对边简支平面自由振动的辛弹性动力学解法

邢誉峰^{①*}, 张慧敏^①, 钱志英^②

① 北京航空航天大学固体力学研究所, 北京 100083;

② 中国空间技术研究院总体部, 北京 100094

* E-mail: xingyf@buaa.edu.cn

收稿日期: 2016-06-15; 接受日期: 2016-08-31; 网络出版日期: 2016-11-24

国家自然科学基金(批准号: 11172028, 1372021)和高等学校博士学科点专项科研基金(编号: 20131102110039)资助项目

摘要 在 Hamilton 辛对偶力学体系下, 给出了求解一对边简支平面自由振动问题精确解的一般方法, 并用该方法求得了一对边简支另一对边固支的矩形平面自由振动问题的精确解. 首先用空间变量分离方法, 求解矩形域平面自由振动问题的 Hamilton 正则方程, 得到两个坐标方向的本征值关系; 再利用 Hamilton 算子矩阵本征向量之间的共轭辛正交关系, 得到广义振型函数向量的一般表达式; 最后引入边界条件确定了两个空间本征值、频率方程和广义振型函数向量; 讨论了固有振动频率与空间本征值的对应关系. 把辛对偶方法和经典方法进行了比较, 结果说明了本文方法的正确性和普适性.

关键词 辛对偶, Hamilton 体系, 平面问题, 自由振动

1 引言

对于结构动力学问题, 通常在 Lagrange 体系下进行描述和求解. 在这种体系下, 利用实对称矩阵及其特征值理论, 有振型函数的正交性和直观、物理意义明确的振型叠加方法. 在 Lagrange 体系下求解动力学问题的普遍做法是将动力学方程的未知量简化到一类, 从而导致方程阶次升高, 给求解带来一定困难. 针对本文问题, 即在对边简支的情况下, 可以借助半逆法求出其振型函数和频率方程的解析表达式.

Hamilton 体系是一分析力学体系. 钟万勰^[1,2]以及姚伟岸和钟万勰^[3]把 Hamilton 辛对偶体系引入到弹性力学中, 建立了以位移和应力为对偶变量或两

类变量的弹性力学求解方法, 展示了 Hamilton 辛对偶体系描述和求解力学问题的优势. 文献[4~7]分别给出了剪切板和不同边界条件下薄板静力弯曲求解的辛几何方法. 鲍四元和邓子辰^[8]、Lim 等人^[9]、李锐等人^[10]分别使用辛几何方法求解了不同边界条件下矩形薄板面外自由振动的固有频率和模态函数. 钟阳等人^[11]提出了矩形剪切板面外自由振动问题的辛几何解法, 求出了对边简支板自由振动问题的解析解. 邢誉峰和钱志英^[12]也曾在 Hamilton 辛对偶体系中, 得到了 Timoshenko 梁广义振型函数的正交性, 把其碰撞问题归结为自由振动问题并求得该问题的解析解. 近两年来, 李锐等人^[13,14]又在 Hamilton 体系中分别讨论了角点支撑^[13]和多点支撑^[14]下矩形薄板

引用格式: 邢誉峰, 张慧敏, 钱志英. 对边简支平面自由振动的辛弹性动力学解法. 中国科学: 技术科学, 2016, 46: 1219-1224
Xing Y F, Zhang H M, Qian Z Y. Symplectic elastic dynamical method for the in-plane free vibration of plane problem with two opposite edges simply-supported (in Chinese). Sci Sin Tech, 2016, 46: 1219-1224, doi: 10.1360/N092016-00215

的面外自由振动解析解. 在上述用辛对偶方法求解矩形板自由振动的工作中, 用的都是辛级数展开方法.

目前, 尚未见到在 Hamilton 体系中讨论薄板面内自由振动的问题. 对于对边简支平面自由振动问题, Xing 和 Liu^[15]在 Lagrange 体系下已经对其进行了系统研究, 但本文目的是在 Hamilton 辛对偶体系下重新探讨此问题, 以比较两种体系对结构自由振动问题各自的特点.

