新的非线性分离定理及其在向量优化中的应用

赵克全¹, 戎卫东², 杨新民^{1*}

1. 重庆师范大学数学科学学院, 重庆 401331;

2. 内蒙古大学数学科学学院, 呼和浩特 010021

E-mail: kequanz@163.com, rongwd2005@163.com, xmyang@cqnu.edu.cn

收稿日期: 2015-11-04; 接受日期: 2016-03-31; 网络出版日期: 2016-11-30; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11431004, 11271391, 11671062 和 11301574)、重庆市基础与前沿研究计划 (批准号:

cstc2015jcyjA00027)、重庆市教委科学技术研究 (批准号: KJ1500303) 和第二批重庆市高等学校青年骨干教师资助计划资助项目

摘要 本文利用 Minkowski 型非线性标量化泛函分别建立了一般实线性空间中基于相对代数内部与向量闭包, 实拓扑线性空间中基于相对拓扑内部与拓扑闭包, 以及实分离局部凸拓扑线性空间中基于拟相对内部与拓扑闭包的非线性分离定理. 这些新的分离定理能够用于研究序锥的拓扑内部甚至是相对拓扑内部或相对代数内部可能为空的向量优化问题. 作为其应用, 本文给出了向量优化问题相应弱有效解的一些非线性标量化性质; 此外, 也提出了无限维空间中的一些具体例子来对主要结果进行了解释.

关键词 非线性分离定理 相对代数内部 相对拓扑内部 拟相对内部 弱有效解 向量优化

MSC (2010) 主题分类 90C26, 90C29, 90C30, 90C46

1 引言

近年来, 向量优化理论与方法研究受到了许多学者的关注, 已成为最优化理论及应用中十分重要的研究方向之一. 到目前为止, 已有大量基础且重要的研究成果, 参见文献 [1–3] 等. 在向量优化问题研究中, 由像空间的序锥所定义的各种不同的解概念扮演了十分重要的角色, 主要包括有效解、弱有效解、各类真有效解和相应的近似解等, 其中基于序锥的拓扑内部定义的弱有效解具有一些非常好的性质. 在适当广义凸性条件下, 文献 [4, 5] 利用线性标量化方法获得了弱有效解的一些性质. 其他相关研究结果参见文献 [6–10] 等.

值得注意的是, 基于序锥的拓扑内部而定义的弱有效解具有很强的限制性, 这是因为存在大量的向量优化问题, 其序锥的拓扑内部可能是空的. 因此, 如何利用相对拓扑内部^[11]、内蕴内部^[12] (也称相对代数内部^[13] 或内蕴相对内部^[14], 本文称为相对代数内部)、拟内部^[15] 和更弱的拟相对内部^[16] 等广义内部提出向量优化问题相应的弱有效解, 并研究它们的一些线性和非线性标量化性质等, 是十分有意义的研究课题. Adán 和 Novo^[13] 利用序锥的相对代数内部提出了相应的弱有效解, 并利用线性标量化方法给出了这类弱有效解的一些性质. Bao 和 Mordukhovich^[14] 分别利用序锥的相对拓扑

英文引用格式: Zhao K Q, Rong W D, Yang X M. New nonlinear separation theorems and applications in vector optimization (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 533–544, doi: 10.1360/N012014-00235

内部、相对代数内部和拟相对内部提出了相应的弱有效解, 并通过变分分析和广义微分等工具建立了一些解的存在性定理. 关于各类广义内部的性质及其应用的进一步研究, 参见文献 [17–22] 等.

众所周知, 非线性分离定理是刻画向量优化问题各类解, 特别是弱有效解的一类十分重要的工具. 利用 Minkowski 型非线性标量化泛函, Göpfert 等^[23] 在拓扑线性空间中基于拓扑内部和拓扑闭包建立了经典的非线性分离定理, 进而获得了向量优化问题近似解的一些非线性标量化性质. Tammer 和 Zălinescu^[24] 给出了这类非线性标量化泛函的一些 Lipschitz 性质, 并证明了向量优化问题弱有效解和真有效解的一些最优性必要条件. 这类非线性分离定理已经被广泛地应用于向量优化问题研究. 特别地, Gutiérrez 等^[25] 基于 Co-radiant 集和拓扑内部提出了 (C, ε) -弱有效解, 并利用该分离定理获得了这类弱有效解的一个非线性标量化性质. Zhao 等^[26] 应用该分离定理刻画了向量优化问题的 E -有效解和 E -弱有效解. 文献 [27, 28] 利用该分离定理获得了统一框架下向量优化问题解的一些非线性标量化性质.

由于经典的非线性分离定理依赖于序锥的拓扑内部的非空性, 不能用于处理序锥的拓扑内部甚至相对拓扑内部或相对代数内部可能为空的向量优化问题. 因此, 如何利用序锥的广义内部提出一些新的非线性分离定理, 并利用这些非线性分离定理刻画向量优化问题相应的弱有效解是非常重要的研究课题. 目前, 国际上还未见相关的研究成果. 基于此, 本文利用 Minkowski 型非线性标量化泛函, 首次建立了一般实线性空间中基于序锥的相对代数内部与向量闭包的 nonlinear 分离定理. 作为其特例, 建立了实拓扑线性空间中基于序锥的相对拓扑内部和拓扑闭包的 nonlinear 分离定理. 进一步, 本文也建立了实分离局部凸拓扑线性空间中基于序锥的拟相对内部与拓扑闭包的 nonlinear 分离定理. 这些新的非线性分离定理不依赖于序锥的拓扑内部的非空性. 作为其应用, 本文利用这些新的非线性分离定理给出了向量优化问题相应弱有效解的一些非线性标量化性质.

