三元系的大集与超大集

献给万哲先教授 90 华诞

康庆德^{1*}, 袁兰党²

1. 河北师范大学数学研究所, 石家庄 050024;

2. 河北师范大学数学与信息科学学院, 石家庄 050024

E-mail: qd_kang@163.com, yld6@163.com

收稿日期: 2016-07-29; 接受日期: 2016-11-29; 网络出版日期: 2017-03-29; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11171089) 资助项目

摘要 组合设计中的大集问题有着悠久的历史 and 重要的应用. 但囿于其难度, 长期进展很慢. 近 30 年来, 在一些新方法推动下, 大集研究呈现了良好的态势. 本文综述了几类经典三元系设计的大集及超大集的研究进展, 同时给出了存在 $2 \cdot 13^n + 1$ 阶 Kirkman 三元系超大集和 $3 \cdot 5^n$ 阶可分解 Mendelsohn 三元系超大集的新结果.

关键词 组合设计 Steiner 三元系 Kirkman 三元系 Mendelsohn 三元系 大集 超大集

MSC (2010) 主题分类 05B05

1 组合设计与三元系

一个组合设计 $\mathcal{D} = (X, \mathcal{B}, I)$ 由两个有限集合 X 和 $\mathcal{B}$ 及彼此间的关联关系 I 所组成. 通常称 X 和 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{D}$ 的点集和区组集, 其元素分别称为点和区组. 作为组合数学中一个庞大分支的研究对象, 组合设计包含有很多种类型, 其中最经典的几类三元系如下:

(1) Steiner 三元系. v 元集 X 上一些 3-子集 (称为区组) 的族 $\mathcal{B}$, 使得 X 中每个无序对都恰被 $\mathcal{B}$ 的 λ 个区组所包含, 称为 Steiner 三元系, 简记为 $\text{STS}(v, \lambda)$. 它是所谓 t -设计 $S_\lambda(t, k, v)$ (即 v 元集 X 上一些 k -子集的族 $\mathcal{B}$, 使得 X 中每个 t -子集都恰被 $\mathcal{B}$ 的 λ 个区组所包含) 的最简单情形, 故还可记为 $S_\lambda(2, 3, v)$. 当 $\lambda = 1$ 时, 以上符号中的 λ 均可略去. $\text{STS}(v, \lambda)$ 的存在谱是由 Kirkman^[1] 和 Reiss^[2] 给出的:

$$\text{存在 } \text{STS}(v, \lambda) \Leftrightarrow v \geq 3, \text{ 且 } \gcd(v-2, 6) \mid \lambda.$$

(2) Mendelsohn 三元系. v 元集 X 上一些循环三元组 $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ (它覆盖有序对 $(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1)$) 的族 $\mathcal{B}$, 使得 X 中每个有序对都恰含于 $\mathcal{B}$ 的 λ 个区组中, 称为 Mendelsohn 三元系, 记作 $\text{MTS}(v, \lambda)$ 或 $3\text{-MD}_\lambda(v)$. 1971 年, Mendelsohn^[3] 定义并给出了它的存在谱:

$$\text{存在 } \text{MTS}(v, \lambda) \Leftrightarrow v \geq 3 \text{ 且 } (v, \lambda) \neq (6, 1), \text{ 当 } 3 \nmid \lambda \text{ 时, } v \equiv 0, 1 \pmod{3}.$$

英文引用格式: Kang Q D, Yuan L D. Large sets and overlarge sets of triple systems (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1409–1422, doi: 10.1360/N012016-00144

(3) Directed 三元系. v 元集 X 上一些可迁三元组 (x_1, x_2, x_3) (它覆盖有序对 (x_1, x_2) 、 (x_2, x_3) 和 (x_1, x_3)) 的族 $\mathcal{B}$, 使得 X 中每个有序对都恰被 $\mathcal{B}$ 的 λ 个区组所覆盖, 称其为 Directed 三元系, 简记为 $\text{DTS}(v, \lambda)$ 或 $T_\lambda(2, 3, v)$. 1973 年, Hung 和 Mendelsohn^[4] 给出了它的存在谱:

$$\text{存在 } \text{DTS}(v, \lambda) \Leftrightarrow v \geq 3, \text{ 当 } 3 \nmid \lambda \text{ 时, } v \equiv 0, 1 \pmod{3}.$$

