三角范畴中 Gorenstein 对象的稳定性

王占平*, 郭寿桃, 梁春丽

西北师范大学数学与统计学院, 兰州 730070

E-mail: wangzp@nwnu.edu.cn, 1498238553@qq.com, 894508049@qq.com

收稿日期: 2015-09-16; 接受日期: 2015-12-29; 网络出版日期: 2016-07-04; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11561061 和 11261050) 资助项目

摘要 设 $\mathcal{C}$ 是带有三角真类 ξ 的三角范畴. Asadollahi 和 Salarian 引入并研究了 ξ -Gorenstein 投射和 ξ -Gorenstein 内射对象, 并将 Gorenstein 同调代数发展到了三角范畴 $\mathcal{C}$ 中. 本文继续研究三角范畴的 Gorenstein 同调性质. 将对 ξ -Gorenstein 投射对象给出一些等价刻画, 作为应用, 得到了所有的 ξ -Gorenstein 投射对象构成的子范畴 $\mathcal{GP}(\xi)$ 有很好的稳定性.

关键词 三角范畴 ξ -Gorenstein 投射对象 稳定性

MSC (2010) 主题分类 18E30, 18G25

1 引言

20 世纪 60 年代初, Verdier^[1] 和 Puppe^[2] 分别将三角范畴引入代数几何和代数拓扑中. 目前, 三角范畴已经成为许多数学领域中不可缺少的一部分, 如代数几何、稳定同伦理论和表示论, 参见文献 [3–5]. Neeman^[6] 对三角范畴给出了详细的介绍.

设 $\mathcal{C}$ 是带有三角 Δ 的一个三角范畴. Beligiannis^[7] 在三角范畴 $\mathcal{C}$ 上发展了相对同调代数, 这与 Quillen 在正合范畴上的相对同调代数是平行的. 他将 Δ 中的一类满足一定条件的三角 ξ 称为三角真类, 从而引入了 ξ -投射对象、 ξ -投射维数及它们的对偶概念, 并研究了它们的性质.

Auslander 和 Bridger^[8] 在交换 Noether 环上将有限生成投射模推广到 Gorenstein 维数为零的有限生成模. 进而, Enochs 和 Jenda^[9] 针对一般环上的任意模引入了 Gorenstein 投射模的概念, 这是对 Gorenstein 维数为零的有限生成模的一种推广. 对偶地, 他们定义了 Gorenstein 内射模. 从此, Gorenstein 同调代数受到很多专家学者的关注, 参见文献 [10–13] 等.

作为对 Gorenstein 维数为零的模的另一种推广, Beligiannis^[14] 在一个加法范畴 $\mathcal{C}$ 中定义了 $\mathcal{X}$ -Gorenstein 对象, 其中 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个共变有限子范畴. Asadollahi 和 Salarian^[15] 进一步扩展了这个理论, 他们引入并研究了 ξ -Gorenstein 投射和 ξ -Gorenstein 内射对象, 并且通过对照 Enochs 和 Jenda^[12] 在 Abel 范畴中所做的结论, 定义了三角范畴中对象的 ξ -Gorenstein 投射维数和 ξ -Gorenstein 内射维数. Chang 和 Gao^[16] 引入了 ξ -Gorenstein 投射对象的一种推广形式, 即 (n, m) -强 ξ -Gorenstein 投射对象, 并研究了这类对象的 ξ -Gorenstein 投射维数.

英文引用格式: Wang Z P, Guo S T, Liang C L. Stability of Gorenstein objects in triangulated categories (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 349–356, doi: 10.1360/012016-3

