中国科学: 数学 2015 年 第 45 卷 第 9 期: 1363～1382
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

综 述

浅谈渐近分析

献给徐利治教授 95 华诞

王世全

香港城市大学, 香港

E-mail: rscwong@cityu.edu.hk

收稿日期: 2015-02-27; 接受日期: 2015-06-01

摘要 本文旨在对 20 世纪后半叶关于渐近分析理论的最新进展作全方位的概述, 其中包括一些经典领域, 如积分的渐近逼近、微分方程的渐近解和奇异摄动理论; 也涵盖了一些新兴领域, 如差分方程的渐近理论和 Riemann-Hilbert 方法.

关键词 最速下降法 WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) 方法 奇异摄动理论 差分方程 Riemann-Hilbert 方法

MSC (2010) 主题分类 41A60, 34E20, 33C45, 65Q10

1 引言

在数学分析中, 我们常常需要描述一个函数在极限附近的性态, 这就需要用到渐近分析, 例如, Stirling 公式:

$$\log n! \sim \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \frac{1}{2}\log 2\pi,$$

调和数 (Harmonic number):

$$H_n \equiv 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \sim \log n,$$

Lebesgue 常数:

$$L_n \equiv \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{\sin\frac{1}{2}t}dt \sim \frac{4}{\pi^2}\log n,$$

上面三个式子称为渐近公式或渐近等式. 等式中的 $\sim$ 符号表示, 当 n 趋于无穷大时, 公式左右两边的商趋向于 1.

以上三个渐近等式在很多基础的数学分析教材中都可以找到, 如文献 [1]. 然而很多时候, 渐近公式不能提供给我们足够多的信息, 我们便需要展开式中更加高阶的项. 这就好比在求近似值时, 我们需要用带余项的 Taylor 展开来取代中值定理. 以下是 Stirling 公式、调和数和 Lebesgue 常数的高阶展

英文引用格式: Wang S-C R. Asymptotic analysis — a brief survey (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 1363–1382, doi: 10.1360/N012015-00112

开式:

$$
\begin{aligned}
&\log n! \sim \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \frac{1}{2}\log 2\pi + \sum_{s=0}^{\infty}\frac{B_{2s+2}}{(2s+1)(2s+2)n^{2s+1}},\\
&H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \sim \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{s=1}^{\infty}\frac{B_{2s}}{(2s)n^{2s}},\\
&L_n \sim \frac{4}{\pi^2}\left\{\log(2n+1) + A_0 - \sum_{s=1}^{\infty}\frac{A_s}{(2n+1)^{2s}}\right\},
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

其中 γ 是 Euler 常数, B_{2s} 是 Bernoulli 常数, 其定义为

$$
\frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!},
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&A_0 = 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log m}{4m^2-1} + 2\log 2 + \gamma = 2.441\cdots,\\
&A_s = \frac{(1-2^{2s-1})B_{2s}}{s}\left[1 - \sum_{m=1}^{s}\frac{(-1)^{m-1}}{(2m)!}B_{2m}\pi^{2m}\right], \quad s \geqslant 1.
\end{aligned}
$$

我们注意到以上 Stirling 公式、调和数和 Lebesgue 常数的高阶展开式都是发散的, 这时 $\sim$ 的意思是, 任何一个截断的部分和都是公式左边的近似, 且误差与余项的首项同阶. 其实对上述三个展开式, 我们有更强的结论: 其截断后的误差小于余项的首项, 且正负号相同. 这些结果并不容易获得, 我们需要用到渐近分析的方法加以证明.

渐近分析包含五个主要领域. 第一个领域是积分的渐近逼近. 第二个领域是求解微分方程的渐近解. 第一个领域的标准参考书有文献 [2–5]. 第二个领域最权威的参考书是 Olver 的著作 [6]. 第三个领域 — 可能被称作 “离散渐近分析”, 探讨数论和组合数学中出现的一些问题. 然而, 这一领域的发展仍不完善, 甚至关于二阶线性差分方程都没有一个清晰一致的渐近理论. 第四个领域是奇异摄动理论, 其经常被用于应用数学中, 但这个领域的很多结果并不严谨. 在 20 世纪五六十年代, 至少还有一些知名的数学家从事这一领域的研究, 如文献 [7–9]. 但是现在, 除了作者本人以及他的一些学生之外, 研究这一领域的学者已寥寥无几. 最近, 一个新的渐近领域引起了人们很大关注, 这一领域建立在由 Deift 和 Zhou (1993) 引入的 Riemann-Hilbert 方法的基础之上. 本文将简要介绍以上提及的各个领域.

2 积分方法 (Integral methods)

积分的经典渐近方法包括 Watson 引理、Laplace 逼近、Kelvin 驻相原理和 Debye 的最速下降法等, 可参见文献 [2–4]. 其中文献 [4] 还介绍了一些较为新颖的方法, 如 Mellin 变换、求和法以及广义函数法. 值得指出的是, 积分的渐近方法发展至今, 内容已极为丰富, 最新的参考书参见文献 [10]. 以下仅选若干方法作简介.

2.1 Laplace 方法

Laplace 逼近涉及积分

$$
I(\lambda) = \int_a^b \varphi(x)\mathrm{e}^{-\lambda h(x)}dx,
$$

这里 $\varphi(x)$ 和 $h(x)$ 为连续实函数, a 点为 $h(x)$ 唯一最小值点, 且满足 $h'(a)=0$, $h''(a)>0$, 则我们有以下 Laplace 逼近:

$$I(\lambda)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2h''(a)}}\varphi(a)\lambda^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\lambda h(a)},\quad \lambda\to+\infty,$$

高阶项可以很自然地应用 Watson 引理得到. Laplace 逼近或 Laplace 方法的应用很广, 例如, Stirling 公式

$$\Gamma(\lambda)\sim\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{\lambda}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\left[1+\frac{1}{12\lambda}+\cdots\right],\quad \lambda\to+\infty$$

可以由 Laplace 逼近简单地推出, 参见文献 [4, 第 60 页]. 此外, Laplace 逼近已有一些重要推广. 其中, 徐利治分别针对最小值点为边界点[11] 和内点[12] 的情形, 推导出了多维的 Laplace 逼近公式.

2.2 最速下降法

另一个有广泛应用的积分方法是最速下降法. 设有形如

$$I(\lambda)=\int_C g(z)\mathrm{e}^{\lambda f(z)}dz$$

的曲线积分, 其中 λ 为大参数, $f(z)$ 和 $g(z)$ 为解析函数, 而积分路径 C 可变形到所谓的最速下降线:

(i) C 通过 $f(z)$ 的一个鞍点 z_0, 即 $f'(z_0)=0$;

(ii) 沿 C, $f(z)$ 的虚部取常数值;

(iii) $\Re f(z)\leqslant\Re f(z_0)$ 在 C 上恒成立.

经典的处理方法是引入新的实变量

$$\tau=f(z_0)-f(z),$$

将原积分化为一个 Laplace 变换型积分

$$\mathrm{e}^{\lambda f(z_0)}\int_0^{\infty}\left\{g(z)\frac{dz}{d\tau}\right\}\mathrm{e}^{-\lambda\tau}d\tau.$$

从而, 关于大参数 λ 的渐近逼近可以直接通过 Watson 引理得到. 另一种处理方法可参见文献 [13], 对 z_0 点为单鞍点的情形 (即 $f''(z_0)\neq 0$), 令 $\tau^2=f(z_0)-f(z)$, 则可确定一个 $\tau\leftrightarrow z$ 在 z_0 点附近的共形映射 (或保角映射 (conformal mapping)). 同样利用 Dingle 的想法, 参数 λ 还可以推广到复数域, 最速下降线可以由

$$\arg[\lambda(f(z_0)-f(z))]=0$$

来刻画. 渐近展开的系数和余项都可以通过积分显式地表出, 所得的渐近结果可用以揭示 Stokes 现象的本质, 参见文献 [14].