2 预备知识

假定 Y 为实线性空间, A 是 Y 中的非空子集. 集合 A 的锥包^[11, 12, 29]、仿射包^[11, 12, 29]和向量闭包^[13]分别定义为

$$\begin{aligned}\text{cone}A &= \{\alpha a \mid \alpha \geq 0, a \in A\}, \\ \text{aff}A &= \left\{ y \in Y \mid y = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i, y_i \in A, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, n \in \mathbb{N}^+ \right\}, \\ \text{vcl}A &= \{y \in Y \mid \exists h \in Y, \forall \delta > 0, \exists t \in (0, \delta], y + th \in A\}.\end{aligned}$$

设 A 为 Y 中的非空凸子集. A 的相对代数内部^[12, 14, 16, 30]定义为

$$\text{icr}A = \{y \in A \mid \text{cone}(A - y) \text{ 是 } Y \text{ 中的线性子空间}\}.$$

用 $\text{ibd}A$ 表示 A 的相对代数边界, 即 $\text{ibd}A = \text{vcl}A \setminus \text{icr}A$. A 的相对代数内部可等价地表述为

$$\text{icr}A = \{y \in A \mid \forall h \in \text{aff}A - y, \exists \delta > 0, \forall t \in [0, \delta], y + th \in A\}.$$

这与文献 [13, 29] 中的定义一致.

设 Y 为实拓扑线性空间, A 是 Y 中的非空子集. A 的拓扑内部、相对拓扑内部和拓扑闭包^[29, 30]分别定义为

$$\text{int}A = \{y \in A \mid \text{存在零邻域 } U \text{ 满足 } y + U \subset A\},$$

$$\text{ri}A = \{y \in A \mid \text{存在零邻域 } U \text{ 满足 } (y + U) \cap \text{cl}(\text{aff}A) \subset A\},$$

$$\text{cl}A = \{y \in Y \mid \text{对任意的零邻域 } U, \text{ 满足 } (y + U) \cap A \neq \emptyset\}.$$

分别用 $\text{bd}A$ 和 $\text{rbd}A$ 表示 A 的拓扑边界和相对拓扑边界, 即 $\text{bd}A = \text{cl}A \setminus \text{int}A$, $\text{rbd}A = \text{cl}A \setminus \text{ri}A$.

设 A 为实拓扑线性空间 Y 中的非空凸子集. A 的拟内部和拟相对内部^[15-18, 20, 22] 分别定义为

$$\text{qi}A = \{y \in A \mid \text{cl}(\text{cone}(A - y)) = Y\},$$

$$\text{qri}A = \{y \in A \mid \text{cl}(\text{cone}(A - y)) \text{ 是 } Y \text{ 中的线性子空间}\}.$$

显然, $A \subset \text{vcl}A \subset \text{cl}A$. 因此, 集合的拓扑闭性蕴含向量闭性. Bot 和 Csetnek^[19] 给出了各种内部及广义内部之间的具体关系如下:

$$\begin{array}{ccc} & \text{ri}A \subset \text{icr}A & \\ \text{int}A \subset & & \subset \text{qri}A \subset A. \\ & \text{qi}A & \end{array}$$

上面的包含关系一般情形下是严格的. 若 Y 是有限维空间, 则 $\text{qi}A = \text{int}A$ ^[15] 且 $\text{qri}A = \text{ri}A$ ^[17]. 若 Y 是实局部凸拓扑线性空间, A 是 Y 中具非空拓扑内部的凸子集, 则 $\text{int}A = \text{ri}A = \text{icr}A = \text{qi}A = \text{qri}A$ ^[17]. 若 Y 是实分离局部凸拓扑线性空间, A 是 Y 中具有拟内部的凸子集, 则 $\text{qi}A = \text{qri}A$ ^[18]. 此外, 当 A 为凸集且 $\text{ri}A \neq \emptyset$ 时, $\text{ri}A = \text{icr}A$ ^[29].

考虑下面的向量优化问题:

$$(\text{VOP}) \quad \min f(x) \quad \text{s.t. } x \in S,$$

其中 $f: S \rightarrow Y$, S 是 X 中的非空子集. 设 K 是 Y 中的非空凸锥, Y 中的偏序关系 “ $\leq$ ” 定义为

$$y_1 \leq y_2 \Leftrightarrow y_2 - y_1 \in K.$$

此外, 称 Y 中的非空子集 K 是点凸锥, 若 K 是凸锥且满足 $K \cap (-K) = \{0\}$.

Bao 和 Mordukhovich^[14] 分别利用序锥的拟相对内部、相对代数内部和相对拓扑内部引入了下面的弱有效解概念.

定义 2.1 (i) 可行解 $\bar{x} \in S$ 称为问题 (VOP) 关于序锥 K 的相对代数内部 $\text{icr}K$ 的弱有效解, 记为 $\bar{x} \in \text{WE}(f, S, \text{icr}K)$, 若 $\text{icr}K \neq \emptyset$ 且

$$(f(\bar{x}) - \text{icr}K) \cap f(S) = \emptyset.$$

(ii) 可行解 $\bar{x} \in S$ 称为问题 (VOP) 关于序锥 K 的相对拓扑内部 $\text{ri}K$ 的弱有效解, 记为 $\bar{x} \in \text{WE}(f, S, \text{ri}K)$, 若 $\text{ri}K \neq \emptyset$ 且

$$(f(\bar{x}) - \text{ri}K) \cap f(S) = \emptyset.$$

(iii) 可行解 $\bar{x} \in S$ 称为问题 (VOP) 关于序锥 K 的拟相对内部 $\text{qri}K$ 的弱有效解, 记为 $\bar{x} \in \text{WE}(f, S, \text{qri}K)$, 若 $\text{qri}K \neq \emptyset$ 且

$$(f(\bar{x}) - \text{qri}K) \cap f(S) = \emptyset.$$

注 2.1 (i) 若 Y 是实分离局部凸拓扑线性空间且 K 是 Y 中具有非空拟内部的凸锥, 则 $\text{qri}K = \text{qi}K$. 从而, 定义 2.1(iii) 退化为 $(f(\bar{x}) - \text{qi}K) \cap f(S) = \emptyset$, 记为 $\bar{x} \in \text{WE}(f, S, \text{qi}K)$.

