathbf{a}, \dots, Z^0\mathbf{a}, Z^T\mathbf{a}, \dots, (Z^{n-k})^T\mathbf{a}]$, $\text{hank}(\mathbf{a}, k) = [Z^{k+1}\mathbf{a}, \dots, Z^{n-1}\mathbf{a}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, (Z^{n-1})^T\mathbf{a}, \dots, (Z^{n-k+2})^T\mathbf{a}]$, $\text{r2corr}(\mathbf{a}, k) = [Z^k\mathbf{a}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, (Z^{n-k+1})^T\mathbf{a}]$.

3 Kronecker 积逼近

假设 P 为 n 阶 PSF, K 为移位反射边界条件下的 n^2 阶模糊矩阵. 通过计算与 P 有关的矩阵的 SVD, 我们将给出 K 的一种 Kronecker 积逼近. 这种方法已成功应用于逼近零边界、Neumann 边界和

antireflective 边界条件下的模糊矩阵. 我们首先考虑单个 Kronecker 积逼近项逼近模糊矩阵, 然后考虑任意多个逼近项的情形. 假设 P 的中心为 p_{ij} , 我们的目的是找出 n 维向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$, 使得

$$A_t = \text{toep}(\mathbf{a}, i), A_h = \text{hank}(\mathbf{a}, i), A_r = \text{r2corr}(\mathbf{a}, i), B_t = \text{toep}(\mathbf{b}, j), B_h = \text{hank}(\mathbf{b}, j), B_r = \text{r2corr}(\mathbf{b}, j),$$

最小化范数 $\|K - (A_t + A_h + A_r) \otimes (B_t + B_h + B_r)\|_F$.

我们首先给出如下定理, 它将如上涉及 n^2 阶矩阵的 Frobenius 范数转化为只涉及 n 阶矩阵的情形.

定理 设 P 是中心为 p_{ij} 的 n 阶 PSF, 移位反射边界条件下的模糊矩阵为 K , 并且令 A_t, A_h, A_r, B_t, B_h 和 B_r 如上定义. 则

$$\|K - (A_t + A_h + A_r) \otimes (B_t + B_h + B_r)\|_F = \|R_i P R_j^T - (R_i \mathbf{a})(R_j \mathbf{b})^T\|_F, \quad (8)$$

其中 $k = i$ 或 j , R_k 是如下对称矩阵的 Cholesky 因子:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{v} & A_{12} \\ \mathbf{v}^T & 0 & \mathbf{w}^T \\ A_{12}^T & \mathbf{w} & A_{22} \end{pmatrix} + \text{tridiag}(2, n, 2) - B, \quad (9)$$

其中,

- A_{11} 为 $k-1$ 阶对称 Toeplitz 矩阵, 它的第一行为: $[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ \cdots]$;
- A_{22} 为 $n-k$ 阶对称 Toeplitz 矩阵, 它的第一行为: $[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ \cdots]$;
- A_{12} 为 $(k-1) \times (n-k)$ Hankel 矩阵, 它的第一列和最后一行分别为: $[\cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ 和 $[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots]$;
- $\mathbf{v}$ 为 $(k-1)$ 维列向量 $[\cdots \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$;
- $\mathbf{w}$ 为 $(n-k)$ 维列向量 $[0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ \cdots]^T$;
- $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ 为 n 阶对称矩阵, 其中 $b_{ij} = 1$ 若 $|i-j| = 1, i = k$ 或 $j = k$, 其余元素为 0.

我们稍后证明这个定理. 根据定理 1, 通过计算 n 阶矩阵 $R_i P R_j^T$ 的 SVD 构造 (8) 式右端项向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$, 我们给出如下对模糊矩阵 K 的 Kronecker 积逼近算法.

算法 1 构造 K 的 Kronecker 积逼近 $K \approx A \otimes B$,

- 1) 计算 R_i 和 R_j ,
- 2) 构造 $P_r = R_i P R_j^T$,
- 3) 计算 SVD: $P_r = \sum \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T$,
- 4) 构造 $\mathbf{a} = \sqrt{\sigma_1} R_i^{-1} \mathbf{u}_1$ 和 $\mathbf{b} = \sqrt{\sigma_1} R_j^{-1} \mathbf{v}_1$,
- 5) 构造 $A_t = \text{toep}(\mathbf{a}, i), A_h = \text{hank}(\mathbf{a}, i), A_r = \text{r2corr}(\mathbf{a}, i), B_t = \text{toep}(\mathbf{b}, j), B_h = \text{hank}(\mathbf{b}, j)$ 及 $B_r = \text{r2corr}(\mathbf{b}, j)$. 令 $A = A_t + A_h + A_r$ 和 $B = B_t + B_h + B_r$.