2 Hamilton 正则方程

对于图 1 所示的平面问题, 构造其 Lagrange 密度函数:

$$L = -T + V, \quad (1)$$

式中, V 为势能密度函数, T 为动能密度函数. 位移场表示为

$$U(x, z, t) = e^{i\omega t} u(x, z), \quad (2)$$

$$W(x, z, t) = e^{i\omega t} w(x, z). \quad (3)$$

则动能密度函数为

$$T = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (u^2 + w^2). \quad (4)$$

势能密度函数为

$$V = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \frac{E}{4(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (5)$$

式中, U 和 W 分别为 x 和 z 方向的动位移, ω 为固有振动频率, u 和 w 分别为 x 和 z 方向的振型函数, E 为弹性模量, ν 为泊松比.

下面把 z 坐标模拟成为时间坐标, 引入符号 $(\cdot) = \partial/\partial z$, 这样 Lagrange 密度函数就可以写成如下形式:

$$L(w, u, \dot{w}, \dot{u}) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \dot{w}^2 + 2\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \dot{w} \right] + \frac{E}{4(1+\nu)} \left(\dot{u} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \rho \omega^2 (u^2 + w^2). \quad (6)$$

利用 Legendre 变换, 引入位移 w 和 u 的对偶变量

图 1 矩形平面问题几何示意图

$$\sigma = \sigma_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\dot{w} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (7)$$

$$\tau = \tau_{xz} = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = G \left(\dot{u} + \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

按照 Legendre 变换的规则, 引入 Hamilton 密度函数:

$$H(w, u, \sigma, \tau) = \sigma \dot{w} + \tau \dot{u} - L(w, u, \dot{w}, \dot{u}). \quad (8)$$

引入 $\mathbf{q}^T = [w \ u]$ 表示位移向量, $\mathbf{p}^T = [\sigma \ \tau]$ 表示 $\mathbf{q}$ 的对偶向量, 即应力向量. 根据 Hamilton 变分原理, 有:

$$\delta \left\{ \int_0^h \int_0^l [\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p})] dx dz \right\} = 0. \quad (9)$$

可以导出平衡方程:

$$\dot{w} = -\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1-\nu^2}{E} \sigma, \quad (10)$$

$$\dot{u} = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{G} \tau.$$

及其对偶方程:

$$\dot{\sigma} = -\rho \omega^2 w - \frac{\partial \tau}{\partial x}, \quad (11)$$

$$\dot{\tau} = -\rho \omega^2 u - E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

综合式(10)和(11)得到如下 Hamilton 正则方程组

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{D} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

式中,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\nu \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\rho \omega^2 & 0 \\ 0 & -\rho \omega^2 - E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu^2}{E} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \nu \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

式中, $\mathbf{A}^T$ 为 $\mathbf{A}$ 的互伴算子矩阵. 引入全状态向量 $\mathbf{v}$ 和算子矩阵 $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{v}^T = [\mathbf{q}^T \quad \mathbf{p}^T] = [w \quad u \quad \sigma \quad \tau], \quad (14)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{D} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix}, \quad (15)$$

则 Hamilton 正则方程(12)变成为

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H}\mathbf{v}, \quad (15)$$

式中, 算子矩阵 $\mathbf{H}$ 含有关于 x 的微分算子. 不难证明, 对于简单边界条件, $\mathbf{H}$ 是 Hamilton 算子矩阵.

3 空间变量分离

对于齐次 Hamilton 正则方程(15), 可以用分离变量法求解.

把全状态向量写成分量变量形式 $\mathbf{v}(z, x) = \varepsilon(z)\boldsymbol{\psi}(x)$. 把 $\mathbf{v}(z, x)$ 代入到正则方程(15)中, 可以求得 $\varepsilon(z) = \varepsilon_0 e^{\mu z}$ 和关于坐标 x 的本征方程为

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\psi}(x) = \mu\boldsymbol{\psi}(x), \quad (16)$$

式中, $\boldsymbol{\psi}^T = [w(x) \quad u(x) \quad \sigma(x) \quad \tau(x)]$. 由于坐标 z 已经被分离出去, 因此, 式(16)是关于任意截面 z 的本征值问题.