(ii) 若 Y 是实局部凸拓扑线性空间且 K 是 Y 中具有非空拓扑内部的凸锥, 则 $\text{int}K = \text{ri}K = \text{icr}K = \text{qri}K$. 从而, 定义 2.1 退化为经典的弱有效解, 即 $(f(\bar{x}) - \text{int}K) \cap f(S) = \emptyset$.

本文将用到 Minkowski 型非线性标量化泛函 $\varphi_{q,K} : Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, 其定义为

$$\varphi_{q,K}(y) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid y \in tq - K\},$$

其中 $K \subset Y$ 是真凸锥 (称 K 是真的, 如果 $K \neq \emptyset$ 且 $K \neq Y$), $y \in Y$ 且 $q \in Y$. 我们规定 $\inf \emptyset = +\infty$.

Chen 等^[3] 利用 $\varphi_{q,K}$ 建立了基于序锥的拓扑内部和拓扑闭包的非线性分离定理:

设 Y 是实分离拓扑线性空间, K 是 Y 中具非空拓扑内部的真闭凸锥且 $q \in \text{int}K$, 则对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$,

(i) $\{y \in Y \mid \varphi_{q,K}(y) < \lambda\} = \lambda q - \text{int}K$;

(ii) $\{y \in Y \mid \varphi_{q,K}(y) \leq \lambda\} = \lambda q - \text{cl}K$;

(iii) $\{y \in Y \mid \varphi_{q,K}(y) = \lambda\} = \lambda q - \text{bd}K$.

本文主要利用非线性标量化泛函 $\varphi_{q,K}$, 分别建立实线性空间中基于序锥的相对代数内部和向量闭包, 实拓扑线性空间中基于序锥的相对拓扑内部和拓扑闭包, 以及实分离局部凸拓扑线性空间中基于序锥的拟相对内部与拓扑闭包的非线性分离定理, 并给出其在向量优化中的一些应用.

3 基于相对代数内部和向量闭包的非线性分离定理

本节主要利用 $\varphi_{q,K}$ 在实线性空间中建立基于序锥的相对代数内部和向量闭包的非线性分离定理; 作为其特殊情形, 建立实拓扑线性空间中基于序锥的相对拓扑内部和拓扑闭包的非线性分离定理.

引理 3.1 设 Y 是实线性空间, A 是 Y 中的非空子集且 $0 \in A$, 则对任意的 $\bar{a} \in A$, $\text{aff}A = \text{aff}A - \bar{a}$.

证明 假定 $a \in \text{aff}A$. 由仿射包的定义知, 存在 $n \in \mathbb{N}^+$, $a_i \in A$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 和 $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 使得

$$a = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

从而, 由 $0 \in A$ 可知,

$$a = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i - 0 + \bar{a} \right) - \bar{a} \in \text{aff}A - \bar{a}.$$

类似可证 $\text{aff}A - \bar{a} \subset \text{aff}A$. 故 $\text{aff}A = \text{aff}A - \bar{a}$. 证毕. $\square$

定理 3.1 设 Y 是实线性空间, K 是 Y 中具有非空相对代数内部的真凸锥且 $q \in \text{icr}K$, 则对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$,

(i) $\{y \in Y \mid \varphi_{q,K}(y) < \lambda\} = \lambda q - \text{icr}K$;

(ii) $\{y \in Y \mid \varphi_{q,K}(y) \leq \lambda\} = \lambda q - \text{vcl}K$;

(iii) $\{y \in Y \mid \varphi_{q,K}(y) = \lambda\} = \lambda q - \text{ibd}K$.

证明 由相对代数边界的定义可知, 只需证明 (i) 和 (ii). 首先证明 (i). 任取 $\bar{y} \in \lambda q - \text{icr}K$, 即 $\lambda q - \bar{y} \in \text{icr}K$. 从而由 $q \in \text{icr}K \subset K$ 和引理 3.1 可知,

$$-q \in \text{aff}K = \text{aff}K - (\lambda q - \bar{y}). \quad (3.1)$$

由 (3.1) 和相对代数内部定义可知, 存在 $\bar{\alpha} > 0$ 使得 $\lambda q - \bar{y} - \bar{\alpha}q \in K$, 这表明

$$\varphi_{q,K}(\bar{y}) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid \bar{y} \in tq - K\} \leq \lambda - \bar{\alpha} < \lambda.$$

另一方面, 任取 $\bar{y} \in \{y \in Y \mid \varphi_{q,K}(y) < \lambda\}$, 则存在 $t_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $t_0 < \lambda$ 且 $\bar{y} \in t_0 q - K$. 因此, 由 K 是凸锥, $q \in \text{icr}K$, 并结合文献 [13, 命题 3(ii)] 可得

$$\begin{aligned} \bar{y} &\in \lambda q - ((\lambda - t_0)q + K) \subset \lambda q - (K + \mathbb{R}_{++}q) \\ &\subset \lambda q - (K + \text{icr}K) \\ &= \lambda q - 2\left(\frac{1}{2}K + \frac{1}{2}\text{icr}K\right) \subset \lambda q - 2\text{icr}K = \lambda q - \text{icr}K. \end{aligned}$$

下面证明 (ii). 任取 $\bar{y} \in \{y \in Y \mid \varphi_{q,K}(y) \leq \lambda\}$, 即 $\varphi_{q,K}(\bar{y}) \leq \lambda$.

若 $\varphi_{q,K}(\bar{y}) < \lambda$, 则由 (i) 可知, $\bar{y} \in \lambda q - \text{icr}K \subset \lambda q - \text{vcl}K$.