注意: 在大多数实际问题中, P_r 的奇异值快速衰减至零 (请见第 4 节和参考文献 [3,11,12] 中的数值实验), 且常有 $\sigma_1 \gg \sigma_2 \approx \cdots \approx \sigma_n \approx 0$. 因此 $K \approx A \otimes B$ 通常已是一个很好的逼近. 但是, 如若需要秩为 s 的逼近, 其中 $1 \leq s \leq \text{rank}(P_r)$, 则可将如上算法的步骤 4) 和 5) 替换为

- 4') 对 $k = 1, \dots, s$, 构造向量 $\mathbf{a}_k = \sqrt{\sigma_k} R_i^{-1} \mathbf{u}_k$ 和 $\mathbf{b}_k = \sqrt{\sigma_k} R_j^{-1} \mathbf{v}_k$.
- 5') 对 $k = 1, \dots, s$, 构造矩阵: $A_{tk} = \text{toep}(\mathbf{a}_k, i), A_{hk} = \text{hank}(\mathbf{a}_k, i), A_{rk} = \text{r2corr}(\mathbf{a}_k, i), B_{tk} = \text{toep}(\mathbf{b}_k, j), B_{hk} = \text{hank}(\mathbf{b}_k, j)$ 和 $B_{rk} = \text{r2corr}(\mathbf{b}_k, j)$.

因此, 方程 (8) 变为

$$\left\| K - \sum_{k=1}^s (A_{tk} + A_{hk} + A_{rk}) \otimes (B_{tk} + B_{hk} + B_{rk}) \right\|_F = \left\| R_i P R_j^T - \sum_{k=1}^s (R_i \mathbf{a}_k)(R_j \mathbf{b}_k)^T \right\|_F.$$

注意: 本文提出的对模糊矩阵 K 的 Kronecker 积逼近可以用于构造基于 SVD 的正则化预条件子, 这些预条件子能够用于加快共轭梯度型方法求解大规模病态线性系统 (1) 的收敛速度 [3,7,15,16].

现在我们对定理 1 进行证明. 根据 Loan 和 Pitsianis^[17] 的结论, 有 $\|K - (A_t + A_h + A_r) \otimes (B_t + B_h + B_r)\|_F = \|\tilde{K} - \text{vec}(A_t + A_h + A_r) \cdot \text{vec}(B_t + B_h + B_r)^T\|_F$. 为了最小化上式左边范数, 我们需要如下引理.

引理 1 设 P 为中心为 p_{ij} 的 n 阶 PSF, Z 为 n 阶移位矩阵. K_{TT} , K_{TH} , K_{TR} , K_{HT} , K_{HH} , K_{HR} , K_{RT} , K_{RH} 和 K_{RR} 如 (6) 式所示. 则 (i) $\tilde{K}_{TT} = D_{Ti} \tilde{P} D_{Tj}^T$, (ii) $\tilde{K}_{TH} = D_{Ti} \tilde{P} D_{Hj}^T$, (iii) $\tilde{K}_{TR} = D_{Ti} \tilde{P} D_{Rj}^T$, (iv) $\tilde{K}_{HT} = D_{Hi} \tilde{P} D_{Tj}^T$, (v) $\tilde{K}_{HH} = D_{Hi} \tilde{P} D_{Hj}^T$, (vi) $\tilde{K}_{HR} = D_{Hi} \tilde{P} D_{Rj}^T$, (vii) $\tilde{K}_{RT} = D_{Ri} \tilde{P} D_{Tj}^T$, (viii) $\tilde{K}_{RH} = D_{Ri} \tilde{P} D_{Hj}^T$, (ix) $\tilde{K}_{RR} = D_{Ri} \tilde{P} D_{Rj}^T$, 其中 $\tilde{P} = \begin{pmatrix} P & \cdots & P \\ \vdots & & \vdots \\ P & \cdots & P \end{pmatrix}$, $k = i$ 或 j ,

D_{Tk} , D_{Hk} 和 D_{Rk} 分别为如下块对角矩阵:

$$\begin{aligned} D_{Tk} &= \text{diag}[Z^{k-1}, \dots, Z^0, Z^T, \dots, (Z^{n-k})^T]; \\ D_{Hk} &= \text{diag}[Z^{k+1}, \dots, Z^{n-1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, (Z^{n-1})^T, \dots, (Z^{n-k+2})^T]; \\ D_{Rk} &= \text{diag}[Z^k, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, (Z^{n-k+1})^T]. \end{aligned}$$

证明 该引理的证明类似于文献 [3,11,13] 中证明方法. 我们仅证明 (ii) 式; 其余等式可类推得到.

注意到 $K_{TH} = \text{Toep}(H, i) = \begin{pmatrix} \text{hank}(\mathbf{p}_i, j) & \cdots & \text{hank}(\mathbf{p}_1, j) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \text{hank}(\mathbf{p}_n, j) & & \text{hank}(\mathbf{p}_i, j) & \text{hank}(\mathbf{p}_1, j) \\ & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \text{hank}(\mathbf{p}_n, j) & \cdots & \text{hank}(\mathbf{p}_i, j) \end{pmatrix}$, 其中 $\mathbf{p}_k^T$ 为 P 的第 k 行.