令 $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{A}e^{\lambda x}$, $\mathbf{A}$ 是由数组成的列向量. 把 $\boldsymbol{\psi}$ 代入式(16)得到关于本征根 λ 的代数方程为

$$\lambda^4 + R_1 \lambda^2 + R_2 = 0, \quad (17)$$

式中,

$$R_1 = 2\mu^2 + \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 (3-\nu)(1+\nu),$$

$$R_2 = \mu^4 + \mu^2 \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 (3-\nu)(1+\nu) + 2\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^4 (1+\nu)(1-\nu^2), \quad (18)$$

式中, $c_0 = \sqrt{E/\rho}$. 由于方程(17)的判别式 $\Delta = (\omega/c_0)^4 (1+\nu)^4 > 0$, 因此本征根 λ 为

$$\lambda_{1,3} = \pm \sqrt{-\mu^2 - \left(\frac{\omega}{c_s}\right)^2},$$

$$\lambda_{2,4} = \pm \sqrt{-\mu^2 - \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\omega}{c_s}\right)^2}, \quad (19)$$

式中, $c_s = \sqrt{G/\rho} = c_0 / \sqrt{2(1+\nu)}$. 于是方程(16)的通解为

$$w(x) = A_w e^{-\lambda_1 x} + B_w e^{\lambda_1 x} + C_w e^{-\lambda_2 x} + D_w e^{\lambda_2 x},$$

$$u(x) = k_1 (A_w e^{-\lambda_1 x} - B_w e^{\lambda_1 x}) + k_2 (C_w e^{-\lambda_2 x} - D_w e^{\lambda_2 x}),$$

$$\sigma(x) = k_3 (A_w e^{-\lambda_1 x} + B_w e^{\lambda_1 x}) + k_4 (C_w e^{-\lambda_2 x} + D_w e^{\lambda_2 x}),$$

$$\tau(x) = k_5 (A_w e^{-\lambda_1 x} - B_w e^{\lambda_1 x}) + k_6 (C_w e^{-\lambda_2 x} - D_w e^{\lambda_2 x}), \quad (20)$$

式中,

$$k_1 = \frac{\mu}{\lambda_1}, \quad k_2 = -\frac{\lambda_2}{\mu}, \quad k_3 = 2\mu G,$$

$$k_4 = \frac{G}{\mu} \left(2\mu^2 - \nu \left(\frac{\omega}{c_s} \right)^2 \right), \quad k_5 = \frac{G}{\lambda_1} \left(2\mu^2 + \left(\frac{\omega}{c_s} \right)^2 \right),$$

$$k_6 = -2\lambda_2 G.$$

此外, 可能存在一对本征根为零的特殊情况, 即当 $-\mu^2 = \left(\frac{\omega}{c_s}\right)^2$ 或 $-\mu^2 = \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\omega}{c_s}\right)^2$ 时, 此时通解形式为

$$w(x) = A_1 + B_1 x + C_1 e^{-\lambda x} + D_1 e^{\lambda x},$$

$$u(x) = A_2 + B_2 x + C_2 e^{-\lambda x} + D_2 e^{\lambda x},$$

$$\sigma(x) = A_3 + B_3 x + C_3 e^{-\lambda x} + D_3 e^{\lambda x},$$

$$\tau(x) = A_4 + B_4 x + C_4 e^{-\lambda x} + D_4 e^{\lambda x}, \quad (21)$$

式中, $\lambda^2 = \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{\omega}{c_s}\right)^2$ 或 $\lambda^2 = -\frac{1+\nu}{2} \left(\frac{\omega}{c_s}\right)^2$. 将式(21)

代入平衡方程(10)及对偶方程(11)可得, 通解中的常数项和一次项系数均为零, 则通解形式为

$$w(x) = C_w e^{-\lambda_2 x} + D_w e^{\lambda_2 x},$$

$$u(x) = k_u (C_w e^{-\lambda_2 x} - D_w e^{\lambda_2 x}),$$

$$\sigma(x) = k_\sigma (C_w e^{-\lambda_2 x} + D_w e^{\lambda_2 x}),$$

$$\tau(x) = k_\tau (C_w e^{-\lambda_2 x} - D_w e^{\lambda_2 x}). \quad (22)$$

由式(22)可得, 无论 $x=0$ 处的边界条件为简支、固支还是自由, 位移和应力均恒为零, 这不是本文所讨论的解.

从式(19)可以看出, 对于任意一组 μ_i 和 λ_j , 只能

确定一个固有频率 ω_{ij} ; 反过来, 对任意一个固有频率 ω , 可能存在多个 μ 和 λ 与之相对应. μ_i 和 λ_j 要分别用关于 z 和 x 方向的边界条件来确定.

在适用于对边简支边界条件的半解析方法中, 实际上是事先给出了与简支对边对应的本征值和本征函数, 从而把矩形平面或平板问题的双空间本征值求解问题变成了单空间本征值求解问题, 使问题大幅度简化.