设 $\mathcal{A}$ 是一个 Abel 范畴, $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{A}$ 的加法全子范畴. Sather-Wagstaff 等^[17] 引入了 Gorenstein 范畴 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$, 定义为 $\mathcal{G}(\mathcal{X}) = \{A \in \mathcal{A} \mid \text{存在 } \mathcal{X} \text{ 中对象构成的正合序列 } \mathbb{X} : \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow \cdots, \text{ 且它是 } \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -) \text{ 和 } \text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{X}) \text{ 正合的, 使得 } A \cong \text{Im}(X_0 \rightarrow X^0)\}$. 令 $\mathcal{G}^0(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$, $\mathcal{G}^1(\mathcal{X}) = \mathcal{G}(\mathcal{X})$, 归纳地, 对任意 $n \geq 1$, $\mathcal{G}^{n+1}(\mathcal{X}) = \mathcal{G}^n(\mathcal{G}(\mathcal{X}))$. 他们证明了, 当 $\mathcal{X}$ 是自正交类时, 对任意 $n \geq 1$, 都有 $\mathcal{G}^n(\mathcal{X}) = \mathcal{G}(\mathcal{X})$. 同时, 他们提出了一个问题: 对任意子范畴 $\mathcal{X}$, 是否有 $\mathcal{G}^2(\mathcal{X}) = \mathcal{G}(\mathcal{X})$ 成立? 参见文献 [17, 推论 4.10 和问题 5.8]. 最近, Huang^[18] 肯定地回答了这个问题. 这表明 $\mathcal{G}(\mathcal{X})$, 特别地, 所有 Gorenstein 投射对象构成的子范畴 $\mathcal{GP}(\mathcal{A})$, 有很好的稳定性. Kong 和 Zhang^[19] 用不同的方法对这种稳定性给出了证明. 近年来, 其他 Gorenstein 模类的稳定性问题被许多学者广泛研究, 参见文献 [20–24].

受以上结果的启发, 我们考虑所有的 ξ -Gorenstein 投射对象构成的子范畴 $\mathcal{GP}(\xi)$ 的稳定性, ξ -Gorenstein 投射对象是由 Asadollahi 和 Salarian^[15] 引入的. 令 $\mathcal{G}^0\mathcal{P}(\xi) = \mathcal{P}(\xi)$, $\mathcal{G}^1\mathcal{P}(\xi) = \mathcal{GP}(\xi)$, 归纳地, 对任意 $n \geq 1$, $\mathcal{G}^{n+1}\mathcal{P}(\xi) = \mathcal{G}^n(\mathcal{GP}(\xi))$. 自然地, 我们有下面的问题.

问题 1.1 对任意 $n \geq 1$, 是否有 $\mathcal{G}^n\mathcal{P}(\xi) = \mathcal{GP}(\xi)$ 成立?

为了回答这个问题, 首先给出 ξ -Gorenstein 投射对象的一些等价刻画 (见定理 3.3):

定理 A 设 $\mathcal{C}$ 是一个有足够多 ξ -投射对象的三角范畴, $A \in \mathcal{C}$. 则以下叙述等价:

- (1) A 是 ξ -Gorenstein 投射的;
- (2) A 有一个 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的 ξ -投射分解和 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的 ξ -投射余分解;
- (3) 存在 ξ 中 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的三角

$$K_{n+1} \rightarrow P_n \rightarrow K_n \rightarrow \Sigma K_{n+1},$$

使得 $P_n \in \mathcal{P}(\xi)$ 且 $K_0 = A$;

- (4) 存在 ξ 中 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{GP}(\xi))$ -正合和 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{GP}(\xi), -)$ -正合的三角

$$K_{n+1} \rightarrow G_n \rightarrow K_n \rightarrow \Sigma K_{n+1},$$

使得 $G_n \in \mathcal{GP}(\xi)$ 且 $K_0 = A$;

- (5) 存在 ξ 中 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{GP}(\xi))$ -正合的三角

$$K_{n+1} \rightarrow G_n \rightarrow K_n \rightarrow \Sigma K_{n+1},$$

使得 $G_n \in \mathcal{GP}(\xi)$ 且 $K_0 = A$;

- (6) 存在 ξ 中 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的三角

$$K_{n+1} \rightarrow G_n \rightarrow K_n \rightarrow \Sigma K_{n+1},$$

使得 $G_n \in \mathcal{GP}(\xi)$ 且 $K_0 = A$;

- (7) 存在 ξ 中 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{GP}(\xi), -)$ -正合和 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{GP}(\xi))$ -正合的三角

$$A \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow \Sigma A,$$

使得 $G \in \mathcal{GP}(\xi)$;

- (8) 存在 ξ 中 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{GP}(\xi))$ -正合的三角

$$A \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow \Sigma A,$$

使得 $G \in \mathcal{GP}(\xi)$;

(9) 存在 ξ 中 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的三角

$$A \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow \Sigma A,$$

使得 $G \in \mathcal{GP}(\xi)$.

作为对定理 A 的应用, 我们有下列的结果 (见定理 3.4), 这个结果可以与文献 [17, 推论 4.10] 和 [18, 定理 4.1] 作比较.