设 K_{TH} 的第 k 个块列为 $K_{TH}(:, k)$, 对 $k \leq i$, 设 $\hat{Z} = \text{diag}[Z^{k+1}, \dots, Z^{n-1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, (Z^{n-1})^T, \dots, (Z^{n-k+2})^T]$, 则

$$\tilde{K}_{TH}(:, k) = \begin{pmatrix} \text{vec}(\text{hank}(\mathbf{p}_{i-k+1}, j))^T \\ \vdots \\ \text{vec}(\text{hank}(\mathbf{p}_n, j))^T \\ \mathbf{0}^T \\ \vdots \\ \mathbf{0}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{i-k+1}^T & \cdots & \mathbf{p}_{i-k+1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{p}_n^T & \cdots & \mathbf{p}_n^T \\ \mathbf{0}^T & & \mathbf{0}^T \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0}^T & & \mathbf{0}^T \end{pmatrix} \times \hat{Z} = Z^{i-k} [P \cdots P] D_{Hj}^T.$$

类似地, 对 $k > i$, 有 $\tilde{K}_{TH}(:, k) = (Z^{k-i})^T [P \cdots P] D_{Hj}^T$. 因此,

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_{TH}(:, k) &= \begin{pmatrix} \tilde{K}_{TH}(:, 1) \\ \vdots \\ \tilde{K}_{TH}(:, i) \\ \vdots \\ \tilde{K}_{TH}(:, n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Z^{i-1}[P \cdots P]D_{Hj}^T \\ \vdots \\ Z^0[P \cdots P]D_{Hj}^T \\ Z^T[P \cdots P]D_{Hj}^T \\ \vdots \\ (Z^{n-i})^T[P \cdots P]D_{Hj}^T \end{pmatrix} \\
&= D_{Ti} \tilde{P} D_{Hj}^T.
\end{aligned}$$

证毕.

根据引理 1 和 (7) 式, 有 $\tilde{K} = (D_{Ti} + D_{Hi} + D_{Ri})\tilde{P}(D_{Tj} + D_{Hj} + D_{Rj})^T$. 又因为 $A_t = \text{toep}(\mathbf{a}, i)$, $A_h = \text{hank}(\mathbf{a}, i)$, $A_r = \text{r2corr}(\mathbf{a}, i)$ (对 B_t , B_h 和 B_r 也有类似结论), 则如下结论成立.

引理 2 假设 A_t , A_h , A_r , B_t , B_h , B_r , D_{Tk} , D_{Hk} 和 D_{Rk} 分别如算法 1 和引理 1 中定义. 则有 $\text{vec}(A_t + A_h + A_r) = (D_{Ti} + D_{Hi} + D_{Ri}) \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \vdots \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}$ 和 $\text{vec}(B_t + B_h + B_r) = (D_{Tj} + D_{Hj} + D_{Rj}) \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$.

根据引理 1 和 2, 有

$$\begin{aligned}
&\tilde{K} - \text{vec}(A_t + A_h + A_r) \cdot \text{vec}(B_t + B_h + B_r)^T \\
&= (D_{Ti} + D_{Hi} + D_{Ri}) \left(\tilde{P} - \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \vdots \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} [\mathbf{b}^T \cdots \mathbf{b}^T] \right) (D_{Tj} + D_{Hj} + D_{Rj})^T \\
&= (D_{Ti} + D_{Hi} + D_{Ri}) [I, \dots, I]^T (P - \mathbf{a}\mathbf{b}^T) [I \cdots I] (D_{Tj} + D_{Hj} + D_{Rj})^T.
\end{aligned}$$

若做 QR 分解: $(D_{Ti} + D_{Hi} + D_{Ri}) [I, \dots, I]^T = \hat{Q}_i \hat{R}_i$ 和 $(D_{Tj} + D_{Hj} + D_{Rj}) [I, \dots, I]^T = \hat{Q}_j \hat{R}_j$, 则

$$\begin{aligned}
&\|K - (A_t + A_h + A_r) \otimes (B_t + B_h + B_r)\|_F \\
&= \left\| (D_{Ti} + D_{Hi} + D_{Ri}) \begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix} (P - \mathbf{a}\mathbf{b}^T) \left((D_{Tj} + D_{Hj} + D_{Rj}) \begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix} \right)^T \right\|_F \\
&= \left\| R_i (P - \mathbf{a}\mathbf{b}^T) R_j^T \right\|_F,
\end{aligned}$$

其中 R_i 和 R_j 分别为 $\hat{R}_i$ 和 $\hat{R}_j$ 的 n 阶顺序上三角子矩阵. 现在分析 R_i 和 R_j 的结构性质. 由于 R_i 和 R_j 结构类似, 以下仅考虑 R_i . 注意到 $R_i^T R_i = \hat{R}_i^T \hat{R}_i = [I \cdots I] (D_{Ti} + D_{Hi} + D_{Ri})^T (D_{Ti} + D_{Hi} +$