若 $\varphi_{q,K}(\bar{y}) = \lambda$, 即 $\varphi_{q,K}(\bar{y}) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid \bar{y} \in tq - K\} = \lambda$, 则由下确界的定义可知, 对任意的 $\frac{1}{n} > 0$ ($n \in \mathbb{N}^+$), 存在 $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ 使得

$$\lambda \leq t_n < \lambda + \frac{1}{n}$$

且

$$\bar{y} \in t_n q - K. \quad (3.2)$$

如果存在 $n_0 \in \mathbb{N}^+$ 使得 $t_{n_0} = \lambda$, 则有

$$\bar{y} \in t_{n_0} q - K = \lambda q - K \subset \lambda q - \text{vcl}K.$$

故不妨假设对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$,

$$\lambda < t_n < \lambda + \frac{1}{n}. \quad (3.3)$$

由 (3.3) 知, 对任意给定的 $n \in \mathbb{N}^+$, 存在 $\alpha_n > 0$ 使得 $t_n = \lambda + \alpha_n$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. 因此, 结合 (3.2) 可得 $\bar{y} \in (\lambda + \alpha_n)q - K$. 从而对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$,

$$\lambda q - \bar{y} + \alpha_n q \in K.$$

对任意给定的 $\alpha > 0$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 < \alpha$, 所以存在 $N \in \mathbb{N}^+$ 使得当 $n > N$ 时,

$$0 < \alpha_n < \alpha \quad \text{且} \quad \lambda q - \bar{y} + \alpha_n q \in K.$$

故由向量闭包的定义可知, $\lambda q - \bar{y} \in \text{vcl}K$, 即 $\bar{y} \in \lambda q - \text{vcl}K$.

另一方面, 任取 $\bar{y} \in \lambda q - \text{vcl}K$, 即 $\lambda q - \bar{y} \in \text{vcl}K$. 由 K 是凸锥, 并利用文献 [13, 命题 3(ii)] 可知, 对任意的 $\alpha > 0$,

$$\text{vcl}K + \alpha \text{icr}K = (1 + \alpha) \left(\frac{1}{1 + \alpha} \text{vcl}K + \frac{\alpha}{1 + \alpha} \text{icr}K \right) \subset (1 + \alpha) \text{icr}K = \text{icr}K. \quad (3.4)$$

故由 $q \in \text{icr}K$, 并结合 (3.4) 可知, 对任意的 $\alpha > 0$,

$$(\lambda q - \bar{y}) + \alpha q \in \text{vcl}K + \alpha \text{icr}K \subset \text{icr}K \subset K,$$

即 $\bar{y} \in (\lambda + \alpha)q - K$. 因此, $\varphi_{q,K}(\bar{y}) \leq \lambda + \alpha$. 由 α 的任意性, 有 $\bar{y} \in \{y \in Y \mid \varphi_{q,K}(y) \leq \lambda\}$. 证毕. $\square$

作为定理 3.1 的特殊情形, 下面在一般实拓扑线性空间中建立基于序锥的相对拓扑内部和拓扑闭包的非线性分离定理.

定理 3.2 设 Y 是实拓扑线性空间, K 是 Y 中具有非空相对拓扑内部的真凸锥且 $q \in \text{ri}K$, 则对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(i) \{y \in Y \mid \varphi_{q,K}(y) < \lambda\} = \lambda q - \text{ri}K;$$

$$(ii) \{y \in Y \mid \varphi_{q,K}(y) \leq \lambda\} = \lambda q - \text{cl}K;$$

$$(iii) \{y \in Y \mid \varphi_{q,K}(y) = \lambda\} = \lambda q - \text{rbd}K.$$

证明 由相对拓扑边界的定义, 只需证明 (i) 和 (ii). 首先证明 (i). 因为 K 是具有非空相对拓扑内部的凸集, 故 $\text{ri}K = \text{icr}K$. 从而由定理 3.1(i) 可知, (i) 成立. 下面证明 (ii). 利用定理 3.1(ii), 只需证明 $\text{cl}K = \text{vcl}K$. 由拓扑闭包和向量闭包的定义可知 $\text{vcl}K \subset \text{cl}K$. 下证 $\text{cl}K \subset \text{vcl}K$. 任取 $\bar{k} \in \text{cl}K$. 因为 $\text{ri}K \neq \emptyset$, 故可取 $\bar{k}' \in \text{ri}K$. 从而由 K 是锥可知, 对任意的 $\alpha > 0$,

$$\alpha \bar{k}' \in \alpha \text{ri}K = \text{ri}(\alpha K) = \text{ri}K. \quad (3.5)$$

我们指出

$$\text{cl}K + \text{ri}K \subset \text{ri}K. \quad (3.6)$$

任取 $k \in \text{cl}K + \text{ri}K$, 则存在 $k_1 \in \text{cl}K$, $k_2 \in \text{ri}K$ 使得 $k = k_1 + k_2$. 由 $k_2 \in \text{ri}K$ 及相对拓扑内部的定义可知, 存在零邻域 U 使得

$$(k_2 + U) \cap \text{cl}(\text{aff}K) \subset K. \quad (3.7)$$

而 $k_1 \in \text{cl}K$, 故 $(k_1 - U) \cap K \neq \emptyset$. 因此, 存在 $u_0 \in U$ 使得 $k_1 - u_0 \in K$ 且 $-u_0 + U$ 也是零邻域. 因为 K 是锥, 所以由 (3.7) 和引理 3.1 可得

$$\begin{aligned} (k - u_0 + U) \cap \text{cl}(\text{aff}K) &= (k_1 + k_2 - u_0 + U) \cap (\text{cl}(\text{aff}K) + k_1 - u_0) \\ &= k_1 - u_0 + ((k_2 + U) \cap \text{cl}(\text{aff}K)) \\ &\subset K + K = K. \end{aligned}$$

这表明 $k \in \text{ri}K$, 即 (3.6) 成立. 从而, 结合 (3.5) 有 $\bar{k} + \alpha \bar{k}' \in \text{ri}K \subset K$, 即 $\bar{k} \in \text{vcl}K$. 证毕. $\square$

4 基于拟相对内部和拓扑闭包的非线性分离定理

本节主要利用 $\varphi_{q,K}$, 在实分离局部凸拓扑线性空间中建立基于序锥的拟相对内部和拓扑闭包的非线性分离定理. 作为其特殊情形, 建立基于序锥的拟内部和拓扑闭包的非线性分离定理.