例如, Airy 函数有以下积分表示:

$$\mathrm{Ai}(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_t}\exp\left(\frac{1}{3}t^3-zt\right)dt=\frac{z^{1/2}}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_s}\exp\left\{z^{3/2}\left(\frac{1}{3}s^3-s\right)\right\}ds,$$

这里暂设 z 为正实数 (大参数), 路径 L_t 从满足 $-\frac{1}{2}\pi<\arg t<-\frac{1}{6}\pi$ 的无穷远处出发, 到满足 $\frac{1}{6}\pi<\arg t<\frac{1}{2}\pi$ 的无穷远处终止. 路径 L_s 可根据 L_t 相应确定. 不难验证, L_s 可变形为通过函数 $f(s)=\frac{1}{3}s^3-s$

的鞍点 $s=1$ 的最速下降线, 因而, 最速下降法可直接应用于后一积分. Airy 函数的渐近展开为 (参见文献 [4])

$$\mathrm{Ai}(z) \sim \frac{1}{2\pi z^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(3m+\frac{1}{2})}{(2m)!\, 9^m} z^{-3m/2}, \quad z \to \infty, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{3}.$$

2.3 两鞍点相撞

以下简述 Chester, Friedman 和 Ursell 对最速下降法所作的一个重要拓广. Chester 等人[15] 考虑了含参数的积分

$$I(\lambda;\alpha) = \int_C g(z) \mathrm{e}^{-\lambda f(z;\alpha)} dz,$$

这里 λ 为大参数, f 和 g 关于 z 解析, 且当参数 $\alpha \neq \alpha_0$ 时, $f'(z;\alpha)=0$ 给出两个单鞍点 $z=z_+(\alpha)$ 和 $z=z_-(\alpha)$; 而当 $\alpha=\alpha_0$ 时, z_+ 和 z_- 重合为一个 2 阶鞍点. 此时, 该积分涉及了一个一致渐近的问题, 即当 $\alpha \to \alpha_0$ 时, 如何描述 $I(\lambda;\alpha)$ 的渐近性态. 为此, Chester 等人引入了一个典型变换

$$f(z;\alpha) = \frac{1}{3}u^3 - \zeta u + \eta,$$

其系数 $\zeta=\zeta(\alpha)$ 和 $\eta=\eta(\alpha)$ 可唯一确定, 使得 $z \to u$ 决定一个局部共形映射. 从而, 积分化为

$$\mathrm{e}^{\lambda\eta} I(\lambda;\alpha) = \int_{C^*} \varphi_0(u) \mathrm{e}^{-\lambda(u^3/3-\zeta u)} du,$$

其中 C^* 为变换后的路径, $\varphi_0(u)=g(z)(dz/du)$ 解析. 在此基础上, Chester 等人利用 $\varphi_0(u)$ 在 $\pm\zeta^{1/2}$ 的两点 Taylor 展开式, 得到了以上积分用 Airy 函数表出的渐近式. 更为常用的方法是由 Bleistein [16] 引入的一个迭代方法:

$$\varphi_m(u) = a_m + b_m u + (u^2-\zeta)\psi_m(u), \quad \varphi_{m+1}(u) = \psi_m'(u), \quad m=0,1,2,\ldots,$$

其系数 $a_m(\alpha)$ 和 $b_m(\alpha)$ 可通过 $\psi_m(u)$ 的解析性唯一确定. 然后, 由分部积分, 我们可得渐近公式

$$\mathrm{e}^{\lambda\eta} I(\lambda;\alpha) \sim \frac{\mathrm{Ai}(\lambda^{2/3}\zeta)}{\lambda^{1/3}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tilde{a}_m(\alpha)}{\lambda^m} + \frac{\mathrm{Ai}'(\lambda^{2/3}\zeta)}{\lambda^{2/3}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tilde{b}_m(\alpha)}{\lambda^m}, \quad \lambda \to \infty,$$

在 $\alpha=\alpha_0$ 的邻域内一致成立, 其系数 $\tilde{a}_m$ 和 $\tilde{b}_m$ 可分别由 a_m 和 b_m 通过简单的线性关系确定. 关于积分一致渐近方法的诸多应用及推广, 可参见文献 [17].

2.4 广义函数法

积分方法的另一个重要进展是广义函数法, 参见文献 [18, 19]. McClure 和 Wong 最初考虑以下 Stieltjes 变换:

$$S_f(z) = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t+z} dt, \quad z \to \infty,$$

其中 $|\arg z| < \pi$, $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 局部可积, 且对任意 $n \geqslant 1$, 有

$$f(t) = \sum_{s=0}^{n-1} a_s t^{-s-\alpha} + f_n(t),$$

这里 a_s 为常数, $0<\alpha<1$, 且当 $t\to\infty$ 时, $f_n(t)=O(t^{-n-\alpha})$. McClure 和 Wong 的广义函数法, 将上式中每一项视为一个速降函数空间 $\mathcal{S}$ 上的正则广义函数 (分布) 或正则广义函数的导数, 从而将上式化为 $\mathcal{S}$ 上泛函的等式. 选取一特殊速降函数作用于上式, 可得以下渐近公式:

$$S_f(z)=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\frac{a_s}{z^{s+\alpha}}-\sum_{s=1}^{n}(-1)^s\frac{M[f;s]}{z^s}+\varepsilon_n(z),$$

其中 $M[f;s]$ 为 Mellin 变换, 余项可显式地表示为

$$\varepsilon_n(z)=\frac{(-1)^n}{z^n}\int_0^\infty\frac{\tau^n f_n(\tau)}{\tau+z}d\tau.$$

广义函数法已应用于单侧 Hilbert 变换在无穷远点的渐近展开, 以及 Fourier 变换和 Laplace 变换在 0 点的渐近展开等, 可参见文献 [4, 第 6 章] 和 [17]. 最近, Galapon 和 Martinez [20] 应用此方法, 研究了 Hankel 变换的渐近展开, 在最优截断的情形下, 所得逼近的精确度优于 Poincaré 渐近逼近.

3 微分方程

Poincaré (1886) 创立了渐近级数展开的概念, 从而为渐近分析建立了严格的数学基础. 而 Poincaré 的这项工作就是为了研究常微分方程在无穷远处的非正则奇点的性态. 随着 20 世纪初量子力学的发展, 关于含大参数 (如 Planck 常数的倒数) 微分方程渐近解的研究, 促使物理学家们建立了 WKB 逼近理论, 而该方法由 Liouville 和 Green 更早地提出并应用, 所以也称为 Liouville-Green 逼近. 之后, Langer 和 Olver 等人在研究微分方程转折点 (transition point) 附近的逼近时, 引入了一致渐近展开的概念.

3.1 非正则奇点

定义在复平面上的二阶线性常微分方程具有以下形式:

$$w''(z)+f(z)w'(z)+g(z)w(z)=0, \tag{3.1}$$

其中系数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的性质给出了一点 z_0 的分类: 若 f 和 g 都在 z_0 处解析, 则该点为正则点, 否则称为奇点. 奇点又分为两类: 若 $(z-z_0)f(z)$ 和 $(z-z_0)^2g(z)$ 都在 z_0 处解析, 则该点为正则奇点, 否则称为非正则奇点. 方程 (3.1) 的解在正则点和正则奇点处的性质是很清晰的, 其通解在这类点处有一个幂级数展开式, 而非正则奇点处的性质则稍微复杂.

常见于特殊函数中的非正则奇点是位于无穷远处的秩为 1 的奇点, 即系数函数有如下展开:

$$f(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{f_s}{z^s},\quad g(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{g_s}{z^s}, \tag{3.2}$$

这些展开式在 $|z|>a$ 的区域上收敛, 并且 f_0, g_0 和 g_1 至少有一个非零. Poincaré (1886) 对于该类奇点的分析表明, 方程 (3.1) 有如下两个线性无关解:

$$w_j(z)\sim \mathrm{e}^{\lambda_j z}z^{\mu_j}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{a_{s,j}}{z^s},\quad j=1,2, \tag{3.3}$$

其中 λ_j 是特征方程

$$\lambda^2 + f_0\lambda + g_0 = 0 \tag{3.4}$$

的根,

$$\mu_j = -\frac{f_1\lambda_j + g_1}{f_0 + 2\lambda_j}, \quad a_{0,j} = 1,$$

而其后的系数 $a_{s,j}$ 可以通过匹配系数逐项得到. 上述构造方法在 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时只能给出一个解, 从而失效. 一个补救办法是引进 Fabry 变换

$$w = \mathrm{e}^{-f_0 z/2}W, \quad t = z^{1/2}, \tag{3.5}$$

从而使得无穷远点变为一个正则奇点, 或者依旧为非正则奇点但相应特征方程 (3.4) 具有不同的根. 注意到 (3.3) 中给出的解含有指数项, 从而导致解的渐近性质因不同的扇形区域而不同: $w_1(z)/w_2(z)$ 或者为指数大、指数小, 或者为代数阶, 这类现象是 Stokes 在研究 Airy 函数的渐近展开时首先发现的, 因而称为 Stokes 现象.