$D_{Ri})[I, \dots, I]^T$. 令 $W = (D_{Ti} + D_{Hi} + D_{Ri})[I, \dots, I]^T$, 则当 $i \leq n/2$, 有

$$W = \begin{bmatrix} Z^{i-1} + Z^{i+1} + Z^i \\ Z^{i-2} + Z^{i+2} \\ \vdots \\ Z^1 + Z^{2i-1} \\ Z^0 + Z^{2i} \\ Z^T + Z^{2i+1} \\ \vdots \\ (Z^{n-2i-1})^T + Z^{n-1} \\ (Z^{n-2i})^T \\ (Z^{n-2i+1})^T \\ (Z^{n-2i+2})^T \\ (Z^{n-2i+3})^T + (Z^{n-1})^T \\ \vdots \\ (Z^{n-i-1})^T + (Z^{n-i+3})^T \\ (Z^{n-i})^T + (Z^{n-i+2})^T + (Z^{n-i+1})^T \end{bmatrix},$$

因此,

$$R_i^T R_i = W^T W$$

$$= (Z^i)^T (Z^{i-1} + Z^{i+1}) + (Z^{i-1} + Z^{i+1})^T Z^i \quad (10)$$

$$+ \sum_{k=1}^i ((Z^{i-k})^T (Z^{i+k}) + (Z^{i+k})^T (Z^{i-k})) \quad (11)$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} (Z^k)^T Z^k + \sum_{k=1}^{n-1} Z^k (Z^k)^T \quad (12)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-2i-1} (Z^k Z^{2i+k} + (Z^{2i+k})^T (Z^k)^T) \quad (13)$$

$$+ \sum_{k=1}^{i-2} (Z^{n-2i+k+2} (Z^{n-k})^T + Z^{n-k} (Z^{n-2i+k+2})^T) \quad (14)$$

$$+ Z^{n-i+2} (Z^{n-i+1})^T + Z^{n-i+1} (Z^{n-i+2})^T \quad (15)$$

$$+ Z^{n-i} (Z^{n-i+1})^T + Z^{n-i+1} (Z^{n-i})^T. \quad (16)$$

为了看清 $W^T W$ 的结构, 我们需要如下关于移位矩阵 Z 的一些结论.

引理 3 设 Z 为 n 阶移位矩阵. 则对于 $i \leq n/2$, 有

1) $(Z^i)^T (Z^{i-1} + Z^{i+1}) = (b_{st}^{(1)})_{s,t=1}^n$, 其中 $b_{st}^{(1)} = 1$ 当 $|s-t| = 1$, $s = i+1, \dots, n$, 其余元素为 0.

2) $\sum_{k=1}^i (Z^{i-k})^T Z^{i+k} = (b_{st}^{(2)})_{s,t=1}^n$, 其中 $b_{st}^{(2)} = 1$ 当 $t-s = 2k$, $s = i+1-k, \dots, n-2k$, $k = 1, \dots, i$, 其余元素为 0.

3) $\sum_{k=1}^{n-2i-1} Z^k Z^{2i+k} = (b_{st}^{(3)})_{s,t=1}^n$, 其中 $b_{st}^{(3)} = 1$ 当 $t-s = 2i+2k$, $t = 2i+2k+1, \dots, n$, $k = 1, \dots, n-2i-1$, 其余元素为 0.

4) $\sum_{k=1}^{i-2} Z^{n-2i+k+2} (Z^{n-k})^T = (b_{st}^{(4)})_{s,t=1}^n$, 其中 $b_{st}^{(4)} = 1$ 当 $s-t = 2k$ 或 $s+t = 2i-2k$, $t = 1, \dots, i-2k$, $k = 1, \dots, \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$, 其余元素为 0.

根据引理 3, (10), (11), (13) 和 (14) 式得以简化; (15) 和 (16) 式可类推得到. 注意到 $\sum_{k=0}^{n-1} (Z^k)^T (Z^k) + \sum_{k=1}^{n-1} (Z^k)(Z^k)^T = nI$ 成立. 因此, 当 $k = i \leq n/2$, 矩阵 $W^T W$ 就简化为 (9) 式, 类似地, 该结论对于 $i \geq n/2$ 也同样成立. 除此之外, 由于 (9) 式中指标 i 和 j 是可交换的, 因此这些结果对于 $R_j^T R_j$ 也成立. 这就证明了定理 1.