引理 4.1 设 Y 是实分离局部凸拓扑线性空间, K 是 Y 中具有非空拟相对内部的真点闭凸锥且 $K \neq \{0\}$, 则 $0 \notin \text{qri}K$.

证明 反证法. 假定 $0 \in \text{qri}K$, 则由 K 是闭凸锥以及拟相对内部的定义可知, $K = \text{cl}(\text{cone}K)$ 是 Y 中的线性子空间, 从而 $K \cap (-K) = K \neq \{0\}$. 这与 K 的点性相矛盾. 证毕. $\square$

引理 4.2 设 Y 是实分离局部凸拓扑线性空间, 且 K 是 Y 中具有非空拟内部的真闭凸锥, 则 $0 \notin \text{qi}K$.

证明 反证法. 假定 $0 \in \text{qi}K$, 则由 K 是闭凸锥以及拟内部的定义可得

$$K = \text{cl}(\text{cone}K) = Y.$$

这与集合 K 是真的相矛盾. 证毕. $\square$

定理 4.1 设 Y 是实分离局部凸拓扑线性空间, K 是 Y 中具有非空拟相对内部的真点闭凸锥, $K \neq \{0\}$ 且 $q \in \text{qri}K$, 则对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$,

(i) $\{y \in Y \mid \varphi_{q,K}(y) < \lambda\} \subset \lambda q - \text{qri}K$;

(ii) $\{y \in Y \mid \varphi_{q,K}(y) \leq \lambda\} = \lambda q - \text{cl}K$.

证明 首先证明 (i). 任取 $\bar{y} \in \{y \in Y \mid \varphi_{q,K}(y) < \lambda\}$, 即

$$\inf\{t \in \mathbb{R} \mid \bar{y} \in tq - K\} < \lambda, \quad (4.1)$$

故存在 $t_0 \in \mathbb{R}$ 满足 $t_0 < \lambda$ 且 $\bar{y} \in t_0 q - K$. 若不然, 假定对任意的 $t < \lambda$, 均有 $\bar{y} \notin tq - K$, 则由下确界的定义可知, $\inf\{t \in \mathbb{R} \mid \bar{y} \in tq - K\} \geq \lambda$, 这与 (4.1) 相矛盾. 从而, 由 K 是凸锥和文献 [18, 命题 2.5(iv) 和 2.5(v)] 可得

$$\begin{aligned} \bar{y} &\in \lambda q - ((\lambda - t_0)q + K) \\ &\subset \lambda q - (K + \mathbb{R}_{++}q) \\ &\subset \lambda q - (K + \text{qri}K) = \lambda q - 2\left(\frac{1}{2}K + \frac{1}{2}\text{qri}K\right) \\ &\subset \lambda q - 2\text{qri}K = \lambda q - \text{qri}(2K) = \lambda q - \text{qri}K. \end{aligned}$$

下面证明 (ii). 由 K 是 Y 中具有非空拟相对内部的真点闭凸锥、 $K \neq \{0\}$ 、 $q \in \text{qri}K$ 和引理 4.1 可知 $q \neq 0$. 此外, 再由文献 [18, 命题 2.5(iv) 和 2.5(v)] 可知, 对任意的 $\alpha > 0$, $k \in K$,

$$\begin{aligned} k + \alpha q &= (\alpha + 1)\left(\frac{1}{\alpha + 1}k + \frac{\alpha}{\alpha + 1}q\right) \\ &\in (\alpha + 1)\text{qri}K = \text{qri}((\alpha + 1)K) = \text{qri}K, \end{aligned}$$

即 $K + \mathbb{R}_{++}q \subset \text{qri}K$. 从而由 K 的闭性可得

$$\text{cl}K + \mathbb{R}_{++}q = K + \mathbb{R}_{++}q \subset \text{qri}K \subset K. \quad (4.2)$$

因此, 利用 (4.2) 和文献 [27, 推论 3.3(a)] 可知结论成立. 证毕. $\square$

作为定理 4.1 的特殊情形, 下面建立基于序锥的拟内部和拓扑闭包的非线性分离定理.

定理 4.2 设 Y 是实分离局部凸拓扑线性空间, K 是 Y 中具有非空拟内部的真闭凸锥且 $q \in \text{qi}K$, 则对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$,

(i) $\{y \in Y \mid \varphi_{q,K}(y) < \lambda\} \subset \lambda q - \text{qi}K$;

(ii) $\{y \in Y \mid \varphi_{q,K}(y) \leq \lambda\} = \lambda q - \text{cl}K$.

证明 由引理 4.2 可得 $q \neq 0$. 进而类似于定理 4.1 的证明可知结论成立. 证毕. $\square$

注 4.1 定理 4.1 和 4.2 可用于研究序锥的拟相对内部或拟内部非空但拓扑内部甚至相对拓扑内部或相对代数内部可能为空的向量优化问题.

例 4.1 考虑问题 (VOP), 其中 X 是实线性空间, 像空间 Y 为实 Banach 空间 l^p ($1 \leq p < +\infty$), 其中 $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \in l^p$ 的范数定义为

$$\|y\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right)^{1/p}.$$

取序锥 $K = l_+^p = \{y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \in l^p \mid y_n \geq 0, n \in \mathbb{N}^+\}$, 则有

$$\text{qri}K = \text{qi}K = \{y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \in l^p \mid y_n > 0, n \in \mathbb{N}^+\}.$$

然而, $\text{int}K = \text{ri}K = \text{icr}K = \emptyset$.

注 4.2 定理 4.1(i) 和 4.2(i) 中的 “ $\subset$ ” 关系可能是严格的.