3.2 WKB 逼近

数学物理中经常出现如下类型的微分方程:

$$y''(x) = \{\lambda^2 a(x) + b(x)\}y(x), \tag{3.6}$$

其中 λ 表示一个正参数. 我们首先考虑一个简单的情形, 即 $a(x)$ 在一个有界或者无界区间 (a_1, a_2) 上是一个实值、恒正的二次可微函数, 并且假定 $b(x)$ 是一个实值或者复值的连续函数. 考虑 Liouville-Green 变换

$$\xi = \int a^{1/2}(x)\,dx, \quad w = a^{1/4}(x)y(x), \tag{3.7}$$

则方程 (3.6) 在该变换下变为

$$w''(\xi) = \{\lambda^2 + \psi(\xi)\}w(\xi), \tag{3.8}$$

其中

$$\psi(\xi) = -\frac{5}{16}\frac{a'(x)^2}{a(x)^3} + \frac{1}{4}\frac{a''(x)}{a(x)^2} + \frac{b(x)}{a(x)}.$$

如果我们忽略方程 (3.8) 中的 $\psi(\xi)$, 可得到两个线性无关解 $\mathrm{e}^{\pm\lambda\xi}$. 用原始变量来表达就是

$$y(x) \sim Aa^{-1/4}(x)\exp\left\{\lambda\int a^{1/2}(x)dx\right\} + Ba^{-1/4}(x)\exp\left\{-\lambda\int a^{1/2}(x)dx\right\}, \tag{3.9}$$

其中 A 和 B 是任意常数. (3.9) 称为 Liouville-Green 逼近, 而物理学家们将其称为 WKB 逼近. 这一结果的历史已经很久, 这里仅提一下 Olver 在 20 世纪 60 年代的工作, 参见文献 [21] 和 [6, 第 6 章]. 引进一个控制函数

$$F(x) = \int\left\{\frac{1}{a^{1/4}}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{a^{1/4}}\right) + \frac{b}{a^{1/4}}\right\}dx, \tag{3.10}$$

并用

$$\mathcal{V}_{d,x}(F) = \int_d^x |F'(t)|\,dt$$

表示 F 在区间 (d,x) 上的全变分. Olver 首先注意到方程 (3.6) 有两个线性无关的渐近解

$$y_j(x)=a^{-1/4}(x)\exp\left\{(-1)^{j-1}\lambda\int a^{1/2}(x)dx\right\}[1+\varepsilon_j(\lambda,x)],\quad j=1,2, \tag{3.11}$$

而且误差项满足

$$|\varepsilon_j(\lambda,x)|\leqslant\exp\left\{\frac{1}{2\lambda}\mathcal{V}_{a_j,x}(F)\right\}-1,\quad j=1,2. \tag{3.12}$$

对于固定的 x 和大参数 λ, (3.12) 的右端是 $O(\lambda^{-1})$ 的, 这就说明方程 (3.6) 的通解的确具有 (3.9) 给出的渐近性质.

注意到 (3.12) 中的不等式给出了误差项 $\varepsilon_j(\lambda,x)$ 的一个易于计算的上界. Olver 的第二个观察就是由这些上界也可以得到解 (3.11) 在微分方程的奇点附近的渐近性质. 这种双重渐近特点使得 Liouville-Green 逼近成为研究二阶线性微分方程的一个强有力的工具. 为了说明这一点, 我们在方程 (3.6) 中设 $\lambda=1$, a_2 是一个奇点, 并假定 $\mathcal{V}_{a_1,a_2}(F)<\infty$, 并且当 $x\to a_2^-$ 时,

$$\int a^{1/2}(x)\,dx\to\infty.$$

在这些条件下, 可以证明当 $x\to a_2^-$ 时 $\varepsilon_1(1,x)\to$ 常数, 参见文献 [6, 第 197–199 页]. 再利用 (3.11) $(j=1)$, 我们知道, 存在一个解 $y_3(x)$ 使得

$$y_3(x)\sim a^{-1/4}(x)\exp\left\{\lambda\int a^{1/2}(x)dx\right\},\quad x\to a_2^-. \tag{3.13}$$

因而, $y_3(x)$ 和 (3.11) 中的 $y_2(x)$ 给出了 $x\to a_2^-$ 时的两个线性无关的渐近解.

3.3 转折点处的一致渐近展开

当方程 (3.6) 中的系数 $a(x)$ 有一个零点 (如 $x=x_0$) 时, 其解的渐近性质就变得更加复杂. 这样的点称为微分方程的拐点 (turning point). 此时, 函数 $a(x)$ 的开方有分支, 所以, (3.7) 中的 Liouville-Green 变换的定义有问题.

为了叙述方便, 假设 $a(x)$ 和 $x-x_0$ 同号, 即 $(x-x_0)a(x)>0$ 对于所有的 $x\neq x_0$ 成立. 取代 (3.7) 中的变换, 我们采用 Langer [22,23] 的变换

$$\begin{cases}\dfrac{2}{3}\zeta^{3/2}=\displaystyle\int_{x_0}^{x}a(t)^{1/2}\,dt, & x_0\leqslant x,\\[2ex] \dfrac{2}{3}(-\zeta)^{3/2}=\displaystyle\int_{x}^{x_0}[-a(t)]^{1/2}\,dt, & x<x_0,\end{cases} \tag{3.14}$$

以及

$$w(\zeta)=\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^{1/2}y. \tag{3.15}$$

在这一变换下, 方程 (3.6) 变为

$$w''(\zeta)=\{\lambda^2\zeta+\varphi(\zeta)\}w(\zeta), \tag{3.16}$$

其中

$$\varphi(\zeta)=\frac{5}{16}\zeta^{-2}+\{4a(x)a''(x)-5a'(x)^2\}\frac{\zeta}{16a(x)^3}+\frac{\zeta b(x)}{a(x)}.$$

如果忽略掉 $\varphi(\zeta)$, 方程 (3.16) 就是 Airy 方程

$$w''(\zeta) = \lambda^2 \zeta w(\zeta),$$

其两个线性无关解是 Airy 函数 $\mathrm{Ai}(\lambda^{2/3}\zeta)$ 和 $\mathrm{Bi}(\lambda^{2/3}\zeta)$. 因此, 很自然地猜测原方程 (3.6) 有如下的两个线性无关解:

$$y_1(x) = \widehat{a}^{-1/4}(x)[\mathrm{Ai}(\lambda^{2/3}\zeta) + \varepsilon_1(x)], \tag{3.17}$$

$$y_2(x) = \widehat{a}^{-1/4}(x)[\mathrm{Bi}(\lambda^{2/3}\zeta) + \varepsilon_2(x)], \tag{3.18}$$

其中

$$\widehat{a}(x) = \frac{a(x)}{\zeta}.$$

关于误差项 $\varepsilon_1(x)$ 和 $\varepsilon_2(x)$ 上界的估计可参见文献 [6, 第 11 章]. 注意到以上两个解 (3.17) 和 (3.18) 的渐近性质是在 $x = x_0$ 附近一致成立的, 因而, 此类展开式称为一致渐近展开.

Langer [24] 和 Olver [25, 26] 还分别考虑了 $a(x)$ 有一个单极点 (pole) 或二重零点 (即二重拐点) 的情形, 他们通过引进不同的变换, 得到了以 Bessel 函数和抛物柱面函数为逼近项的一致渐近展开. 限于篇幅, 在此不一一详述.

4 奇异摄动理论

自从 Poincaré 于 1886 年创立渐近级数概念以来, 摄动理论就开始迅速发展并被广泛应用于数学、物理、力学问题和工程应用科学中. 该方法的主要思想是, 把一个复杂且困难的实际问题转化成一个或几个比较容易的问题, 并由渐近级数给出解的近似表达式. 相比于数值方法, 摄动理论的主要优点是能够给出所研究问题的解的解析表达式, 从而对相应的物理问题进行定性的和定量的讨论.

在摄动问题中, 常规的方法是通过无量纲化引进一个小参数 ε, 并把问题的解用 ε 有关的渐近级数来表示. 当小参数 ε 趋于零时, 正则摄动问题的解光滑地趋于退化问题的解或零阶解. 但对奇异摄动问题来讲, 级数解在 ε 趋于零时具有奇异性.

尽管已广泛应用, 摄动理论可能在数学上不甚严谨. 在 20 世纪五六十年代, 数学家 Wasow [9, 27], Erdélyi [8, 28] 和 Howes [29] 尝试进行了一些数学严格化的研究. 但在过去的二三十年, 继续从事这方面研究的学者寥寥可数. 下面以几个实例来阐述奇异摄动理论, 并说明严格数学化的研究在奇异摄动理论中的重要性.