定理 B 设 $\mathcal{C}$ 是一个有足够多 ξ -投射对象的三角范畴. 则对任意 $n \geq 1$, $\mathcal{G}^n \mathcal{P}(\xi) = \mathcal{GP}(\xi)$.

定理 B 对上述问题给出了肯定回答, 这表明, 所有的 ξ -Gorenstein 投射对象构成的子范畴也有很好的稳定性.

2 预备知识

本节主要回顾本文用到的有关三角范畴的一些定义和基本性质, 相关术语参见文献 [7, 15, 25, 26].

设 $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \Sigma, \Delta)$ 是一个三角范畴, 其中 $\mathcal{C}$ 是一个加法范畴, Σ 是 $\mathcal{C}$ 的一个自等价, Δ 是一类形如 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A$ 的六元组, 其中的对象 A, B, C 和态射 f, g, h 满足一些公理. 文献 [7, 命题 2.1] 给出了八面体公理的一些等价描述. 在某些情形中, 我们用这些等价描述代替八面体公理会更简洁.

定义 2.1 [7, 定义 2.2] 设 $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \Sigma, \Delta)$ 是一个三角范畴. 称 $\xi (\subseteq \Delta)$ 是三角真类, 如果 ξ 满足下列条件:

- (1) ξ 关于同构和有限余积封闭且 $\Delta_0 \subseteq \xi \subseteq \Delta$;
- (2) ξ 关于平移封闭且是饱和的;
- (3) ξ 关于基变换和余基变换封闭.

显然, $\mathcal{C}$ 中的所有可裂的三角构成的类 Δ_0 和所有三角的类 Δ 都是三角真类. 文献 [7, 例 2.3] 给出了一些有趣的三角真类的例子.

本文中, $\mathcal{C}$ 是带有三角真类 ξ 的三角范畴.

定义 2.2 [7, 定义 4.1] 称对象 $P \in \mathcal{C}$ ($I \in \mathcal{C}$) 是 ξ -投射的 (ξ -内射的), 如果对 ξ 中的任意三角 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \Sigma A$ 都有 Abel 群的序列 $0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, C) \rightarrow 0$ ($0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, I) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, I) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, I) \rightarrow 0$) 是正合的.

从定义容易看出, 所有的 ξ -投射对象构成的子范畴 $\mathcal{P}(\xi)$ 和所有的 ξ -内射对象构成的子范畴 $\mathcal{I}(\xi)$ 是全的、加法的和 Σ -稳定的, 并且关于同构和直和项封闭. 称范畴 $\mathcal{C}$ 有足够多 ξ -投射对象 (ξ -内射对象), 如果对 $\mathcal{C}$ 中的任意对象 A , 存在 ξ 中的三角 $K \rightarrow P \rightarrow A \rightarrow \Sigma K$ ($A \rightarrow I \rightarrow L \rightarrow \Sigma A$), 其中 $P \in \mathcal{P}(\xi)$ ($I \in \mathcal{I}(\xi)$).

下面的引理来自于文献 [7, 引理 4.2(iii)].

引理 2.3 设 $\mathcal{C}$ 有足够多 ξ -投射对象. 则三角 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \Sigma A$ 在 ξ 中当且仅当对任意的 $P \in \mathcal{P}(\xi)$, 诱导序列 $0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, C) \rightarrow 0$ 是正合的.

ξ -正合序列 $\mathbb{X}$ 是指, $\mathcal{C}$ 中序列

$$\cdots \rightarrow X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{d_0} X_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} X_{-2} \rightarrow \cdots$$

使得对每个 $n \in \mathbb{Z}$, 存在 ξ 中的三角 $K_{n+1} \xrightarrow{f_n} X_n \xrightarrow{g_n} K_n \xrightarrow{h_n} \Sigma K_{n+1}$, 且对任意 n , 其微分定义为 $d_n = f_{n-1}g_n$.

设 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个加法全子范畴. 称 ξ 中的三角 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \Sigma A$ 是 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{X})$ - $(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X}, -))$ -正合的, 如果对任意 $X \in \mathcal{X}$, 都有 Abel 群的序列 $0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \rightarrow 0$ ($0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C) \rightarrow 0$) 是正合的.