例 4.2 令 $Y = l^2$, $K = l_+^2 = \{y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \in Y \mid y_n \geq 0, n \in \mathbb{N}^+\}$. 显然, K 是具有非空拟相对内部和拟内部的真点闭凸锥且

$$\text{qri}K = \text{qi}K = \{y \in Y \mid y_n > 0, n \in \mathbb{N}^+\}.$$

取 $q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots)$. 显然, $q \in \text{qri}K = \text{qi}K$. 进一步, 当 $\lambda = 0$ 时, 取

$$\bar{y} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \dots\right).$$

显然, $-\bar{y} \in -\text{qri}K = -\text{qi}K$. 然而, 可以证明 $-\bar{y} \notin \{y \in Y \mid \varphi_{q,K}(y) < 0\}$. 事实上, 只需证明 $\varphi_{q,K}(-\bar{y}) \geq 0$, 即对任意的 $t < 0$, $-\bar{y} \notin tq - K$. 若不然, 假设存在 $t_0 < 0$, $-\bar{y} \in t_0q - K$, 则对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $-\frac{1}{3^n} \leq t_0 \frac{1}{2^n}$, 即

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \geq -t_0 > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

当 n 充分大时导致矛盾.

5 弱有效解的非线性标量化性质

本节主要利用前面建立的非线性分离定理给出问题 (VOP) 的几类弱有效解的非线性标量化性质. 考虑下面的标量化问题:

$$(P_{q,y}) \quad \min_{x \in S} \varphi_{q,K}(f(x) - y),$$

其中 $y \in Y$, $0 \neq q \in Y$ 且 S 是 Y 中的非空子集. 将 $\varphi_{q,K}(f(x) - y)$ 记为 $(\varphi_{q,K,y} \circ f)(x)$. 令 $\bar{x} \in S$. 若

$$(\varphi_{q,K,f(\bar{x})} \circ f)(x) \geq (\varphi_{q,K,f(\bar{x})} \circ f)(\bar{x}), \quad \forall x \in S,$$

则称 $\bar{x}$ 为标量化问题 $(P_{q,f(\bar{x})})$ 的最优解, 记为 $\bar{x} \in \text{Min}(\varphi_{q,K,f(\bar{x})} \circ f, S)$.

定理 5.1 设 Y 是实线性空间, $\{0\} \neq K$ 是 Y 中具非空相对代数内部的真点凸锥且 $q \in \text{icr}K$, 则

$$\bar{x} \in \text{WE}(f, S, \text{icr}K) \Leftrightarrow \bar{x} \in \text{Min}(\varphi_{q,K,f(\bar{x})} \circ f, S).$$

证明 假设 $\bar{x} \in \text{WE}(f, S, \text{icr}K)$, 则由定理 3.1 可得

$$\{y \in Y \mid \varphi_{q,K}(y) < 0\} = -\text{icr}K. \quad (5.1)$$

因为 $\bar{x} \in \text{WE}(f, S, \text{icr}K)$, 所以 $(f(S) - f(\bar{x})) \cap (-\text{icr}K) = \emptyset$. 从而利用 (5.1) 可得

$$(f(S) - f(\bar{x})) \cap \{y \in Y \mid \varphi_{q,K}(y) < 0\} = \emptyset,$$

即

$$(\varphi_{q,K,f(\bar{x})} \circ f)(x) = \varphi_{q,K}(f(x) - f(\bar{x})) \geq 0, \quad \forall x \in S. \quad (5.2)$$

此外, 由 $0 \in K$ 可知,

$$(\varphi_{q,K,f(\bar{x})} \circ f)(\bar{x}) = \varphi_{q,K}(0) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid tq \in K\} \leq 0.$$

因此, 结合 (5.2), 有

$$(\varphi_{q,K,f(\bar{x})} \circ f)(x) \geq (\varphi_{q,K,f(\bar{x})} \circ f)(\bar{x}).$$

这表明 $\bar{x} \in \text{Min}(\varphi_{q,K,f(\bar{x})} \circ f, S)$.

另一方面, 假设 $\bar{x} \in \text{Min}(\varphi_{q,K,f(\bar{x})} \circ f, S)$. 若 $\bar{x} \notin \text{WE}(f, S, \text{icr}K)$, 则存在 $\hat{x} \in S$ 使得

$$f(\hat{x}) - f(\bar{x}) \in -\text{icr}K.$$

因此, 利用定理 3.1 可知, 对任意的 $c \in \mathbb{R}$,

$$cq + f(\hat{x}) - f(\bar{x}) \in cq - \text{icr}K = \{y \in Y \mid \varphi_{q,K}(y) < c\}.$$

这表明 $\varphi_{q,K}(cq + f(\hat{x}) - f(\bar{x})) < c$. 令 $c = 0$, 可得

$$\varphi_{q,K}(f(\hat{x}) - f(\bar{x})) < 0. \quad (5.3)$$

此外, 由 $\bar{x} \in \text{Min}(\varphi_{q,K,f(\bar{x})} \circ f, S)$ 可知,

$$\varphi_{q,K}(f(\hat{x}) - f(\bar{x})) \geq \varphi_{q,K}(f(\bar{x}) - f(\bar{x})) = \varphi_{q,K}(0). \quad (5.4)$$

下面证明

$$\varphi_{q,K}(0) = 0. \quad (5.5)$$

事实上, 对任意的 $t < 0$, 可证明 $tq \notin K$. 若不然, 假定存在 $\hat{t} < 0$ 使得 $\hat{t}q \in K$. 从而, 由 $q \in \text{icr}K$ 可得

$$0 = \hat{t}q - \hat{t}q \in K + \mathbb{R}_{++}q \subset \text{icr}K,$$

即 $0 \in \text{icr}K$. 从而, 由相对代数内部的定义可得 $\text{cone}(K - 0) = K$ 是 Y 中的线性子空间. 因此,

$$K \cap (-K) = K \neq \{0\}.$$

这与 K 是点的相矛盾. 从而有

$$\varphi_{q,K}(0) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid tq \in K\} = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid tq \in K\} = 0,$$

即 (5.5) 成立. 因此, 由 (5.4) 可得 $\varphi_{q,K}(f(\hat{x}) - f(\bar{x})) \geq 0$. 这与 (5.3) 矛盾. 证毕. $\square$

注 5.1 若凸锥 K 不是点的, 则 $0 \notin \text{icr}K$ 不一定成立.