4.1 无界区域上的摄动问题: Lagerstrom 模型

Lagerstrom 模型是建立在无界区域上的边值问题

$$y'' + \frac{n-1}{r} y' + \varepsilon y y' = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(\infty) = 1, \tag{4.1}$$

其中 ε 是小参数, n 表示空间维数, 方程中的前两项表示径向 Laplace 算子, 最后一项表示摩擦热损失 [30]. 乍一看, 这是一个简单的正则摄动问题, 可以套用常规渐近展开式

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots$$

来逼近真解, 其中各阶逼近解 $y_0, y_1, y_2, \ldots$ 满足下述边界条件:

$$y_0(1) = 0, \quad y_0(\infty) = 1;$$
$$y_i(1) = y_i(\infty) = 0, \quad i \geqslant 1.$$

然而, 这种思路并不能得到有效的逼近解, 反而让人在理论上怀疑该模型解的存在性. 以 $n = 3$ 为例, 很容易得到零阶逼近和一阶逼近

$$y_0(r) = 1 - \frac{1}{r}, \quad y_1(r) = -\left(1 + \frac{1}{r}\right)\log r + C\left(1 - \frac{1}{r}\right),$$

其中 C 为任意常数. 现在我们发现, 不管 C 取何值, $y_1(r)$ 都是无界的. 逼近的无效性使得 Kaplun 和 Lagerstrom 认为上述常规渐近逼近不太合适, 需要在展开式中添加另一尺度, 即对数项 $\varepsilon\log(1/\varepsilon)$.

在文献 [30] 中, 我们对该模型进行了严谨的数学研究: 使用递归逼近 (或逐次迭代), 并创建一组广义渐近展开; 我们不仅逼近了真解, 并且给出了详细的误差估计. 事实上, 首先通过变换 $y = 1 + u$, 可以将问题转化为无限远点的零边值问题

$$\begin{cases} u'' + \left(\dfrac{n-1}{r} + \varepsilon\right)u' + \varepsilon u u' = 0, \\ u(1) = -1, \ \ u(+\infty) = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

通过 Green 函数法, 可以建立 (4.2) 对应的积分方程

$$\begin{aligned} u(r) = {} & \frac{-1}{\rho_n(\varepsilon)}\int_r^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon s}}{s^{n-1}}\mathrm{d}s\left\{1 - \varepsilon\int_\infty^1 \frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon s}}{s^{n-1}}\int_\infty^s \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\tau^{n-1}u(\tau)u'(\tau)d\tau ds\right\} \\ & - \varepsilon\int_\infty^r \frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon s}}{s^{n-1}}\int_\infty^s \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\tau^{n-1}u(\tau)u'(\tau)d\tau ds, \end{aligned} \tag{4.3}$$

其中

$$\rho_n(\varepsilon) = \int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon s}}{s^{n-1}}ds = \varepsilon^{n-2}\int_\varepsilon^\infty \frac{\mathrm{e}^{-s}}{s^{n-1}}ds.$$

然后, 递归定义序列 $\{u_m(r)\}_{m=0}^\infty$:

$$u_0(r) = \frac{-1}{\rho_n(\varepsilon)}\int_r^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon s}}{s^{n-1}}ds, \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} u_m(r) = {} & u_0(r) - \varepsilon u_0(r)\int_\infty^1 \frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon s}}{s^{n-1}}\int_\infty^s \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\tau^{n-1}u_{m-1}(\tau)u'_{m-1}(\tau)d\tau ds \\ & - \varepsilon\int_\infty^r \frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon s}}{s^{n-1}}\int_\infty^s \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\tau^{n-1}u_{m-1}(\tau)u'_{m-1}(\tau)d\tau ds, \quad m \geqslant 1. \end{aligned} \tag{4.5}$$

最后, 我们可以证明级数

$$\sum_{m=1}^\infty [u_m(r) - u_{m-1}(r)]$$

在区间 $[1, \infty)$ 上一致收敛. 模型的解具有下述广义渐近展开式:

$$u(r) = \lim_{m\to\infty} u_m(r) = u_0(r) + \sum_{s=1}^\infty [u_s(r) - u_{s-1}(r)],$$

其中

$$u_{s+1}(r)-u_s(r)=O(\delta(\varepsilon)^s),\quad s\geqslant 1, \tag{4.6}$$

且当 $\varepsilon\to 0$, 小量 $\delta(\varepsilon)=\varepsilon\rho_{n-1}(\varepsilon)/\rho_n(\varepsilon)$ 具有下述渐近近似:

$$\delta(\varepsilon)\sim\begin{cases}\dfrac{n-2}{n-3}\varepsilon, & n>3,\\ -\varepsilon\ln\varepsilon, & n=3,\\ \varepsilon^{n-2}(n-2)\Gamma(3-n), & 2<n<3,\\ -\dfrac{1}{\ln\varepsilon}, & n=2.\end{cases} \tag{4.7}$$

容易发现, 上述逼近是广义的渐近展开, 每阶逼近都含有一个或多个尺度.

4.2 两点边值问题

在两点边值奇异摄动问题中, 人们常常使用边界层理论和匹配法获得逼近解. 这种方法固有的缺陷是, 经常忽视指数小项在解的表达式中的贡献. 以大家熟知的线性边值问题为例,

$$\varepsilon y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)=0,\quad y(-1)=A,\quad y(1)=B.$$

当 $a(x)$ 为正时, 经典的匹配法可以给出一致渐近逼近

$$y(x)=B\exp\left(\int_x^1\frac{b(t)}{a(t)}dt\right)+\left\{A-B\exp\left(\int_{-1}^1\frac{b(t)}{a(t)}dt\right)\right\}\mathrm{e}^{-a(-1)(1+x)/\varepsilon}+O(\varepsilon). \tag{4.8}$$

当 B 为零时, 上述公式给出一个不太好的逼近

$$y(x)=A\mathrm{e}^{-a(-1)(1+x)/\varepsilon}+O(\varepsilon).$$

事实上, 通过严格的 WKB 方法, 更好的逼近公式应该为

$$\begin{aligned}y(x)=&B\exp\left(\int_x^1\frac{b(t)}{a(t)}dt\right)[1+O(\varepsilon)]+\frac{a(0)}{a(x)}\left\{A-B\exp\left(\int_{-1}^1\frac{b(t)}{a(t)}dt\right)\right\}\\&\times\exp\left(\int_{-1}^x\frac{b(t)}{a(t)}dt\right)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^x a(t)dt\right)[1+O(\varepsilon)].\end{aligned} \tag{4.9}$$

例如, 对问题

$$\varepsilon y''+(3+x)y'+y=0,\quad y(-1)=1,\quad y(1)=0,$$

应用此公式可得

$$y(0)\sim\frac{3\mathrm{e}^{-7/2\varepsilon}}{2},$$

若用 (4.8) 则会得到非常不准确的首项.

当系数函数 $a(x)$ 含有零点时, 同样的情形也会发生. 考虑两点边值问题

$$\varepsilon y''-2xy'+(1+x^2)y=0,\quad y(-1)=2,\quad y(1)=1.$$

应用匹配法, Bender 和 Orszag 获得如下首项逼近公式:

$$y_{\mathrm{unif}}(x)=2\mathrm{e}^{-2(x+1)/\varepsilon}+\mathrm{e}^{-2(1-x)/\varepsilon}.$$

该公式在 $x=0$ 的值为 $y_{\mathrm{unif}}(0)=3\mathrm{e}^{-2/\varepsilon}$. 但是通过严格的数学证明, Wong 和 Yang [31] 使用抛物柱形函数建立了更加准确的一致渐近展开. 应用到上例, 在 $x=0$ 处更为精确的逼近为

$$y(0)\sim-\frac{6\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\frac{1}{4})}\mathrm{e}^{1/4}\varepsilon^{-3/4}\mathrm{e}^{-1/\varepsilon}.$$

上式中的负号进一步解释了为什么在文献 [32, 第 78 页] 中, 解曲线在 $x=0$ 处的值一定位于 x 轴的下方.

4.3 Carrier-Pearson 问题

非线性摄动问题可能对指数小项更为敏感, 忽略它可能会导致更为严重的错误. 考虑 Carrier-Pearson 问题

$$\begin{cases}\varepsilon u''(x)+u^2(x)=1, \quad -1<x<1,\\ u(-1)=u(1)=0.\end{cases}\tag{4.10}$$

该问题具有多解, 解的结构很复杂, 既具有边界层, 又可能有内部层, 即峰型结构 (spike solution). 使用匹配法, 连接外解、边界层和内部层可容易得到具有一个内部波峰的解的一致渐近逼近表达式

$$\begin{aligned}u_{\mathrm{unif}}(x)=&-1+3\mathrm{sech}^2\left(\pm\frac{1-x}{\sqrt{2\varepsilon}}+\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right)+3\mathrm{sech}^2\left(\pm\frac{1+x}{\sqrt{2\varepsilon}}+\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right)\\&+3\mathrm{sech}^2\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{2\varepsilon}}\right),\end{aligned}\tag{4.11}$$

其中 x_0 可以是区间 $(-1,1)$ 中的任意值. 然而, 根据相平面分析, 只有当 $x_0=0$ 时, Carrier-Pearson 问题才可能有解存在. 这说明当 $x_0\neq 0$ 时, 匹配法给出了一个并不存在的解.