4 数值实验

采用文献 [3,11,13] 中相似的构造过程, 对 K 的 Kronecker 积逼近能有效的用于构造如下基于 SVD 的复原算法. 首先构造 K 的 Kronecker 积逼近:

1. 计算 SVD: $A_1 = U_A \Sigma_A V_A^T$ 和 $B_1 = U_B \Sigma_B V_B^T$;

2. 令 $U = U_A \otimes U_B$, $V = V_A \otimes V_B$ 和 $\Sigma = \text{diag}(U^T T V)$, 其中 A_k 和 B_k 通过算法 1 得到, $T = \sum_{k=1}^s A_k \otimes B_k \approx K$. 则截断的 SVD(TSVD) 产生正则解 $f_{\text{tsvd}} = V \Sigma^\dagger U^T g$, 其中 $\Sigma^\dagger = \text{diag}(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_t}, 0, \dots, 0)$, $0 \leq t \leq N$, t 为截断参数或者正则化参数. 学者们提出了很多正则参数的选择方法 [18~21]. 本文使用广义交叉确认法 (generalized cross validation, GCV) 选取正则化参数: $t = \arg \min_k G(k) = \arg \min_k \frac{\|K \hat{f}_k - g\|_2^2}{(N-k)^2}$, 其中 $\hat{f}_k = V \text{diag}(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_k}, 0, \dots, 0) U^T g$, N 为图像中像素点的数目. 注意到如上算法中最耗时部分为对 3 个 n 阶矩阵做 SVD 和几个矩阵向量乘, 计算复杂度为 $O(n^3)$, 而对 K 做 SVD 为 $O(n^6)$.

本节将展示图像复原问题中假设移位反射边界条件, 基于算法 1 的 SVD 型正则化算法的高效性. 我们首先将新提出的移位反射边界与其他经典边界进行比较, 而后比较移位反射边界条件下 SVD 型正则化算法与其他正则化算法的性能. 本文所有实验基于 MATLAB 7.0 软件, 实验平台为一台 Intel(R) Core(TM) i5 CPU 2.27 GHz 和 2 GB 内存的 PC 电脑. 浮点精度为 10^{-16} . 信噪比 (SNR) $\text{SNR} = 20 \log_{10}(\|f\|_2 / \|\hat{f} - f\|_2)$ 和相对误差 (ReErr) $\text{ReErr} = \|\hat{f} - f\|_2 / \|f\|_2$ 被用于比较复原图像的数值结果, 其中 $\hat{f}$ 和 f 分别为复原图像和原始图像.

4.1 边界条件比较

实验 1 图 1(a) 为 256×256 的原始图片. 图 2(a) 给出了采用 3 次相位板进行景深延拓的波前编码系统得到的非对称 PSF [22]. 为了消除人为假设的边界条件的影响, 模糊算子作用在 512×512 的图片上, 而后取出模糊图片的中心部分, 再加上 2% 的 Gaussian 白噪声, 降质图像如图 1(b). 注意, 该 PSF 非对称且不能被对称 PSF 很好地逼近, 因此基于快速变换的方法并不适用于此类问题 [10,12]. 图 2(b) 所示为 PSF 的前 60 个奇异值, 可以看出, 奇异值的下降速度非常快.

表 1 给出了移位反射边界条件下不同 s 的数值结果, 包含 SNRs, ReErrs 和计算时间 (Time). 从表 1 可以看出, 新提出的基于 SVD 的正则化复原算法在 $s \leq 5$ 时已得到很好的复原效果. 图 3(a)~(e) 分别给出了零边界、循环边界、Neumann 边界、antireflective 边界以及移位反射边界条件下的复原图像.

图 1 原始图像 (a) 以及降质图像 (b)

Figure 1 The original image (a) and the blurred noisy image (b)

图 2 非对称 PSF(a), 以及它的前 60 个奇异值 (b)

Figure 2 Image of the non-symmetric PSF (a), and a plot of its first 60 singular values (b)

表 1 实验 1 中移位反射边界条件下不同 s 的复原结果对比Table 1 Comparison results of Example 1 using shifting reflective BCs with different s

s	Reg_{para}	SNR	ReErr	Time
1	5211	18.4674	0.1193	1.0296
2	5467	19.3808	0.1074	1.1076
3	5771	20.3677	0.0959	1.1232
4	5770	20.3823	0.0957	1.4976
5	5817	20.3880	0.0956	1.5912
6	5769	20.3636	0.0959	1.6224
7	5754	20.3888	0.0956	1.7316

正如我们所期望地, 移位反射边界条件着重解决图像在边缘处的不连续性, 从而减少了复原图像中的振铃效应.