例 5.1 考虑实 Banach 空间 $Y = l^p$ ($1 \leq p < +\infty$). 令

$$K = \{y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \in l^p \mid y_{2n-1} = y_{2n}, n = 1, 2, \dots\}.$$

显然, K 是真凸锥且 K 是 Y 中的线性子空间. 从而, 对任意的 $k \in K$, $\text{cone}(K - k) = K - k = K$ 是 Y 中的线性子空间. 这表明 $\text{icr}K = K$. 显然, K 不是点的且 $0 \in K = \text{icr}K$.

定理 5.2 设 Y 是实拓扑线性空间, $\{0\} \neq K$ 是 Y 中具有非空相对拓扑内部的真点凸锥且 $q \in \text{ri}K$, 则 $\bar{x} \in \text{WE}(f, S, \text{ri}K) \Leftrightarrow \bar{x} \in \text{Min}(\varphi_{q,K,f(\bar{x})} \circ f, S)$.

证明 由 $\text{ri}K = \text{icr}K$ 和定理 5.1, 结论是显然的. 证毕. $\square$

定理 5.3 设 Y 是实分离局部凸拓扑线性空间, $\{0\} \neq K$ 是 Y 中具有非空拟相对内部的真点闭凸锥且 $q \in \text{qri}K$, 则

$$\bar{x} \in \text{WE}(f, S, \text{qri}K) \Rightarrow \bar{x} \in \text{Min}(\varphi_{q,K,f(\bar{x})} \circ f, S).$$

证明 结合引理 4.1 和定理 4.1, 类似于定理 5.1 的证明, 结论是显然的. 证毕. $\square$

注 5.2 若定理 5.3 中的假设条件 $q \in \text{qri}K$ 替换为 $q \in K \setminus \text{qri}K$, 结论可能不成立.

例 5.2 考虑问题 (VOP), 其中 $X = Y = l^p$, $K = l^p_+$, $f(x) = x$ 且

$$S = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \in l^p \mid x_2 = 0, x_n \leq 0, n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{2\}\}.$$

取 $q = (1, 0, 0, \dots) \in K$ 且 $\bar{x} = (0, 0, \dots) \in S$. K 是 Y 中具有非空拟相对内部的真点闭凸锥且

$$q \notin \text{qri}K = \{y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^p \mid y_n > 0, n \in \mathbb{N}^+\}.$$

显然, $(f(\bar{x}) - \text{qri}K) \cap f(S) = \emptyset$, 即 $\bar{x} \in \text{WE}(f, S, \text{qri}K)$. 然而, 存在 $\hat{x} = (-1, 0, 0, \dots) \in S$ 使得

$$\varphi_{q,K}(f(\hat{x}) - f(\bar{x})) = \varphi_{q,K}(f(\hat{x})) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid f(\hat{x}) \in tq - K\} \leq -1 < 0 = \varphi_{q,K}(f(\bar{x}) - f(\bar{x})).$$

从而 $\bar{x} \notin \text{Min}(\varphi_{q,K,f(\bar{x})} \circ f, S)$, 即定理 5.3 不成立.

注 5.3 若 $q \notin K$, 则定理 5.3 的结论也可能不成立.

例 5.3 考虑问题 (VOP), 其中 $X = Y = l^p$, $K = l^p_+$, $f(x) = x$ 且

$$S = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \in l^p \mid x_{2n-1} = -x_{2n}, n \in \mathbb{N}^+\}.$$

取 $q = (1, -1, 0, 0, \dots) \in Y$ 且 $\bar{x} = (0, 0, \dots) \in S$. 显然, K 是 Y 中具有非空拟相对内部的真点闭凸锥且 $q \notin K$. 此外, $(f(\bar{x}) - \text{qri}K) \cap f(S) = \emptyset$, 即 $\bar{x} \in \text{WE}(f, S, \text{qri}K)$. 然而, 存在 $\hat{x} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots) \in S$ 使得

$$\begin{aligned} \varphi_{q,K}(f(\hat{x}) - f(\bar{x})) &= \varphi_{q,K}(f(\hat{x})) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid f(\hat{x}) \in tq - K\} \\ &\leq -\frac{1}{2} < 0 = \varphi_{q,K}(f(\bar{x}) - f(\bar{x})). \end{aligned}$$

从而 $\bar{x} \notin \text{Min}(\varphi_{q,K,f(\bar{x})} \circ f, S)$, 即定理 5.3 的结论不成立.

定理 5.4 设 Y 是实分离局部凸拓扑线性空间, K 是 Y 中具有非空拟内部的真闭凸锥且 $q \in \text{qi}K$, 则 $\bar{x} \in \text{WE}(f, S, \text{qi}K) \Rightarrow \bar{x} \in \text{Min}(\varphi_{q,K,f(\bar{x})} \circ f, S)$.

证明 结合引理 4.2 和定理 4.2, 类似于定理 5.1 的证明, 结论是显然的. 证毕. $\square$

注 5.4 在例 5.2 和 5.3 中, 由于 $\text{qi}K = \text{qri}K = \{y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \in l^p \mid y_n > 0, n \in \mathbb{N}^+\}$, 故这两个例子也表明, 若 $q \in K \setminus \text{qi}K$ 或 $q \notin K$, 则定理 5.4 的结论可能不成立.

6 结论

本文利用 Minkowski 型非线性标量化泛函建立了基于序锥的相对代数内部与向量闭包、相对拓扑内部与拓扑闭包以及拟相对内部与拓扑闭包的一些新的非线性分离定理. 这些新的分离定理不必依

赖于序锥的拓扑内部, 甚至相对拓扑内部或相对代数内部的非空性, 克服了经典的非线性分离定理的不足. 同时, 利用这些新的分离定理获得了向量优化问题相应弱有效解的一些非线性标量化性质. 值得注意的是, 如何在适当的假设条件下获得定理 4.1(i) 和 4.2(i) 中的等式关系, 以及如何利用这些分离定理进一步研究向量优化问题解的一些其他性质等, 将是非常有意义的研究课题.