为了找出匹配法存在的问题, 在文献 [33] 中, 应用打靶法, 通过仔细估计峰型解的跨度, 我们尝试用严格的数学证明, 给出了解的个数估计和解的误差估计. 对应于峰型波的个数 N, 准确的估计为

$$N\leqslant\frac{0.41}{\sqrt{\varepsilon}}+1.$$

对于各种峰型解, 峰的个数可以为多个, 但峰的位置在区间 $[-1,1]$ 必须均匀分布. 当内部波峰数为 n 时, Carrier-Pearson 问题的解具有下述渐近逼近:

$$\begin{aligned}u(x)=&-1+3\mathrm{sech}^2\left(\pm\frac{1-x}{\sqrt{2\varepsilon}}+\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right)+3\mathrm{sech}^2\left(\pm\frac{1+x}{\sqrt{2\varepsilon}}+\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right)\\&+3\sum_{j=1}^{n}\mathrm{sech}^2\left(\frac{x-x_j}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)+O\left[\exp\left(-\frac{1}{n+1}\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right)\right],\end{aligned}\tag{4.12}$$

其中 x_j, $j=1,2,\ldots,n$ 与区间两端点构成一定的均匀分布. 关于 x_j 的具体表达式, 可以参见文献 [33, 定理 3]. 文献 [33] 中的方法对非线性两点边值问题极为有效, 其思想可拓广到更一般的问题 $\varepsilon u''+Q(u)=0$, $-1<x<1$, 详情请参见文献 [34].

5 差分方程

自从 Poincaré (1886) 在常微分方程无穷远点处的非正则奇性理论中引进了渐近展开的概念以来, Birkhoff [35, 36], Adams [37], 以及 Birkhoff 和 Trjitzinsky [38] 开始建立一套关于线性差分方程的相应理

论. 但是, 他们的分析非常复杂, 以至于渐近分析领域的专家也难以理解他们的证明. 正因为此, 线性差分方程的渐近理论的建立远远落后于线性微分方程的渐近理论. Olver (2003) 曾说过: "Birkhoff 和 Trjitzinsky 的工作使得 20 世纪的大多数关于差分方程渐近解的研究受挫." Wong 和 Li [39, 40] 对 Birkhoff 和 Trjitzinsky 的工作作了关键性的简化和修正, 使得差分方程的渐近理论更加简洁易懂. 在本节, 我们先介绍 Wong 和 Li 的工作, 然后概述一些 Wang 和 Wong [41] 在拐点理论和 Airy 型渐近展开方面的最新成果.

5.1 规范解或次规范解

首先, 我们考虑最简单也是最常见的差分方程

$$y(n+2)+a(n)y(n+1)+b(n)y(n)=0, \tag{5.1}$$

这里假设 $a(n)$ 和 $b(n)$ 满足以下渐近展开式:

$$a(n)\sim\sum_{s=0}^{\infty}\frac{a_s}{n^s},\quad b(n)\sim\sum_{s=0}^{\infty}\frac{b_s}{n^s},\quad n\to\infty, \tag{5.2}$$

其中 $b_0\neq 0$. 方程 (5.1) 的渐近解的分类取决于其特征方程

$$\rho^2+a_0\rho+b_0=0 \tag{5.3}$$

的根的分布, 此方程有如下两个根 (计重数):

$$\rho_1,\rho_2=-\frac{1}{2}a_0\pm\left(\frac{1}{4}a_0^2-b_0\right)^{1/2}.$$

如果 $\rho_1\neq\rho_2$ (即 $a_0^2\neq 4b_0$), 那么, Birkhoff [35] 证明了方程 (5.1) 有两个线性无关解 $y_j(n)$, $j=1,2$, 满足

$$y_j(n)\sim\rho_j^n n^{\alpha_j}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c_{s,j}}{n^s},\quad n\to\infty, \tag{5.4}$$

其中

$$a_j=-\frac{a_1\rho_j+b_1}{2\rho_j^2+\rho_j a_0}=\frac{a_1\rho_j+b_1}{a_0\rho_j+2b_0},\quad c_{0,j}=1.$$

(5.4) 中的级数称为规范级数或规范解.

如果 $\rho_1=\rho_2$ 且它们的共同值 $\rho=-a_0/2$ 不是辅助方程

$$a_1\rho+b=0 \tag{5.5}$$

的根 (即 $2b_1\neq a_0a_1$), 那么, Adams [37] 证明了方程 (5.1) 有两个线性无关解 $y_j(n)$, $j=1,2$, 满足

$$y_j(n)\sim\rho^n\exp((-1)^j\gamma\sqrt{n})n^{\alpha}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{js}\frac{c_s}{n^{s/2}},\quad n\to\infty, \tag{5.6}$$

其中

$$\gamma=2\sqrt{\frac{a_0a_1-2b_1}{2b_0}},\quad \alpha=\frac{1}{4}+\frac{b_1}{2b_0},\quad c_0=1.$$

(5.6) 中的级数称为次规范级数或次规范解. 通过形式迭代可以得到 (5.4) 和 (5.6) 中高阶系数的递推公式.

若此重根 ρ 满足辅助方程 (5.5) (即 $2b_1 = a_0a_1$), 根据如下指示多项式:

$$\begin{aligned} q(\alpha) &= \alpha(\alpha-1)\rho^2 + (a_1\alpha + a_2)\rho + b_2 \\ &= b_0\alpha^2 - \left(b_0 + \frac{1}{2}a_0a_1\right)\alpha - \frac{1}{2}a_0a_2 + b_2 \end{aligned} \tag{5.7}$$

的零点 α_1 与 α_2 ($\Re\alpha_1 \leqslant \Re\alpha_2$) 的差, 我们需要考虑以下三种 (异常) 类型.

(i) $\alpha_2 - \alpha_1 \neq 0, 1, 2, \ldots$ 此时, 方程 (5.1) 有两个线性无关解 $y_j(n)$, $j = 1, 2$, 满足

$$y_j(n) \sim \rho^n n^{\alpha_j} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{c_{s,j}}{n^s}, \quad n \to \infty, \tag{5.8}$$

其中 $c_{0,j} = 1$.

(ii) $\alpha_2 - \alpha_1 = 1, 2, \ldots$ 此时, (5.8) 仅对第一个解 ($j = 1$) 成立, 第二个解满足

$$y_2(n) \sim \rho^n n^{\alpha_2} \sum_{s=0}^{\infty}{}' \frac{d_s}{n^s} + c(\log n)y_1(n), \quad n \to \infty,$$

其中 $\sum'$ 表示级数里不含有 $s = \alpha_2 - \alpha_1$ 这一项, 系数 c 和 d_s 可以通过形式迭代以及初始值 $d_0 = 1$ 求得.

(iii) $\alpha_2 = \alpha_1$. 此时, (5.8) 依然对第一个解 ($j = 1$) 成立, 第二个解满足

$$y_2(n) \sim \rho^n n^{\alpha_2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d_s}{n^s} + (\log n)y_1(n), \quad n \to \infty.$$

关于上述结果的详细证明和应用, 请参见文献 [39].

在很多实际问题中, 我们遇到的差分方程往往不满足 (5.1) 的形式, 而是有如下更一般的形式:

$$y(n+2) + n^p a(n)y(n+1) + n^q b(n)y(n) = 0, \tag{5.9}$$

其中 p 和 q 均为整数, 并且 $a(n)$ 和 $b(n)$ 满足 (5.2) 中的渐近展开. 例如, 关于 Charlier 多项式的三项递推式有如下形式:

$$C_{n+1}^{(a)}(x) + (n + a - x)C_n^{(a)}(x) + anC_{n-1}^{(a)}(x) = 0, \quad a \neq 0.$$

再例如, 在 n 阶对称群中幂等元的个数 $T(n)$ 满足如下方程:

$$T(n) = T_{n-1} + (n-1)T_{n-2}, \quad T_0 = T_1 = 1.$$

关于一般差分方程 (5.9) 的研究, 请参见文献 [40].