根据 Hamilton 算子矩阵 $\mathbf{H}$ 的本征向量之间的共轭辛正交关系和本征值特点, 本文考虑的对边简支平面问题的广义振型函数向量可以写成为

$$\mathbf{v} = ae^{\mu z} \boldsymbol{\psi} + be^{-\mu z} \boldsymbol{\psi}_- (\mu \text{ 为纯虚数}), \quad (23a)$$

或

$$\mathbf{v} = ae^{\mu z} \boldsymbol{\psi} + be^{-\mu z} \boldsymbol{\psi}_- + a^* e^{\mu^* z} \boldsymbol{\psi}^* + b^* e^{-\mu^* z} \boldsymbol{\psi}_-^* (\mu \text{ 为实部非零的复数}), \quad (23b)$$

式中, 右上标“*”表示共轭, 且 $\boldsymbol{\psi}_-$ 对应 $-\mu$, a 和 b 为待定常数. 若 μ 为实部非零的复数, 也可以用(23a)来确定振型函数. 本文利用式(23a)来确定振型函数.

根据式(20)可以得到如下关系:

$$\begin{aligned} w(x) &= w_-(x), \quad \tau(x) = \tau_-(x), \\ u(x) &= -u_-(x), \quad \sigma(x) = -\sigma_-(x). \end{aligned} \quad (24)$$

因此, 式(23a)可以变成

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} w(x, z) \\ u(x, z) \\ \sigma(x, z) \\ \tau(x, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(x)(ae^{\mu z} + be^{-\mu z}) \\ u(x)(ae^{\mu z} - be^{-\mu z}) \\ \sigma(x)(ae^{\mu z} - be^{-\mu z}) \\ \tau(x)(ae^{\mu z} + be^{-\mu z}) \end{bmatrix}. \quad (25)$$

4 频率方程和广义振型函数向量

本文考虑对边 $z=0, h$ 为简支, 对边 $x=0, l$ 为固支情况. 若对边 $x=0, l$ 为其他任意简单边界组合, 求解方法类似, 本文不再赘述.

根据变分原理, 由式(9)可以得到边界条件为

$$\begin{aligned} (\sigma_x l + \tau m) \delta u &= 0, \\ (\sigma m + \tau l) \delta w &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\text{式中, } \sigma_x = \frac{\partial L}{\partial(\partial u / \partial x)} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \dot{w} \right), \quad l = \cos(n, x),$$

$m = \cos(n, z)$, n 为截面外法线方向.

对边 $z=0, h$ 简支边界条件有如下两种形式:

$$\begin{aligned} w(x)(ae^{\mu z} + be^{-\mu z}) \Big|_{z=0, h} &= 0, \\ \tau(x)(ae^{\mu z} + be^{-\mu z}) \Big|_{z=0, h} &= 0, \end{aligned} \quad (27a)$$

和

$$\begin{aligned} u(x)(ae^{\mu z} - be^{-\mu z}) \Big|_{z=0, h} &= 0, \\ \sigma(x)(ae^{\mu z} - be^{-\mu z}) \Big|_{z=0, h} &= 0. \end{aligned} \quad (27b)$$

本文仅考虑式(27a)描述的情况. 根据式(27a)得:

$$\begin{aligned} a + b &= 0, \\ e^{-\mu h} - e^{\mu h} &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

令 $\mu = \varepsilon + i\xi$ ($i^2 = -1$), 代入式(28)得:

$$e^{\varepsilon h} [\cos(\xi h) + i \sin(\xi h)] = e^{-\varepsilon h} [\cos(\xi h) - i \sin(\xi h)]. \quad (29)$$

由等式两端实部与虚部对应相等可知 $\varepsilon = 0$, $\sin(\xi h) = 0$, 因此,

$$\mu_j = i\xi_j = i \frac{j\pi}{h} \quad (j = 1, 2, 3, \dots). \quad (30)$$

根据式(28)和(30)可以把式(25)变成

$$\mathbf{v}_j(x, z) = \begin{bmatrix} w_j(x, z) \\ u_j(x, z) \\ \sigma_j(x, z) \\ \tau_j(x, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ia_j \sin(\xi_j z) w_j(x) \\ 2a_j \cos(\xi_j z) u_j(x) \\ 2a_j \cos(\xi_j z) \sigma_j(x) \\ 2ia_j \sin(\xi_j z) \tau_j(x) \end{bmatrix}. \quad (31)$$

为了使 $\mathbf{v}_j(x, z)$ 为实函数, 式(31)中的 $w_j(x)$ 和 $\tau_j(x)$ 为纯虚数或实数, $u_j(x)$ 和 $\sigma_j(x)$ 对应的为实数或纯虚数.