定义 2.4 ^[15] 称 $\mathcal{C}$ 中的序列

$$\mathbb{P} : \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} P_{-1} \rightarrow \cdots$$

是一个完全 ξ -投射分解, 如果对任意 n , $P_n \in \mathcal{P}(\xi)$, 且存在 ξ 中 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的三角

$$K_{n+1} \xrightarrow{f_n} P_n \xrightarrow{g_n} K_n \xrightarrow{h_n} \Sigma K_{n+1},$$

对任意 n , 其微分定义为 $d_n = f_{n-1}g_n$, 即 $\mathbb{P}$ 是 ξ -投射对象的 ξ -正合序列, 且是 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的. 此时, 对任意整数 n , 称对象 K_n 是 ξ -Gorenstein 投射的 (简称为 ξ - $\mathcal{G}$ 投射).

对偶地, 可以定义完全 ξ -内射分解和 ξ -Gorenstein 内射 (简称为 ξ - $\mathcal{G}$ 内射) 对象.

我们用 $\mathcal{GP}(\xi)$ 和 $\mathcal{GI}(\xi)$ 分别表示 $\mathcal{C}$ 中的所有 ξ - $\mathcal{G}$ 投射和 ξ - $\mathcal{G}$ 内射对象构成的子范畴. 显然, $\mathcal{P}(\xi) \subseteq \mathcal{GP}(\xi)$, $\mathcal{I}(\xi) \subseteq \mathcal{GI}(\xi)$; $\mathcal{GP}(\xi)$ 和 $\mathcal{GI}(\xi)$ 是全的、加法的、 Σ -稳定的, 且关于同构和直和项封闭.

3 主要结果

本节只研究 ξ - $\mathcal{G}$ 投射对象的情形, 对 ξ - $\mathcal{G}$ 内射对象的研究是对偶的. 设 $A \in \mathcal{C}$. A 的 ξ - $\mathcal{G}$ 投射分解是指, $\mathcal{C}$ 中的 ξ -正合序列 $\cdots \rightarrow G_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_1 \rightarrow G_0 \rightarrow A \rightarrow 0$ 使得对任意 $n \geq 0$, 有 $G_n \in \mathcal{GP}(\xi)$. 注意到, 此定义与文献 [15, 定义 4.2] 有所不同.

引理 3.1 设 $\mathcal{C}$ 是有足够多 ξ - $\mathcal{G}$ 投射对象的三角范畴, $A \in \mathcal{C}$. 则 A 有一个 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的 ξ -投射分解当且仅当 A 有一个 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的 ξ - $\mathcal{G}$ 投射分解.

证明 因为 $\mathcal{P}(\xi) \subseteq \mathcal{GP}(\xi)$, 所以充分性是显然的. 假设 A 有一个 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的 ξ - $\mathcal{G}$ 投射分解. 则存在 ξ 中 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的三角 $\delta : B \rightarrow G_0 \rightarrow A \rightarrow \Sigma B$, 其中 $G_0 \in \mathcal{GP}(\xi)$ 且 B 有一个 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的 ξ - $\mathcal{G}$ 投射分解. 因为 $G_0 \in \mathcal{GP}(\xi)$, 所以存在 ξ 中的三角 $\eta : G'_0 \rightarrow P_0 \rightarrow G_0 \rightarrow \Sigma G'_0$, 使得 $G'_0 \in \mathcal{GP}(\xi)$, $P_0 \in \mathcal{P}(\xi)$, 且它是 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的. 由基变换, 我们有

$$\begin{array}{ccccccc} & & \Sigma^{-1}A & \xlongequal{\quad} & \Sigma^{-1}A & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \eta' : & G'_0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & B & \longrightarrow \Sigma G'_0 \\ & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & \parallel \\ \eta : & G'_0 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & G_0 & \longrightarrow \Sigma G'_0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & A & \xlongequal{\quad} & A & \end{array}$$

因为 ξ 关于基变换封闭, 所以有 $\eta' \in \xi$. 用函子 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}(\xi), -)$ 作用于上面的交换图, 我们有

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \vdots & & \downarrow & & \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}(\xi), \eta') : 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}(\xi), G'_0) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}(\xi), L) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}(\xi), B) \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}(\xi), \eta) : 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}(\xi), G'_0) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}(\xi), P_0) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}(\xi), G_0) \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}(\xi), A) & \xlongequal{\quad} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}(\xi), A) \\
 & & & & \vdots & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0.
 \end{array}$$