实验 2 选取 256×256 的测试图片 “walkbridge”, 如图 4(a), 首先通过模糊参数半径为 3 的散焦 (out-of-focus) 模糊生成的 PSF 模糊原始图片, 然后加入 1% 的 Gaussian 白噪声, 得到的退化图片如图 4(b). 图 4(c)~(g) 给出了各种边界条件下的复原图像. 从图 4 可以看出, 移位反射边界条件下的复

图 3 实验 1 中各种边界条件下复原图像对比

Figure 3 Restored images of Example 1 with different BCs. (a) Zero BCs; (b) periodic BCs; (c) antireflective BCs; (d) Neumann BCs; (e) shifting reflective BCs

图 4 实验 2 中各种边界条件下复原图像对比

Figure 4 (a) The original "walkbridge" image; (b) the blurred and noisy image; (c) the restored image with zero BCs; (d) the restored image with periodic BCs; (e) the restored image with antireflective BCs; (f) the restored image with Neumann BCs; (g) the restored image with shifting reflective BCs

表 2 各种边界条件下的复原图像数值结果对比
Table 2 Summary of restoration results for different BCs

	BCs	Reg _{para}	SNR	ReErr	Time
Example 1	Zero	5500	11.5608	0.2642	0.9048
	Periodic	10059	14.3529	0.1916	0.0936
	Antireflective	14440	16.1571	0.1556	1.3104
	Neumann	5907	20.3505	0.0960	1.3572
	Shifting reflective	5817	20.3880	0.0956	1.5912
Example 2	Zero	10247	14.9227	0.1794	0.9672
	Periodic	8875	18.3702	0.1206	0.1716
	Antireflective	22110	19.4961	0.1060	1.4508
	Neumann	10334	19.9826	0.1002	1.4820
	Shifting reflective	14114	20.1229	0.0986	1.2948

原图像的视觉效果与 Neumann 边界条件下的类似, 明显优于其他边界条件. 对应的, 表 2 比较了不同边界条件下复原图像的 SNRs, ReErrs, Time 以及正则参数 (Reg_{para}). 从表 2 可以看出, 移位反射边界条件下复原图像的 SNR 和 ReErr 明显优于零边界和循环边界条件, 略优于 antireflective 与 Neumann 边界条件. 这些结果均显示移位反射边界条件与经典边界条件相比, 非常具有吸引力.

4.2 正则化方法比较

本小节将提出的 SVD 型正则化方法与另外 3 种流行的正则化方法进行比较, 他们是用于最小二乘问题的共轭梯度法 (the conjugate gradient method for least squares problems, CGLS)^[23], 混合方法 (hybrid method)^[20], 和全变分正则化方法 (Total variation (TV) regularization method)^[24].

迭代正则化方法, 比如 CGLS, 是最为流行的求解大规模病态线性系统 (1) 的正则化方法^[23,18,19,25]. CGLS 的迭代次数起到正则化参数的作用. 众所周知, 正则化方法通常需要适合的正则化参数才十分有效. 为 CGLS 方法选择合适的正则化参数或迭代的停止准则十分关键且非常困难^[21,20]. Hybrid 方法使用直接法求解迭代过程中产生的中小规模方程组^[20,26~29]部分克服了 CGLS 中正则化参数选择困难的问题, 引起了广泛的关注. 除此之外, Rudin 等提出的能够保存图像边界的 TV 方法也十分流行^[30,31].

在接下来的两个实验中, 我们将在 SNRs, ReErrs 和 Time 方面比较本文提出的算法与以上 3 种正则化方法. 选取在多次试验中使得 ReErr 最小的正则化参数作为 CGLS 和 TV 方法的最佳正则化参数, 并列出相应的数值结果. 该最佳正则化参数的选取耗费了额外的计算时间. 由于这部分时间难于计算, 因此在最终的计算时间 (Time) 中并没有体现. Hybrid 方法和 TV 方法的程序分别是基于 Nagy 的图像复原程序包^[32]和 Vogel 的代码^[24]. 除此之外, 在实验中, 我们设迭代的初始向量均为零向量, 且相邻两次迭代的复原图像的相对误差若满足: $\|\hat{f}^{i+1} - \hat{f}^i\|_2 / \|\hat{f}^{i+1}\|_2 < 10^{-4}$ 则停止迭代.

实验 3 图 5(a) 为原始大小为 256×256 的测试图片. PSF 为 9×9 的 box-car 模糊算子^[33~35]:

$$h(i, j) = \begin{cases} 1/81, & 0 \leq i, j \leq 8, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

图 5 实验 3 中各种正则化方法复原图像对比

Figure 5 (a) The original “cameraman” image; (b) the blurred noisy image; (c) the restored image by CGLS method; (d) the restored image by Hybrid method; (e) the restored image by TV method; (f) the restored image by our method

表 3 各种正则化方法复原图像数值结果对比

Table 3 Summary of restoration results for different methods

	Method	SNR	ReErr	Time
Example 3	CGLS	11.2431	0.2741	0.6084
	Hybrid	8.5788	0.3724	18.8293
	TV	11.2352	0.2743	2.0748
	Our method	20.4248	0.0952	1.3884
Example 4	CGLS	16.0703	0.1572	1.1544
	Hybrid	8.8266	0.3620	24.0398
	TV	16.0760	0.1571	2.8080
	Our method	21.0176	0.0880	1.5132

而后加入了 1% 的 Gaussian 白噪声, 降质图片如图 5(b) 所示.