(4) Hybrid 三元系. v 元集 X 上一些循环三元组和可迁三元组 (两者均含有) 的族 $\mathcal{B}$, 使得 X 中的每个有序对都恰被覆盖于 $\mathcal{B}$ 的 λ 个区组中, 称其为 Hybrid 三元系, 简记为 $c\text{-HTS}(v, \lambda)$, 其中 c 表示所含循环三元组的个数, 已知有 $1 \leq c \leq \frac{\lambda v(v-1)}{3} - 2$. 1989 年, Colbourn 等^[5] 给出了它的存在谱:

$$\text{存在 } c\text{-HTS}(v, \lambda) \Leftrightarrow v \geq 3, \text{ 且 } (\lambda, v, c) \neq (1, 6, 8), \text{ 当 } 3 \nmid \lambda \text{ 时, } v \equiv 0, 1 \pmod{3}.$$

(5) 带有可分解性的设计. 设计 $(X, \mathcal{B}, I)$ 的区组集 $\mathcal{B}$ 中, 若有一族区组恰构成点集 X (或 $X \setminus \{x\}$) 的分拆, 则称此族区组为该设计的一个平行类 (或几乎平行类). 若设计的区组集 $\mathcal{B}$ 可被分拆为若干平行类 (或几乎平行类) 的并, 则称此设计为可分解 (或几乎可分解) 的. 可分解的 $\text{STS}(v)$ 被称为 Kirkman 三元系, 简记为 $\text{KTS}(v)$. 可分解的 $S(t, k, v)$ 、 $\text{MTS}(v, \lambda)$ 和 $\text{DTS}(v, \lambda)$ 分别被记为 $\text{RS}(t, k, v)$ 、 $\text{RMTS}(v, \lambda)$ 和 $\text{RDTS}(v, \lambda)$. 几乎可分解的 $\text{MTS}(v, \lambda)$ 和 $\text{DTS}(v, \lambda)$ 记为 $\text{ARMTS}(v, \lambda)$ 和 $\text{ARDTS}(v, \lambda)$. 它们的存在性被列在下边, 其中第一个结果是 Ray-Chaudhuri 和 Wilson^[6] 于 1971 年完成的. 但我国包头九中物理教师陆家羲早在 1965 年已得到了同样的结果.

(i) 存在 $\text{KTS}(v) \Leftrightarrow v \equiv 3 \pmod{6}$ (参见文献 [6]);

(ii) 存在 $\text{RMTS}(v)$ 和 $\text{RDTS}(v) \Leftrightarrow v \equiv 0 \pmod{3}$ 且 $v \geq 3, v \neq 6$ (参见文献 [7]);

(iii) 存在 $\text{ARMTS}(v)$ 和 $\text{ARDTS}(v) \Leftrightarrow v \equiv 1 \pmod{3}$ 且 $v \geq 3$ (参见文献 [8]).

(6) 纯的有向设计. 一个 Mendelsohn (或 Directed) 设计 $(X, \mathcal{B}, I)$ 中, 区组 $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ 或 $(x_1, \dots, x_k)$ 所对应的无序 k -子集 $\{x_1, \dots, x_k\}$ 称为其基础集. 若 $\mathcal{B}$ 中任两个区组的基础集都不同, 则称此设计为纯的. 纯的 $\text{MTS}(v)$ 和纯的 $\text{DTS}(v)$ 分别被记为 $\text{PMTS}(v)$ 和 $\text{PDTS}(v)$, 其存在谱分别为

(i) 存在 $\text{PMTS}(v) \Leftrightarrow v \equiv 0, 1 \pmod{3}, v \geq 4, v \neq 6$ (参见文献 [9]);

(ii) 存在 $\text{PDTS}(v) \Leftrightarrow v \equiv 0, 1 \pmod{3}, v \geq 4$ (参见文献 [9]).