下面考虑对边 $x=0, l$ 的固支边界条件:

$$\begin{aligned} w_i(x, z) \Big|_{x=0, l} &= 0, \\ u_i(x, z) \Big|_{x=0, l} &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

把式(23a)代入式(32)得:

$$\begin{aligned} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)l} [(e^{2\lambda_1 l} - 1)(e^{2\lambda_2 l} - 1)(k_1^2 + k_2^2) \\ - 2(1 + e^{2\lambda_1 l} + e^{2\lambda_2 l} + e^{2(\lambda_1 + \lambda_2)l} - 4e^{(\lambda_1 + \lambda_2)l}) k_1 k_2] = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

通过求解方程(33), 就可以得到本征值 λ_1 和 λ_2 . 令 $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $\lambda_2 = \alpha_2 + i\beta_2$, 其中 α_1 , α_2 , β_1 和 β_2 为实数. 因为 μ 为纯虚数, 因此由式(19)可知 λ 只能为纯虚数或实数.

根据式(19)和 μ 的表达式, 可以分 3 种情况讨论 λ 及相应的频率方程(33)和广义振型函数向量式(31)的

具体形式, 表 1 给出了有关结果, 其中的系数如下:

$$\begin{aligned}
 k_7 &= -\frac{\cos(\beta_1 l) - \cos(\beta_2 l)}{-\sin(\beta_1 l) + (k_2 / k_1) \sin(\beta_2 l)}, \\
 k_8 &= -\frac{\cos(\beta_1 l) - \cosh(\alpha_2 l)}{\sin(\beta_1 l) + i(k_1 / k_2) \sinh(\alpha_2 l)}, \\
 k_9 &= \frac{1}{2} \frac{(k_1 / k_2) (\cos(\beta_1 l) - e^{\alpha_2 l}) + i \sin(\beta_1 l)}{-i \sin(\beta_1 l) + (k_1 / k_2) \sinh(\alpha_2 l)}, \\
 k_{10} &= \frac{1}{2} \frac{(k_1 / k_2) (e^{-\alpha_2 l} - \cos(\beta_1 l)) + i \sin(\beta_1 l)}{-i \sin(\beta_1 l) + (k_1 / k_2) \sinh(\alpha_2 l)}, \\
 k_{11} &= e^{-2\alpha_1 l} \frac{(k_1 k_4 - k_2 k_3)}{k_1 k_4 + k_2 k_3}, \\
 k_{12} &= e^{-(\alpha_1 - \alpha_2) l} \frac{k_1 (k_3 + k_4)}{k_1 k_4 + k_2 k_3},
 \end{aligned}$$

$$k_{13} = e^{-(\alpha_1 + \alpha_2) l} \frac{k_1 (k_3 - k_4)}{k_1 k_4 + k_2 k_3}.$$

这里给出的结果与文献[15]在 Lagrange 体系中给出的结果完全相同, 这也证明了本文方法的正确性.

5 讨论和总结

本文在 Hamilton 辛对偶体系下求得了对边简支对边固支矩形平面问题的自由振动精确解, 根据完全类似的方法, 可以求得对边简支另外对边为任意齐次边界情况自由振动的精确解.

根据本文的工作可以知道, 对于对边简支平面自由振动问题, 一对空间本征值对应一阶固有振动频率和模态, 这也是 Lagrange 单变量体系下半逆法适用的情况. 对于其他边界组合情况, 一个频率对应无穷对