图 5(c)~(f) 分别为使用 CGLS, Hybrid, TV 和我们的方法复原出来的图像. 从视觉效果方面来看, 我们的方法复原出的图像比另外 3 种正则化方法复原出的图像好.

实验 4 图 6(a) 为原始大小为 256×256 的测试图片. 它被长度为 7 的循环均值滤波 (circular averaging filter) 和 2% 的 Gaussian 白噪声所退化, 降质图片如图 6(b). CGLS, Hybrid, TV 方法和本文提出的方法的复原效果如图 6(c)~(f) 显示. 从视觉效果方面来看, 本文提出的方法更为优越. 除此之外, 表 3 列出了实验 3 和实验 4 中各种方法复原图像的数值结果. 显然, 新方法在 SNR 和 ReErr

图 6 实验 4 中各种正则化方法复原图像对比

Figure 6 (a) The original image; (b) the blurred noisy image; (c) the restored image by CGLS method; (d) the restored image by Hybrid method; (e) the restored image by TV method; (f) the restored image by our method

方面都明显优于另外 3 种流行的正则化方法. 并且, 新方法的计算时间明显少于 Hybrid 方法, 稍少于 TV 方法, 略多于 CGLS 方法, 但是注意, 寻找 TV 方法和 CGLS 方法的最佳正则化参数需要耗费额外的时间, 而这些时间我们并没有列出.

5 结论

本文提出了图像复原问题的移位反射边界条件, 且在不要 PSF 对称的情形下, 构造了该边界条件下模糊矩阵的 Kronecker 积逼近, 并在此基础上设计了图像复原的 SVD 型正则化算法. 我们的数值实验表明移位反射边界条件有效解决了图像边缘的不连续性, 进而减少了复原图像中的振铃效应. 进一步实验表明, 新算法在复原图像的视觉效果, 信噪比和相对误差方面都比目前流行的 3 种正则化方法更有竞争力. 除此之外, 如果需要, 我们愿意通过 E-mail 的方式提供本文数值实验的程序.

参考文献

- 1 Jain A K. Fundamentals of Digital Image Processing. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1989. 4-6
- 2 Andrews H, Hunt B. Digital Image Restoration. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1977. 211-220
- 3 Kamm J, Nagy J G. Optimal Kronecker product approximation of block Toeplitz matrices. SIAM J Matrix Anal Appl, 2000, 22: 155-172
- 4 Levinson N. The Wiener RMS (root mean square) error criterion in filter design and prediction. J Math Phys, 1946, 25: 261-278
- 5 Kailath T, Sayed A H. Displacement structure: theory and applications. SIAM Rev, 1995, 37: 297-386