由蛇引理得, 竖的第二列是正合的, 且由引理 2.3 得

$$L \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow \Sigma L \in \xi.$$

对任意 $Q \in \mathcal{P}(\xi)$, 用 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Q)$ 作用于上面的基变换图, 我们有

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\eta, Q) & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\eta', Q) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\delta, Q) : 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Q) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G_0, Q) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, Q) \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\delta', Q) : 0 & \cdots \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Q) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P_0, Q) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(L, Q) \cdots \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G'_0, Q) & \xlongequal{\quad} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G'_0, Q) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0.
 \end{array}$$

由蛇引理得, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\delta', Q)$ 和 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\eta', Q)$ 是正合的. 因为 B 有一个 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的 ξ - $\mathcal{G}$ 投射分解, 所以存在 ξ 中 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的三角

$$C \rightarrow G_1 \rightarrow B \rightarrow \Sigma C,$$

其中, $G_1 \in \mathcal{GP}(\xi)$, 且 C 有一个 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的 ξ - $\mathcal{G}$ 投射分解. 由基变换及上面同样的方法, 我们有

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \zeta' & & \zeta & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & C & \xlongequal{\quad} & C & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \epsilon' : & G'_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow \Sigma G'_0 \\
 & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & \parallel \\
 \epsilon : & G'_0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & B & \longrightarrow \Sigma G'_0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & \Sigma C & \xlongequal{\quad} & \Sigma C &
 \end{array}$$

使得 ϵ' 和 ζ' 都在 ξ 中. 因为 $G'_0 \in \mathcal{GP}(\xi)$, $G_1 \in \mathcal{GP}(\xi)$, 所以, 由文献 [15, 定理 3.11] 得 $M \in \mathcal{GP}(\xi)$. 因此, L 有一个 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ - 正合的 ξ - $\mathcal{G}$ 投射分解. 注意到三角 $L \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow \Sigma L$ 是 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ - 正合的. 重复上面的过程, 可得 A 有一个 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ - 正合的 ξ - 投射分解. $\square$

A 的 ξ - 投射 (ξ - $\mathcal{G}$ 投射) 余分解是指, $\mathcal{C}$ 中的一个 ξ - 正合序列 $0 \rightarrow A \rightarrow X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow \dots$ 使得对任意 $n \geq 0$, 有 $X^n \in \mathcal{P}(\xi)$ ($X^n \in \mathcal{GP}(\xi)$).

引理 3.2 设 $\mathcal{C}$ 是有足够多 ξ - 投射对象的三角范畴, $A \in \mathcal{C}$. 则 A 有一个 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ - 正合的 ξ - 投射余分解当且仅当 A 有一个 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ - 正合的 ξ - $\mathcal{G}$ 投射余分解. $\square$

证明 与引理 3.1 的证明完全对偶.

定理 3.3 设 $\mathcal{C}$ 是有足够多 ξ - 投射对象的三角范畴, $A \in \mathcal{C}$. 则以下叙述等价:

- (1) A 是 ξ - $\mathcal{G}$ 投射对象;
- (2) A 有一个 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ - 正合的 ξ - 投射分解和 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ - 正合的 ξ - 投射余分解;
- (3) 存在 ξ 中 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ - 正合的三角

$$K_{n+1} \rightarrow P_n \rightarrow K_n \rightarrow \Sigma K_{n+1},$$

使得 $P_n \in \mathcal{P}(\xi)$ 且 $K_0 = A$;

- (4) 存在 ξ 中 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{GP}(\xi))$ - 正合和 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{GP}(\xi), -)$ - 正合的三角

$$K_{n+1} \rightarrow G_n \rightarrow K_n \rightarrow \Sigma K_{n+1},$$

使得 $G_n \in \mathcal{GP}(\xi)$ 且 $K_0 = A$;

- (5) 存在 ξ 中 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{GP}(\xi))$ - 正合的三角

$$K_{n+1} \rightarrow G_n \rightarrow K_n \rightarrow \Sigma K_{n+1},$$

使得 $G_n \in \mathcal{GP}(\xi)$ 且 $K_0 = A$;

- (6) 存在 ξ 中 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ - 正合的三角

$$K_{n+1} \rightarrow G_n \rightarrow K_n \rightarrow \Sigma K_{n+1},$$

使得 $G_n \in \mathcal{GP}(\xi)$ 且 $K_0 = A$;