5.2 转折点

在方程 (5.1) 和 (5.9) 中, 系数函数 $a(n)$ 和 $b(n)$ 都只依赖于参数 n. 如果它们还依赖于另外一个辅助参数 x, 那么, 特征方程 (5.3) 的根可能会随着参数 x 的变化而重合在一起, 或者指示多项式 (5.7)

的两根之差 $\alpha_2-\alpha_1$ 可能会随着参数 x 的变化而趋于某个非负整数, 此时通过上面方法得到的渐近解就可能无效. 让我们考虑一种最简单的情形

$$p_{n+1}(x)=(a_nx+b_n)p_n(x)-c_np_{n-1}(x),\quad n=1,2,\ldots, \tag{5.10}$$

其中 a_n,b_n,c_n 都是与辅助变量 x 无关的常数. 此方程在研究正交多项式的三项递推式时会经常碰到, 参见文献 [42, 第 42 页]. 同时, 很多数学物理中的特殊函数 (如 Bessel 函数和 Legendre 函数) 也满足上述方程, 参见文献 [6]. 如果 x 只是一个固定的常数, 那么, 方程 (5.10) 与二阶差分方程 (5.1) 等价. 考虑 x 不再是一个常数, 我们通过递推关系式 $K_{n+1}/K_{n-1}=c_n$ 定义一组数列 $\{K_n\}$, 再设 $P_n(x)=p_n(x)/K_n$, 从而把 (5.10) 转换为如下标准型:

$$P_{n+1}(x)-(A_nx+B_n)P_n(x)+P_{n-1}(x)=0. \tag{5.11}$$

正如在 (5.1) 里一样, 我们也假设系数 A_n 和 B_n 满足如下渐近展开式:

$$A_n\sim n^{-\theta}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\alpha_s}{n^s},\quad B_n\sim\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\beta_s}{n^s},\quad n\to\infty, \tag{5.12}$$

其中 θ 是一个实数, 并且 $\alpha_0\neq 0$. 从 Hermite 多项式的一致渐近展开式 (参见文献 [6, 第 403 页]) 和 Laguerre 多项式的一致渐近展开式 (参见文献 [43]) 中受到启发, 我们引进一个待定常数 τ_0, 并令 $\nu=n+\tau_0$. 显然, 展开式 (5.12) 可以转化为如下形式:

$$A_n\sim\nu^{-\theta}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\alpha_s'}{\nu^s},\quad B_n\sim\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\beta_s'}{\nu^s},\quad n\to\infty. \tag{5.13}$$

在 (5.11) 中, 我们设 $x=\nu^\theta t$, $P_n=\lambda^n$. 将 (5.13) 代入 (5.11) 并令 $n\to\infty$ (从而, $\nu\to\infty$), 我们可以得到如下特征方程:

$$\lambda^2-(\alpha_0't+\beta_0')\lambda+1=0. \tag{5.14}$$

此方程有两个根

$$\lambda=\frac{1}{2}[(\alpha_0't+\beta_0')\pm\sqrt{(\alpha_0't+\beta_0')^2-4}].$$

两根重合的充要条件是 $t=t_\pm$ 满足

$$\alpha_0't_\pm+\beta_0'=\pm 2.$$

这两个常数 $t_\pm$ 在三项递推式 (5.11) 的渐近理论中发挥着重要的作用, 它们类似于微分方程里的转折点 (transition point), 即拐点或极点, 参见文献 [6, 第 362 页]. 为此, 我们也把它们称作转折点. 虽然 t_+ 和 t_- 的值不同但性质类似, 因此, 我们只需要考虑 $t=t_+$ 的情形. 根据 (5.12) 中的幂 θ 和转折点 t_+ 的值, 我们把问题分为三大类型:

(i) $\theta\neq 0$ 且 $t_+\neq 0$;

(ii) $\theta\neq 0$ 且 $t_+=0$;

(iii) $\theta=0$.

类型 (i): $\theta\neq 0$ 且 $t_+\neq 0$. 为方便起见, 我们假设 $\theta>0$, $|\beta_0'|<2$. 关于 $\theta<0$ 的情形可以进行类似地分析, 有兴趣的读者可参见文献 [44] 中研究的一个很重要的特例 $\theta=-1$. 我们选取

$$\tau_0=-\frac{(\alpha_1t_++\beta_1)}{(2-\beta_0)\theta},$$

使得下式成立,

$$\alpha_1' t_+ + \beta_1' = 0, \tag{5.15}$$

对任意给定的非负整数 p, 方程 (5.11) 有一对线性无关解:

$$P_n(\nu^\theta t) = \left(\frac{4\zeta}{(\alpha_0' t + \beta_0')^2 - 4}\right)^{\frac{1}{4}} \left[\mathrm{Ai}\left(\nu^{\frac{2}{3}}\zeta + \frac{\Phi}{\nu^{\frac{1}{3}}}\right) \sum_{s=0}^{p} \frac{\widetilde{A}_s(\zeta)}{\nu^{s-\frac{1}{6}}} + \mathrm{Ai}'\left(\nu^{\frac{2}{3}}\zeta + \frac{\Phi}{\nu^{\frac{1}{3}}}\right) \sum_{s=0}^{p} \frac{\widetilde{B}_s(\zeta)}{\nu^{s+\frac{1}{6}}} + \varepsilon_p(\nu, t)\right],$$

$$Q_n(\nu^\theta t) = \left(\frac{4\zeta}{(\alpha_0' t + \beta_0')^2 - 4}\right)^{\frac{1}{4}} \left[\mathrm{Bi}\left(\nu^{\frac{2}{3}}\zeta + \frac{\Phi}{\nu^{\frac{1}{3}}}\right) \sum_{s=0}^{p} \frac{\widetilde{A}_s(\zeta)}{\nu^{s-\frac{1}{6}}} + \mathrm{Bi}'\left(\nu^{\frac{2}{3}}\zeta + \frac{\Phi}{\nu^{\frac{1}{3}}}\right) \sum_{s=0}^{p} \frac{\widetilde{B}_s(\zeta)}{\nu^{s+\frac{1}{6}}} + \delta_p(\nu, t)\right],$$

其中 $\zeta = \zeta(t)$ 和 $\Phi = \Phi(t)$ 是由参数 $\theta, \alpha_0', \beta_0', \alpha_1', \beta_1'$ 确定的具有显式积分表达式的函数, 各项系数 $\widetilde{A}_s(\zeta)$ 和 $\widetilde{B}_s(\zeta)$ 可以通过迭代求得. 关于函数 $\zeta(t)$ 和 $\Phi(t)$ 的积分表达式以及误差项 $\varepsilon_p(\nu, t)$ 和 $\delta_p(\nu, t)$ 的估计, 请参见文献 [41].

关于类型 (ii) 的结果, 请参见文献 [45]. 关于类型 (iii) 的结果, 请参见文献 [46].

6 Riemann-Hilbert 方法

渐近分析一个重要进展是 20 世纪 90 年代由 Deift, Zhou 及其合作者引入并发展起来的关于矩阵的 Riemann-Hilbert 问题的最速下降法, 或称为 Riemann-Hilbert 方法. 这是一种非常强有力的渐近分析工具, 被成功用于求解非线性微分方程 (如修正 KdV (Korteweg de Vries) 方程、非线性 Schrödinger 方程和 Painlevé 方程等) 的渐近解 (参见文献 [47–49]), 推导正交多项式的渐近公式以及证明随机矩阵理论中的普适性问题等 (参见文献 [50–53]). 下面以正交多项式的渐近展开为例介绍 Riemann-Hilbert 方法, 从中我们可以发现该方法的有效性和重要性.

6.1 矩阵 Riemann-Hilbert 问题

为简便起见, 我们以 Hermite 正交多项式

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{e}^{-x^2})$$

为例. $H_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上满足如下正交关系:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) w(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{n,m}, \quad n, m = 1, 2, \ldots,$$

其中 $w(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ 是权函数, $\delta_{n,m}$ 是 Kronecker δ- 记号. 用 Riemann-Hilbert 方法研究正交多项式的渐近展开是基于文献 [54] 建立的正交多项式与 Riemann-Hilbert 问题的如下关系: 记 $\pi_n(z) = 2^{-n} H_n(z)$ 是首一正交多项式, 令

$$Y(z) = \begin{pmatrix} \pi_n(z) & C(\pi_n w)(z) \\ c_n \pi_{n-1}(z) & c_n C(\pi_{n-1} w)(z) \end{pmatrix}$$

是一个 2×2 矩阵值函数, 其中 $C(\pi_j w)(z)$ 表示 $\pi_j w$ 的 Cauchy 变换 ($j = n-1, n$), c_n 是一个常数. 那么, $Y(z)$ 是下述以 $\mathbb{R}$ 为跳跃曲线的 Riemann-Hilbert 问题的唯一解,

(Y1) $Y(z)$ 是 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 上解析函数;

(Y2) $Y_+(x) = Y_-(x)J_Y(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, 这里 $Y_\pm(x)$ 表示当变量 z 分别从上、下半平面趋于实轴上 x 点的极限,

$$J_Y(x) = \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

为跳跃矩阵;

(Y3) 当 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 且 $z \to \infty$ 时, $Y(z) = [1 + O(1/z)]z^{n\sigma_3}$, 这里

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

是 Pauli 矩阵, $z^{n\sigma_3}$ 是指

$$\begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix}.$$

6.2 Deift 和 Zhou 的最速下降法

Deift 和 Zhou 关于 Riemann-Hilbert 问题的最速下降法由一系列变换组成:

$$Y \to U \to T \to S \to R.$$

第一个变换 $Y \to U$ 是一个缩放变换, 使得正交多项式的均衡测度 μ (通常是 π_n 的零点分布的极限) 支撑在一个合适的区间上. 对 Hermite 情形, 可取

$$U(z) = (2n+1)^{-n\sigma_3/2} Y(\sqrt{2n+1}z).$$

此时,

$$\mathrm{supp}\mu = [-1, 1], \quad d\mu(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}dx, \quad x \in [-1, 1].$$

第二个变换 $U \to T$ 极为关键. 这是一个规范化过程, 目的是消去 $U(z)$ 在 ∞ 处的奇点, 使得 $T(z) \sim I$, $z \to \infty$. 根据条件 (Y3), 简单地作变换 $T(z) = U(z)z^{-n\sigma_3}$ 即可满足上述规范化条件, 但这将原来在 ∞ 处的奇点转移到了原点, 并不可取. 为此, Deift 等人利用均衡测度的对数势 (称为 g- 函数)

$$g(z) = \int_{-1}^{1} \log(z-x)d\mu(x), \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1],$$

作如下规范化变换:

$$T(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}n\ell_n\sigma_3} U(z) \mathrm{e}^{-(ng(z)+\frac{1}{2}n\ell_n)\sigma_3},$$

这里 ℓ_n 也是一个常数, 称为 Lagrange 常数.