参考文献

- 1 Luc D T. Theory of Vector Optimization. Berlin: Springer-Verlag, 1989
- 2 Jahn J. Vector Optimization: Theory, Applications and Extensions. New York: Springer-Verlag, 2004
- 3 Chen G Y, Huang X X, Yang X Q. Vector Optimization: Set-Valued and Variational Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 2005
- 4 Yang X M, Yang X Q, Chen G Y. Theorems of the alternative and optimization with set-valued maps. J Optim Theory Appl, 2000, 107: 627–640
- 5 Yang X M, Li D, Wang S Y. Near-subconvexlikeness in vector optimization with set-valued functions. J Optim Theory Appl, 2001, 110: 413–427
- 6 Ruíz-Canales P, Rufián-Lizana A. A characterization of weakly efficient points. Math Program, 1998, 68: 205–212
- 7 Zhao K Q, Yang X M. Characterizations of efficient and weakly efficient points in nonconvex vector optimization. J Global Optim, 2015, 61: 575–590
- 8 Flores-Bazán F. Ideal, weakly efficient solutions for vector optimization problems. Math Program, 2002, 93: 453–475
- 9 Rong W D, Wu Y N. ε -weak minimal solutions of vector optimization problems with set-valued maps. J Optim Theory Appl, 2000, 106: 569–579
- 10 Zhao K Q, Yang X M, Peng J W. Weak E -optimal solution in vector optimization. Taiwanese J Math, 2013, 17: 1287–1302
- 11 Rockafellar R T. Convex Analysis. New Jersey: Princeton University Press, 1970
- 12 Holmes R B. Geometric Functional Analysis and Its Applications. Graduate Texts in Mathematics, vol. 24. New York: Springer-Verlag, 1975
- 13 Adán M, Novo V. Weak efficiency in vector optimization using a closure of algebraic type under cone-convexlikeness. European J Oper Res, 2003, 149: 641–653
- 14 Bao T Q, Mordukhovich B S. Relative Pareto minimizers for multiobjective problems: Existence and optimality conditions. Math Program, 2010, 122: 301–347
- 15 Limber M A, Goodrich R K. Quasi interiors, Lagrange multipliers, and L^p spectral estimation with lattice bounds. J Optim Theory Appl, 1993, 78: 143–161
- 16 Borwein J, Goebel R. Notions of relative interior in Banach spaces. J Math Sci (N Y), 2003, 115: 2542–2553
- 17 Borwein J M, Lewis A S. Partially finite convex programming, I: Quasi relative interiors and duality theory. Math Program, 1992, 57: 15–48
- 18 Boţ R I, Csetnek E R, Wanka G. Regularity conditions via quasi-relative interior in convex programming. SIAM J Optim, 2008, 19: 217–233
- 19 Boţ R I, Csetnek E R. Regularity conditions via generalized interiority notions in convex optimization: New achievements and their relation to some classical statements. Optimization, 2012, 61: 35–65
- 20 Jeyakumar V, Wolkowicz H. Generalizations of Slater's constraint qualification for infinite convex programs. Math Program, 1992, 57: 85–101
- 21 Zhou Z A, Yang X M. Optimality conditions of generalized subconvexlike set-valued optimization problems based on the quasi-relative interior. J Optim Theory Appl, 2011, 150: 327–340
- 22 Daniele P, Giuffrè S, Icone G, et al. Infinite dimensional duality and applications. Math Ann, 2007, 339: 221–239
- 23 Göpfert A, Tammer C, Riahi H, et al. Variational Methods in Partially Ordered Spaces. New York: Springer-Verlag, 2003
- 24 Tammer C, Zălinescu C. Lipschitz properties of the scalarization function and applications. Optimization, 2010, 59: 305–319
- 25 Gutiérrez C, Jiménez B, Novo V. A unified approach and optimality conditions for approximate solutions of vector optimization problems. SIAM J Optim, 2006, 17: 688–710
- 26 Zhao K Q, Xia Y M, Yang X M. Nonlinear scalarization characterizations of E -efficiency in vector optimization. Taiwanese J Math, 2015, 19: 455–466

- 27 Flores-Bazán F, Hernández E. A unified vector optimization problem: Complete scalarizations and applications. *Optimization*, 2011, 60: 1399–1419
- 28 Flores-Bazán F, Flores-Bazán F, Laengle S. Characterizing efficiency on infinite-dimensional commodity spaces with ordering cones having possibly empty interior. *J Optim Theory Appl*, 2015, 164: 455–478
- 29 史树中. 凸分析. 上海: 上海科学技术出版社, 1990
- 30 Zălinescu C. *Convex Analysis in General Vector Spaces*. Singapore: World Scientific, 2002

New nonlinear separation theorems and applications in vector optimization

ZHAO KeQuan, RONG WeiDong & YANG XinMin

Abstract By means of the Minkowski-type nonlinear scalarization functional, in this paper, we establish some nonlinear separation theorems via relative algebraic interior and vector closure in a general real linear space, via relative topological interior and topological closure in a real topological linear space and via quasi relative interior and topological closure in a real separated locally convex topological linear space, respectively. These new separation theorems can be applied to study those vector optimization problems with the ordering cones having possibly empty topological interior and even relative topological interior or relative algebraic interior. As their applications, we give some nonlinear scalarization characterizations of the corresponding weak efficient solutions of vector optimization problems. Moreover, we also present some concrete examples to illustrate the main results in some infinite dimensional spaces.

Keywords nonlinear separation theorems, relative algebraic interior, relative topological interior, quasi relative interior, weak efficient solutions, vector optimization

MSC(2010) 90C26, 90C29, 90C30, 90C46

doi: 10.1360/N012014-00235