(7) 存在 ξ 中 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{GP}(\xi), -)$ -正合和 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{GP}(\xi))$ -正合的三角

$$A \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow \Sigma A,$$

使得 $G \in \mathcal{GP}(\xi)$;

(8) 存在 ξ 中 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{GP}(\xi))$ -正合的三角

$$A \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow \Sigma A,$$

使得 $G \in \mathcal{GP}(\xi)$;

(9) 存在 ξ 中 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{P}(\xi))$ -正合的三角

$$A \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow \Sigma A,$$

使得 $G \in \mathcal{GP}(\xi)$.

证明 (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) 由 ξ - $\mathcal{G}$ 投射对象的定义可得.

(1) $\Rightarrow$ (4) 设 A 是 $\mathcal{C}$ 中的 ξ - $\mathcal{G}$ 投射对象. 考虑三角

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{1} A \rightarrow 0 \quad \text{和} \quad A \xrightarrow{1} A \rightarrow 0 \rightarrow \Sigma A.$$

因为 ξ 是真类, 所以 $\Delta_0 \subseteq \xi$. 因此, 上面的两个三角都在 ξ 中. 容易看出, 它们是 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathcal{GP}(\xi))$ -正合和 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{GP}(\xi), -)$ -正合的三角.

(4) $\Rightarrow$ (5) 和 (5) $\Rightarrow$ (6) 是显然的.

(6) $\Rightarrow$ (1) 由引理 3.1 和 3.2 可得.

(1) $\Rightarrow$ (7) 设 A 是 $\mathcal{C}$ 中的 ξ - $\mathcal{G}$ 投射对象. 考虑可裂三角

$$\delta: A \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} A \oplus A \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} A \xrightarrow{0} \Sigma A.$$

因为 ξ 是真类, $\Delta_0 \subseteq \xi$. 因此 $\delta \in \xi$. 对任意 $Q \in \mathcal{GP}(\xi)$, 用函子 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, -)$ 和 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Q)$ 作用于上述三角, 得下述正合序列:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Q) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \oplus A, Q) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Q) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, A \oplus A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, A) \rightarrow 0.$$

由文献 [15, 定理 3.11] 可得 $A \oplus A \in \mathcal{GP}(\xi)$.

(7) $\Rightarrow$ (8) $\Rightarrow$ (9) $\Rightarrow$ (1) 是显然的. □

我们用 $\mathcal{GP}(\xi)$ 表示所有的 ξ - $\mathcal{G}$ 投射对象构成的子范畴. 令 $\mathcal{G}^0\mathcal{P}(\xi) = \mathcal{P}(\xi)$, $\mathcal{G}^1\mathcal{P}(\xi) = \mathcal{GP}(\xi)$, 归纳地, 对任意 $n \geq 1$, $\mathcal{G}^{n+1}\mathcal{P}(\xi) = \mathcal{G}^n(\mathcal{GP}(\xi))$. 作为定理 3.3 的应用, 我们得到下述定理.

定理 3.4 设 $\mathcal{C}$ 是有足够多 ξ -投射对象的三角范畴. 则对任意 $n \geq 1$, $\mathcal{G}^n\mathcal{P}(\xi) = \mathcal{GP}(\xi)$.

证明 容易看出, $\mathcal{P}(\xi) \subseteq \mathcal{GP}(\xi) \subseteq \mathcal{G}^2\mathcal{P}(\xi) \subseteq \mathcal{G}^3\mathcal{P}(\xi) \subseteq \dots$ 是 $\mathcal{C}$ 的子范畴的一个升链. 由定理 3.3(1) 和 3.3(4) 的等价性, 有 $\mathcal{G}^2\mathcal{P}(\xi) = \mathcal{GP}(\xi)$. 对 n 进行归纳, 可得结论成立. □

致谢 感谢审稿人的仔细审阅.