第三个变换 $T \to S$ 是跳跃曲线的形变. 尽管 $T(z)$ 满足了规范化条件 $T(z) \sim I$ $(z \to \infty)$, 但关于 T 的 Riemann-Hilbert 问题的跳跃矩阵 J_T 变得更复杂了, 特别是在均衡测度的支集 $[-1, 1]$ 上. 考虑到 $[-1, 1]$ 上的跳跃矩阵可以分解成三个较为简单的矩阵的乘积, 这就建议可将 $[-1, 1]$ 形变为三条曲线: $[-1, 1]$, 以及分别在上、下半平面内连接 -1 和 1 的弧 Σ_+ 和 Σ_-. 这样就将跳跃曲线为 $\mathbb{R}$ 的关于 T 的 Riemann-Hilbert 问题变换成跳跃曲线为 $\mathbb{R} \cup \Sigma_\pm$ 的关于 S 的 Riemann-Hilbert 问题. 在 $(-\infty, -1]$ 和 $[1, \infty)$ 以及 $\Sigma_\pm$ 上, S 的跳跃矩阵 J_S 当 $n \to \infty$ 时快速 (以指数级收敛速度) 趋向于单位矩阵; 而在 $[-1, 1]$ 上, 跳跃矩阵

$$J_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

是一个常值矩阵. 并且, 以此为跳跃矩阵的 Riemann-Hilbert 问题可求出显式解, 记其解为 $N(z)$, 则形式上有渐近性质 $S(z) \sim N(z)$ $(n \to \infty)$. 正是由于作了上述跳跃曲线的形变, 形变后跳跃矩阵在 $\Sigma_{\pm}$ 上快速趋于单位矩阵, 因此, Deift 和 Zhou 称这个方法为 Riemann-Hilbert 问题的最速下降法.

但是, $S(z) \sim N(z)$ 在均衡测度的支集 $[-1,1]$ 的端点附近并非一致成立. 因此需要在两个端点 -1 和 1 的小邻域内构造局部拟解, 使得拟解在小邻域的边界圆周上具有与 $N(z)$ 匹配的渐近性质, 而且在跳跃曲线上有与 S 相同的跳跃矩阵. 通常可以利用已知的特殊函数的渐近公式和连接关系来构造拟解, 对 Hermite 多项式情形, 可用 Airy 函数来作此构造. 设在 -1 和 1 处的拟解分别为 P 和 $\tilde{P}$, 则第四个变换 $S \to R$ 为: 在 -1 的小邻域内, 令 $R := SP^{-1}$; 在 1 的小邻域内, 令 $R := S\tilde{P}^{-1}$; 在两个小邻域外, 令 $R := SN^{-1}$. 由上面的构造, 关于 R 的 Riemann-Hilbert 问题在 -1 和 1 的两个小邻域的边界圆周上产生了新的跳跃, 但在位于小邻域内的跳跃曲线上, P 和 $\tilde{P}$ 与 S 有相同的跳跃矩阵, 相互抵消, 使得 $R(z)$ 在两个小邻域内不再有跳跃, 是解析的. 同时, R 在 $[-1,1]$ 上也不再有跳跃. 由此, 基于拟解的渐近性质, 关于 R 的 Riemann-Hilbert 问题的跳跃矩阵 J_R 当 $n \to \infty$ 时在其跳跃曲线 (族) Γ_R 上一致地有 $J_R \sim I$. 从而, 可以证明这个 Riemann-Hilbert 问题的解 $R(z)$ 也有一致渐近性质 $R(z) \sim I$, $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_R$.

上述最后一步是基于 Riemann-Hilbert 问题的渐近展开的一个一般性结论: 在一定条件下, 如果一个矩阵 Riemann-Hilbert 问题的跳跃矩阵在其跳跃曲线的某个邻域内有一个一致渐近展开, 那么, 该问题的解也有类似形式的一致渐近展开. 关于上述结论的具体陈述和证明, 可参见文献 [55].

利用构造局部拟解的特殊函数的一致渐近展开, 我们事实上可以得到关于 R 的 Riemann-Hilbert 问题的跳跃矩阵 J_R 的一致渐近展开, 因此也可求得 $R(z)$ 的一致渐近展开. 通过一系列逆变换, 就可得到 $Y(z)$ 的一致渐近展开, 取其 $(1,1)$ 项 (即矩阵里的第一行第一列的元素), 就求得首一正交多项式 $\pi_n(z)$ 的一致渐近展开.

6.3 全局渐近展开

以上求得的 $\pi_n(z)$ 的渐近展开在不同区域有不同的表达式, 例如, 在均衡测度支集的端点 -1 和 1 的小邻域内, 其渐近展开式含有 Airy 函数, 而在其他各个区域的展开式中只含有初等函数. 最后, 我们介绍 Wang 和 Wong [56] 对 Deift 和 Zhou 的方法的改进, 使得 $\pi_n(z)$ 渐近展开有更为全局的表示. 我们不作最后一个变换 $S \to R$, 而是先通过逆变换将 $S(z)$ 返回到 $U(z)$, 由 $S(z) \sim N(z)$ 得到

$$U(z) \sim \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}n\ell_n\sigma_3} N(z) \mathrm{e}^{(ng(z)+\frac{1}{2}n\ell_n)\sigma_3}, \quad n \to \infty.$$

同样, 上述渐近公式仅对 z 不靠近 $[-1,1]$ 时成立. Wang 和 Wong 的方法是分别在包含 -1 和 1 的两个足够大的区域 Ω 和 $\tilde{\Omega}$ 上构造拟解 $P(z)$ 和 $\tilde{P}(z)$, 使得当 z 充分大时, $P(z)$ 和 $\tilde{P}(z)$ 与 $U(z)$ 有同样的渐近性质, 而且在 $\mathbb{R} \cap \Omega$ 和 $\mathbb{R} \cap \tilde{\Omega}$ 上具有与 $U(z)$ 相同的跳跃. 对于 Hermite 多项式 (参见文献 [57]), 可取

$$\Omega = \{\Re z < 1 - \varepsilon\}, \quad \tilde{\Omega} = \{\Re z > -1 + \varepsilon\},$$

这里 ε 是一个充分小的正数. 而 P 和 $\tilde{P}$ 同样可以通过 Airy 函数来构造. 定义矩阵 $U^*(z) = P(z)$, $\Re z < 0$; $U^*(z) = \tilde{P}(z)$, $\Re z > 0$, 并令

$$R(z) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}n\ell_n\sigma_3} U(z) U^*(z)^{-1} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}n\ell_n\sigma_3},$$

则 $R(z)$ 在 $\mathbb{C}\setminus \mathrm{i}\mathbb{R}$ 上解析, 在虚轴 $\mathrm{i}\mathbb{R}$ 上有跳跃, 其跳跃矩阵 J_R 在 $\mathrm{i}\mathbb{R}$ 上有一致的渐近展开

$$J_R(z)\sim I+\sum_{k=1}^{\infty}J_k(z)n^{-k}.$$

因此, $R(z)$ 在 $\mathbb{C}\setminus \mathrm{i}\mathbb{R}$ 上有一个类似的一致渐近展开

$$R(z)\sim I+\sum_{k=1}^{\infty}R_k(z)n^{-k}.$$

用此方法得到的正交多项式 $\pi_n(z)$ 的渐近展开只有两个表达式: 分别在左、右半平面上 (事实上, 可以在更大的并且有重叠的区域 Ω 和 $\tilde{\Omega}$ 上) 有一致的渐近展开式, 它们均含有 Airy 函数.