表 1 一对边简支一对边固支矩形平面问题中 μ 和 λ 取值与广义振型函数向量

λ 和参数范围	频率方程及广义振型函数向量 $\mathbf{v}_{nm}$
$-\mu^2 < \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\omega}{c_s} \right)^2,$ $\lambda_1 = i\beta_1, \lambda_2 = i\beta_2$	$ \begin{aligned} &(\beta_1^2 \beta_2^2 + \xi_n^4) \sin(\beta_1 l) \sin(\beta_2 l) \\ &-2\beta_1 \beta_2 \xi_n^2 (\cos(\beta_1 l) \cos(\beta_2 l) - 1) = 0 \\ &\left\{ \begin{aligned} &\sin(\xi_n z) \left[k_7 \cos(\beta_{1m} x) + \sin(\beta_{1m} x) - k_7 \cos(\beta_{2m} x) - \frac{k_1}{k_2} \sin(\beta_{2m} x) \right] \\ &\cos(\xi_n z) \left[k_1 \cos(\beta_{1m} x) - k_1 k_7 \sin(\beta_{1m} x) - k_1 \cos(\beta_{2m} x) + k_2 k_7 \sin(\beta_{2m} x) \right] \\ &-i \cos(\xi_n z) \left[k_3 k_7 \cos(\beta_{1m} x) + k_3 \sin(\beta_{1m} x) - k_4 k_7 \cos(\beta_{2m} x) - k_4 \frac{k_1}{k_2} \sin(\beta_{2m} x) \right] \\ &i \sin(\xi_n z) \left[k_5 \cos(\beta_{1m} x) - k_5 k_7 \sin(\beta_{1m} x) - k_6 \frac{k_1}{k_2} \cos(\beta_{2m} x) + k_6 k_7 \sin(\beta_{2m} x) \right] \end{aligned} \right\} \end{aligned} $
$\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\omega}{c_s} \right)^2 <$ $-\mu^2 < \left(\frac{\omega}{c_s} \right)^2$ $\lambda_1 = i\beta_1, \lambda_2 = \alpha_2$	$ \begin{aligned} &2\alpha_2 \beta_1 \xi_n^2 (\cos(\beta_1 l) \cosh(\alpha_2 l) - 1) \\ &+ (\alpha_2^2 \beta_1^2 - \xi_n^4) \sin(\beta_1 l) \sinh(\alpha_2 l) = 0 \\ &\left\{ \begin{aligned} &-\sin(\xi_n z) \left[\cos(\beta_{1m} x) + k_8 \sin(\beta_{1m} x) + k_9 e^{-\alpha_{2m} x} + k_{10} e^{\alpha_{2m} x} \right] \\ &\cos(\xi_n z) \left[-k_1 k_8 \cos(\beta_{1m} x) + k_1 \sin(\beta_{1m} x) + i k_2 (k_9 e^{-\alpha_{2m} x} - k_{10} e^{\alpha_{2m} x}) \right] \\ &i \cos(\xi_n z) \left[k_3 \cos(\beta_{1m} x) + k_3 k_8 \sin(\beta_{1m} x) + k_4 (k_9 e^{-\alpha_{2m} x} + k_{10} e^{\alpha_{2m} x}) \right] \\ &i \sin(\xi_n z) \left[k_5 \sin(\beta_{1m} x) - k_5 k_8 \cos(\beta_{1m} x) + i k_6 (k_9 e^{-\alpha_{2m} x} - k_{10} e^{\alpha_{2m} x}) \right] \end{aligned} \right\} \end{aligned} $
$-\mu^2 > \left(\frac{\omega}{c_s} \right)^2$ $\lambda_1 = \alpha_1, \lambda_2 = \alpha_2$	$ \begin{aligned} &(e^{2\alpha_1 l} - 1)(e^{2\alpha_2 l} - 1)(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \xi_n^4) \\ &-2\alpha_1 \alpha_2 \xi_n^2 [(e^{2\alpha_1 l} + 1)(e^{2\alpha_2 l} + 1) - 4e^{(\alpha_1 + \alpha_2) l}] = 0 \\ &\left\{ \begin{aligned} &\sin(\xi_n z) \left[e^{-\alpha_{1m} x} + k_{11} e^{\alpha_{1m} x} + k_{12} e^{-\alpha_{2m} x} + k_{13} e^{\alpha_{2m} x} \right] \\ &-i \cos(\xi_n z) \left[k_1 (e^{-\alpha_{1m} x} - k_{11} e^{\alpha_{1m} x}) + k_2 (k_{12} e^{-\alpha_{2m} x} - k_{13} e^{\alpha_{2m} x}) \right] \\ &-i \cos(\xi_n z) \left[k_3 (e^{-\alpha_{1m} x} + k_{11} e^{\alpha_{1m} x}) + k_4 (k_{12} e^{-\alpha_{2m} x} + k_{13} e^{\alpha_{2m} x}) \right] \\ &\sin(\xi_n z) \left[k_5 (e^{-\alpha_{1m} x} - k_{11} e^{\alpha_{1m} x}) + k_6 (k_{12} e^{-\alpha_{2m} x} - k_{13} e^{\alpha_{2m} x}) \right] \end{aligned} \right\} \end{aligned} $