- 6 Ammar G S, Gragg W B. Superfast solution of real positive definite Toeplitz systems. *SIAM J Matrix Anal Appl*, 1988, 9: 61–76
- 7 Chan R H, Ng M K. Conjugate gradient methods for Toeplitz systems. *SIAM Rev*, 1996, 38: 427–482
- 8 Kalouptsidis N, Carayannis G, Manolakis D. Fast algorithms for block Toeplitz matrices with Toeplitz entries. *Signal Process*, 1984, 6: 77–81
- 9 Gonzalez R C, Woods R E. *Digital Image Processing*. 2nd ed. Reading: Addison-Wesley, 1992. 258–260
- 10 Ng M K, Chan R H, Tang W C. A fast algorithm for deblurring models with Neumann boundary conditions. *SIAM J Sci Comput*, 1999, 21: 851–866
- 11 Nagy J G, Ng M K, Perrone L. Kronecker product approximations for image restoration with reflexive boundary conditions. *SIAM J Matrix Anal Appl*, 2004, 25: 829–841
- 12 Serra-Capizzano S. A note on antireflective boundary conditions and fast deblurring models. *SIAM J Sci Comput*, 2003, 25: 1307–1325
- 13 Perrone L. Kronecker product approximations for image restoration with anti-reflective boundary conditions. *Numer Linear Algebr Appl*, 2006, 13: 1–22
- 14 Legendijk R L, Biemond J. *Iterative identification and restoration of images*. Dordrecht: Kluwer, 1991. 21–22
- 15 Nagy J G, Kilmer M E. Kronecker product approximation for preconditioning in three-dimensional imaging applications. *IEEE Trans Image Process*, 2006, 15: 604–613
- 16 Rezghi M, Hosseini S M. Lanczos based preconditioner for discrete ill-posed problems. *Computing*, 2010, 88: 79–96
- 17 Loan C V, Pitsianis N. Approximation with Kronecker products. In: *Linear Algebra for Large Scale and Real Time Applications*, Moonen M S and Golub G H (eds), Kluwer, Dordrecht, 1993, 293–314
- 18 Engl H W, Hanke M, Neubauer A. *Regularization of Inverse Problems*. Dordrecht: Kluwer, 1996. 71–112
- 19 Hansen P C. *Rank Deficient and Discrete Ill-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion*. Philadelphia: SIAM, 1997. 175–192
- 20 Chung J, Nagy J G, O’Leary D P. A weighted-GCV method for Lanczos-Hybrid regularization. *Electron Trans Numer Anal*, 2010, 28: 149–167
- 21 Viloche Bazán F S, Borges L S. GKB-FP: an algorithm for large-scale discrete ill-posed problems. *BIT*, 2010, 50: 481–507
- 22 Dowski E R, Cathey W T. Extended depth of field through wavefront coding. *Appl Optics*, 1995, 34: 1859–1866
- 23 Björck A. *Numerical Methods for Least Squares Problems*. Philadelphia: SIAM, 1996. 288–293
- 24 Vogel C R. *Computational Methods for Inverse Problems*. Philadelphia: SIAM, 2002. 136–141
- 25 Hanke M. *Conjugate Gradient Type Methods for Ill-Posed Problems*. Harlow: Longman, 1995. 16–17
- 26 O’Leary D P, Simmons J A. A bidiagonalization-regularization procedure for large scale discretizations of ill-posed problems. *SIAM J Sci Statist Comput*, 1981, 2: 474–489
- 27 Kilmer M E, O’Leary D P. Choosing regularization parameters in iterative methods for ill-posed problems. *SIAM J Matrix Anal Appl*, 2001, 22: 1204–1221
- 28 Kilmer M E, Hansen P C, Español M I, A projected-based approach to general form Tikhonov regularization. *SIAM J Sci Comput*, 2007, 29: 315–330
- 29 Jiang M F, Xia L, Shou G F, et al. Two hybrid regularization frameworks for solving the electrocardiography inverse problem. *Phys Med Biol*, 2008, 53: 5151–5164
- 30 Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D: Nonlinear Phenom*, 1992, 60: 259–268
- 31 Paragios N, Chen Y, Faugeras O. *Handbook of Mathematical Models in Computer Vision*. New York: Springer, 2005. 17–31
- 32 Nagy J G, Palmer K M, Perrone L. Iterative methods for image deblurring: a Matlab object-oriented approach. *Numer Algorithm*, 2004, 36: 73–93
- 33 Banham M R, Katsagelos A K. Spatially adaptive wavelet-based multiscale image restoration. *IEEE Trans Image Process*, 1996, 5: 619–634
- 34 Neelamani R, Choi H, Baraniuk R. ForWaRD: Fourier-wavelet regularized deconvolution for ill-conditioned systems. *IEEE Trans Signal Process*, 2004, 52: 418–433

- 35 Wen Y W, Ng M K, Ching W K. Iterative algorithms based on decoupling of deblurring and denoising for image restoration. *SIAM J Sci Comput*, 2008, 30: 2655–2674

Image restoration with shifting reflective boundary conditions

HUANG Jie¹, HUANG TingZhu^{1*}, ZHAO XiLe¹ & XU ZongBen²

¹ *School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China;*

² *Institute of Information and System Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*

*E-mail: tingzhu@126.com

Abstract In signal and image processing, we want to recover a faithful representation of an original scene from blurred, noisy image data. This process can be transformed mathematically into solving a linear system with a blurring matrix. Particularly, the blurring matrix is determined from not only a point spread function (PSF), which defines how each pixel is blurred, but also boundary conditions (BCs), which specify our assumptions on the data outside the domain of consideration. In this paper, we first propose shifting reflective BCs which preserve the continuity at the boundaries and, therefore, reduce ringing effects in the restored image. A Kronecker product approximation of the corresponding blurring matrix is then provided, regardless of symmetry requirement of the PSF. Finally, we demonstrate the efficiency of our approximation in an SVD-based regularization method by several numerical examples.

Keywords image restoration, boundary conditions, Kronecker product, singular value decomposition, regularization

HUANG Jie was born in 1986. She obtained her B.S. degree in applied mathematics from College of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing in 2007. Currently, she is pursuing a Ph.D. degree at University of Electronic Science and Technology of China under the direction of Prof. Huang TingZhu. Her recent research includes numerical linear algebra and image processing.

HUANG TingZhu was born in 1964. He received the Ph.D. degree in Xi'an Jiaotong University, Xi'an in 2000. Currently, he is a Professor at School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China (UESTC). His research interests include scientific computation with applications, image processing, etc.

XU ZongBen was born in 1955. He received his Ph.D. degree in mathematics from Xi'an Jiaotong University, Xi'an in 1987. He now serves as Vice President of Xi'an Jiaotong University, the Chief Scientist of National Basic Research Program of China (973 Project), and Director of the Institute for Information and System Sciences of the university. His current research interests include nonlinear functional analysis and intelligent information processing.

ing. He was elected as member of Chinese Academy of Sciences in 2011.