参考文献

- 1 Verdier J L. Catégories dérivées: État 0. In: Lecture Notes in Mathematics, vol. 569. Berlin: Springer-Verlag, 1977, 262–311
- 2 Puppe D. On the formal structure of stable homotopy theory. In: Colloquium on Algebraic Topology. Aarhus: Aarhus Universitet Matematisk Institut, 1962, 65–71
- 3 Beilinson A A, Bernstein J, Deligne P. Perverse sheaves: Analysis and topology on singular space, I (Luminy, 1981). *Astérisque*, 1982, 100: 5–171
- 4 Happel D. Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite-Dimensional Algebras. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 119. Cambridge: Cambridge University Press, 1988
- 5 Margolis H R. Spectra and the Steenrod Algebra. Amsterdam: North-Holland Math Library, 1983
- 6 Neeman A. Triangulated Categories. Princeton: Princeton University Press, 2001
- 7 Beligiannis A. Relative homological algebra and purity in triangulated categories. *J Algebra*, 2000, 227: 268–361
- 8 Auslander M, Bridger M. Stable Module Theory. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 94. Providence: Amer Math Soc, 1969
- 9 Enochs E E, Jenda O M G. Gorenstein injective and projective modules. *Math Z*, 1995, 220: 611–633
- 10 Avramov L L, Martsinkovsky A. Absolute, relative, and Tate cohomology of modules of finite Gorenstein dimensions. *Proc Lond Math Soc* (3), 2002, 85: 393–440
- 11 Christensen L W. Gorenstein Dimensions. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1747. Berlin: Springer-Verlag, 2000
- 12 Enochs E E, Jenda O M G. Relative Homological Algebra. New York: Walter De Gruyter, 2000
- 13 Holm H. Gorenstein homological dimensions. *J Pure Appl Algebra*, 2004, 189: 167–193
- 14 Beligiannis A. The homological theory of contravariantly finite subcategories: Auslander-Buchweitz contexts, Gorenstein categories and (co-) stabilization. *Comm Algebra*, 2000, 28: 4547–4596
- 15 Asadollahi J, Salarian S. Gorenstein objects in triangulated categories. *J Algebra*, 2004, 281: 264–286
- 16 Chang W W, Gao N. (n, m) -strongly ξ -Gorenstein projective objects in triangulated categories. *Commun Appl Math Comput*, 2014, 28: 166–174
- 17 Sather-Wagstaff S, Sharif T, White D. Stability of Gorenstein categories. *J Lond Math Soc* (2), 2008, 77: 481–502
- 18 Huang Z Y. Proper resolutions and Gorenstein categories. *J Algebra*, 2013, 393: 142–169
- 19 Kong F, Zhang P. From CM-finite to CM-free. *J Pure Appl Algebra*, 2016, 220: 782–801
- 20 Bouchiba S, Khaloui M. Stability of Gorenstein flat modules. *Glasg Math J*, 2012, 54: 169–175
- 21 Bouchiba S. Stability of Gorenstein classes of modules. *Algebra Colloq*, 2013, 20: 623–636
- 22 Wang Z P, Liu Z K. Stability of strongly Gorenstein flat modules. *Vietnam J Math*, 2014, 42: 171–178
- 23 Xu A M, Ding N Q. On stability of Gorenstein categories. *Comm Algebra*, 2013, 41: 3793–3804
- 24 Yang G, Liu Z K. Stability of Gorenstein flat categories. *Glasg Math J*, 2012, 54: 177–191
- 25 Asadollahi J, Salarian S. Tate cohomology and Gorensteinness for triangulated categories. *J Algebra*, 2006, 299: 480–502
- 26 Murfet D. Triangulated categories I. [Http://therisingsea.org/notes/TriangulatedCategories.pdf](http://therisingsea.org/notes/TriangulatedCategories.pdf), 2007

Stability of Gorenstein objects in triangulated categories

WANG ZhanPing, GUO ShouTao & LIANG ChunLi

Abstract Let $\mathcal{C}$ be a triangulated category with a proper class ξ of triangles. Asadollahi and Salarian introduced and studied ξ -Gorenstein projective and ξ -Gorenstein injective objects, and developed Gorenstein homological algebra in $\mathcal{C}$. In this paper, we further study Gorenstein homological properties for a triangulated category. We give some equivalent characterizations of ξ -Gorenstein projective objects, and show that the subcategory $\mathcal{GP}(\xi)$ of all ξ -Gorenstein projective objects has a nice stability, i.e., an iteration of the procedure used to define the ξ -Gorenstein projective objects yields exactly the ξ -Gorenstein projective objects.

Keywords triangulated category, ξ -Gorenstein projective object, stability

MSC(2010) 18E30, 18G25

doi: 10.1360/012016-3