致谢 此篇综述主要取材于作者以往出版的英文版著作 [17], 在筹备此篇中文版综述的过程中, 得到了很多以前的学生和合作伙伴的帮助. 在这里, 衷心感谢赵育求、邱维元、李玉田、欧春华、汪翔升.

参考文献

1 Rudin W. Principles of Mathematical Analysis. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1976
2 Copson E T. Asymptotic Expansions. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 55. New York: Cambridge University Press, 1965
3 Bleistein N, Handelsman R A. Asymptotic Expansions of Integrals. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1975
4 Wong R. Asymptotic Approximations of Integrals. Boston: Academic Press, 1989
5 徐利治. 渐近积分与积分逼近. 北京: 科学出版社, 1958
6 Olver F W J. Asymptotic and Special Functions. New York: Academic Press, 1974
7 Levinson N. The first boundary value problem for $\varepsilon\Delta u+A(x,y)u_x+B(x,y)u_y+C(x,y)u=D(x,y)$ for small ε. Ann of Math, 1950, 51: 428–445
8 Erdélyi A. Approximate solutions of a nonlinear boundary value problem. Arch Ration Mech Anal, 1968, 29: 1–17
9 Wasow W. Singular perturbations of boundary value problems for nonlinear differential equations of the second order. Comm Pure Appl Math, 1956, 9: 93–113
10 Temme N M. Asymptotic Methods for Integrals. Singapore: World Scientific Publishing, 2014
11 Hsu L C. A theorem on the asymptotic behavior of a multiple integral. Duke Math J, 1948, 15: 623–632
12 Hsu L C. On the asymptotic evaluation of a class of multiple integrals involving a parameter. Amer J Math, 1951, 73: 625–634
13 Dingle R B. Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation. London/New York: Academic Press, 1973
14 Berry M V, Howls C J. Hyperasymptotics for integrals with saddles. Proc R Soc Lond Ser A, 1991, 434: 657–675
15 Chester C, Friedman B, Ursell F. An extension of the method of steepest descents. Math Proc Cambridge Philos Soc, 1957, 53: 599–611
16 Bleistein N. Uniform asymptotic expansions of integrals with stationary point near algebraic singularity. Comm Pure Appl Math, 1966, 19: 353–370
17 Wong R. A panoramic view of asymptotics. In: Foundations of Computational Mathematics, Hong Kong 2008. London Mathematical Society Lecture Note Series 363. Cambridge: Cambridge University Press, 2009, 190–235
18 McClure J P, Wong R. Explicit error terms for asymptotic expansions of Stieltjes transforms. J Inst Math Appl, 1978, 22: 129–145
19 McClure J P, Wong R. Exact remainders for asymptotic expansions of fractional integrals. J Inst Math Appl, 1979, 24: 139–147
20 Galapon E A, Martinez K M L. Exactification of the Poincaré asymptotic expansion of the Hankel integral: Spectacularly accurate asymptotic expansions and non-asymptotic scales. Proc R Soc Lond Ser A, 2014, 470: 20130529
21 Olver F W J. Error bounds for the Liouville-Green (or WKB) approximation. Math Proc Cambridge Philos Soc, 1961, 57: 790–810
22 Langer R E. On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with an application to the Bessel functions of large order. Trans Amer Math Soc, 1931, 33: 23–64

23 Langer R E. On the asymptotic solutions of differential equations, with an application to the Bessel functions of large complex order. Trans Amer Math Soc, 1932, 34: 447–480

24 Langer R E. On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with reference to the Stokes' phenomenon about a singular point. Trans Amer Math Soc, 1935, 37: 397–416

25 Olver F W J. Second-order linear differential equations with two turning points. Philos Trans R Soc Lond Ser A, 1975, 278: 137–174

26 Olver F W J. Improved error bounds for second-order differential equations with two turning points. J Res Nat Bur Standards Sect B, 1976, 80: 437–440

27 Wasow W. Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations. New York: Wiley-Interscience, 1965

28 Erdélyi A. On a nonlinear boundary value problem involving a small parameter. J Aust Math Soc, 1962, 2: 425–439

29 Howes F A. Boundary-interior layer interactions in nonlinear singular perturbation theory. Mem Amer Math Soc, 1978, 203: 1–108

30 Ou C, Wong R. A novel generalized solution expansion for the Lagerstrom model. Asymptot Anal, 2014, 89: 111–123

31 Wong R, Yang H. On a boundary-layer problem. Stud Appl Math, 2002, 4: 369–398

32 Bender C M, Orszag S A. Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. New York: McGraw-Hill, 1978

33 Ou C, Wong R. On a two-point boundary-value problem with spurious solutions. Stud Appl Math, 2003, 4: 377–408

34 Ou C, Wong R. Shooting method for nonlinear singularly perturbed boundary-value problems. Stud Appl Math, 2004, 2: 161–200

35 Birkhoff G D. General theory of linear difference equations. Trans Amer Math Soc, 1911, 12: 243–284

36 Birkhoff G D. Formal theory of irregular linear difference equations. Acta Math, 1930, 54: 205–246

37 Adams C R. On the irregular cases of linear ordinary difference equations. Trans Amer Math Soc, 1928, 30: 507–541

38 Birkhoff G D, Trjitzinsky W J. Analytic theory of singular difference equations. Acta Math, 1932, 60: 1–89

39 Wong R, Li H. Asymptotic expansions for second-order linear difference equations. J Comput Appl Math, 1992, 41: 65–94

40 Wong R, Li H. Asymptotic expansions for second-order linear difference equations II. Stud Appl Math, 1992, 87: 289–324

41 Wang Z, Wong R. Asymptotic expansions for second-order linear difference equations with a turning point. Numer Math, 2003, 94: 147–194

42 Szegö G. Orthogonal Polynomials. 4th ed. Colloquium Publications, vol. 23. Providence, RI: Amer Math Soc, 1975

43 Frenzen C L, Wong R. Uniform asymptotic expansions of Laguerre polynomials. SIAM J Math Anal, 1988, 19: 1232–1248

44 Wang Z, Wong R. Uniform asymptotic expansions of $J_\nu(\nu a)$ via a difference equation. Numer Math, 2002, 91: 147–193

45 Cao L H, Li Y T. Linear difference equations with a transition point at the origin. Anal Appl, 2014, 12: 75–106

46 Wang Z, Wong R. Linear difference equations with transition points. Math Comp, 2005, 74: 629–653

47 Deift P, Zhou X. A steepest descent method for oscillatory Riemann-Hilbert problems: Asymptotics for the mKdV equation. Ann of Math, 1993, 137: 295–370

48 Deift P, Zhou X. Long-Time Behavior of the Non-Focusing Non-linear Schrödinger Equation: A Case Study. Lectures in Mathematical Sciences, vol. 5. Tokyo: University of Tokyo, 1994

49 Deift P, Zhou X. Asymptotics for the Painlevé II equation. Comm Pure Appl Math, 1995, 48: 277–337

50 Bleher P, Its A. Semiclassical asymptotics of orthogonal polynomials, Riemann-Hilbert problem, and universality in the matrix model. Ann of Math, 1999, 150: 185–266

51 Deift P. Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann-Hilbert Approach. Courant Lecture in Mathematics, vol. 3. New York: New York University, 1999

52 Deift P, Kriecherbauer T, McLaughlin K T-R, et al. Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory. Comm Pure Appl Math, 1999, 52: 1335–1425

53 Deift P, Kriecherbauer T, McLaughlin K T-R, et al. Strong asymptotics of orthogonal polynomials with respect to exponential weights. Comm Pure Appl Math, 1999, 52: 1491–1552

54 Fokas A S, Its A R, Kitaev A V. The isomonodromy apporach to matrix model in 2D quantum gravity. Comm Math Phys, 1992, 147: 395–430

55 Qiu W Y, Wong R. Asymptotic expansions for Riemann-Hilbert problems. Anal Appl, 2008, 6: 269–298

56 Wang Z, Wong R. Uniform asymptotics for orthogonal polynomials with exponential weights — the Riemann-Hilbert approach. Stud Appl Math, 2005, 115: 139–155

57 Wong R, Zhang L. Global asymptotics of Hermite polynomials via Riemann-Hilbert approach. Discrete Contin Dyn Syst Ser B, 2007, 7: 661–682

Asymptotic analysis — a brief survey

WONG Sue-Cheun Roderick

Abstract In this paper, we give a short review of the development of asymptotic analysis in the second half of the 20th century. It includes asymptotic approximations of integrals, asymptotic solutions to linear ordinary differential equations, singular perturbation theory, asymptotics for difference equations and the Riemann-Hilbert method.

Keywords **steepest descent method, WKB method, singular perturbation theory, difference equation, Riemann-Hilbert method**

MSC(2010) **41A60, 34E20, 33C45, 65Q10**

doi: 10.1360/N012015-00112