空间本征值, 这不同于静力情况; 或一个模态函数由两个坐标方向无穷多个本征函数来表达; 式(23a)只是一个特解或相当于自由振动中的主振动, 且对应一对空间本征根; 而自由振动本征解的通解为特解之和。

对于对边非简支情况, 单变量体系下的半逆法

不再适用, 不过可以利用辛对偶方法的展开定理直接求解, 这是把时间坐标和空间坐标互相比拟的结果, 这也是本文方法的优越性。辛对偶方法的展开定律可以看成是频域内的振型叠加方法。本文方法可以推广到板壳自由振动分析。

参考文献

- 1 钟万勰. 弹性力学求解新体系. 大连: 大连理工大学出版社, 1995
- 2 钟万勰. 应用力学对偶体系. 北京: 科学出版社, 2002
- 3 姚伟岸, 钟万勰. 辛弹性力学. 北京: 高等教育出版社, 2002
- 4 姚伟岸, 隋永枫. Reissner 板弯曲的辛求解体系. 应用数学和力学, 2004, 25: 159–165
- 5 鲍四元, 邓子辰. Mindlin 中厚板的辛求解方法. 固体力学学报, 2005, 26: 102–106
- 6 Lim C W, Cui S, Yao W A. On new symplectic elasticity approach for exact bending solutions of rectangular thin plates with two opposite sides simply supported. Int J Solids Struct, 2007, 44: 5396–5411
- 7 朱晓双, 何文明. 对边固支另两边简支矩形薄板弯曲问题的哈密顿方法. 温州大学学报(自然科学版), 2014, 35: 35–42
- 8 鲍四元, 邓子辰. 哈密顿体系下矩形薄板自由振动的一般解. 动力学与控制学报, 2005, 3: 10–16
- 9 Lim C W, Lu C F, Xiang Y, et al. On new symplectic elasticity approach for exact free vibration solutions of rectangular Kirchhoff plates. Int J Eng Sci, 2009, 47: 131–140
- 10 Li R, Wang B, Li G, et al. Hamiltonian system-based analytic modeling of the free rectangular thin plates' free vibration. Appl Math Model, 2015, 40: 984–992
- 11 钟阳, 李锐, 田斌. 矩形中厚板自由振动问题的哈密顿体系与辛几何解法. 动力学与控制学报, 2009, 7: 302–307
- 12 邢誉峰, 钱志英. Hamilton 体系中 Timoshenko 梁冲击问题的描述和求解. 振动工程学报, 2005, 18: 266–271
- 13 Li R, Wang B, Li G, et al. Analytic free vibration solutions of rectangular thin plates point-supported at a corner. Int J Mech Sci, 2015, 96-97: 199–205
- 14 Li R, Tian Y, Wang P C, et al. New analytic free vibration solutions of rectangular thin plates resting on multiple point supports. Int J Mech Sci, 2016, 110: 53–61
- 15 Xing Y X, Liu B. Exact solutions for the free in-plane vibrations of rectangular plates. Int J Mech Sci, 2009, 51: 246–255

Symplectic elastic dynamical method for the in-plane free vibration of plane problem with two opposite edges simply-supported

XING YuFeng¹, ZHANG HuiMin¹ & QIAN ZhiYing²

¹ Institute of Solid Mechanics, Beihang University, Beijing 100183, China;

² China Academy of Space Technology, Beijing 100094, China

In Hamiltonian symplectic dual system, the general method for solving exact solutions of free vibrations of rectangular plane problem with two opposite edges simply-supported are given directly by solving the Hamiltonian canonical equations using separation-of-variables method, and the analytical expressions of mode function and frequency equation of rectangular plane problem with two opposite edges simply-supported and the other two opposite edges clamped are obtained. The corresponding relationships of the two spatial eigenvalues with natural frequency are derived and discussed, and the generalized mode function vectors are obtained by using the conjugate symplectic ortho-normalization relationship of eigenvector. Based on boundary conditions, the exact frequency equations, two spatial eigenvalues and coefficients of generalized mode function are determined. Finally, present method is compared with the method based on Lagrange system, the correctness and universality of present method are validated.

symplectic dual method, Hamiltonian system, plane problem, free vibration

doi: 10.1360/N092016-00215