(7) 广义三元系. 一个无序 (或循环、可迁) 三元组中, 若允许出现相同的元, 则被称为广义无序 (或循环、可迁) 三元组. v 元集上一些这样三元组的族 $\mathcal{B}$, 使得 X 中每个广义无序对 (或有序对) 都恰被 $\mathcal{B}$ 的唯一区组所包含, 被记为 $\text{ESTS}(v)$ (或 $\text{EMTS}(v)$ 、 $\text{EDTS}(v)$). 这类设计是 Johnson 和 Mendelsohn^[10] 在 1972 年引进的, 并已证明:

$$\text{对任意正整数 } v, \text{ 存在 } \text{ESTS}(v)、\text{EMTS}(v) \text{ 和 } \text{EDTS}(v).$$

2 设计的大集与超大集

组合设计 $\mathcal{D} = (X, \mathcal{B}, I)$ 的区组通常都是 X 上指定的对应于 $\mathcal{D}$ 的一种构形. 由于关联关系 I 的制约, $\mathcal{B}$ 通常只含 X 上指定构形的一部分. 对于指定的设计 $\mathcal{D}$, 若 X 上与 $\mathcal{D}$ 相应的全部构形可分拆为若干个 $\mathcal{B}_i$, 使得每个 $(X, \mathcal{B}_i, I)$ 皆为一个 $\mathcal{D}$, 则称这些 $\mathcal{B}_i$ 构成一个 $|X|$ 阶 $\mathcal{D}$ -设计的大集, 它可在 $\mathcal{D}$ -设计符号前添加大写字母 L (意即 large set) 来标记. 例如, LSTS , LKTS , LMTS , LDTS , ...

设 v 元集 X 是 $v+1$ 元集 Y 的一个子集, $\mathcal{D} = (X, \mathcal{B}, I)$ 是一个 v 阶组合设计. 若 Y 上与 $\mathcal{D}$ 相应的全部指定构形可分拆为若干个 $\mathcal{B}_x$, 且每个 $\mathcal{B}_x$ 恰是 $Y \setminus \{x\}$ 上的一个 $\mathcal{D}$ -设计, 其中 $x \in Y$, 则称这

些 $\mathcal{B}_x$ 构成一个 v 阶 $\mathcal{D}$ -设计的超大集, 它可在 $\mathcal{D}$ -设计符号前添加两个大写字母 OL (意即 overlarge set) 来标记. 例如, OLSTS, OLKTS, OLMTS, OLDTs, ...

例 2.1 LKTS(15): 作为 Kirkman 女生问题的延续, 由 Sylvester^[11,12] 于 1850 年提出, 是数学史上的首个大集问题. 直到 1974 年才由美国学者 Denniston^[13] 借助计算机给出第一个答案: 以 $\{a, b\} \cup Z_{13}$ 上的如下 KTS(15) 作为基小集, 它模 13 循环给出的诸小集恰构成一个 LKTS(15):

Sun	Mon	Tue	Wed	Thu	Fri	Sat
$\{0, a, b\}$	$\{2, 8, b\}$	$\{b, 11, 12\}$	$\{5, 7, b\}$	$\{4, 9, b\}$	$\{1, b, 10\}$	$\{3, 6, b\}$
$\{8, 9, 12\}$	$\{1, 6, a\}$	$\{4, a, 10\}$	$\{3, a, 12\}$	$\{2, 5, a\}$	$\{9, a, 11\}$	$\{7, 8, a\}$
$\{3, 7, 10\}$	$\{4, 7, 11\}$	$\{6, 7, 9\}$	$\{2, 9, 10\}$	$\{6, 8, 10\}$	$\{5, 6, 12\}$	$\{5, 10, 11\}$
$\{2, 6, 11\}$	$\{3, 5, 9\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 8, 11\}$	$\{1, 7, 12\}$	$\{3, 4, 8\}$	$\{2, 4, 12\}$
$\{1, 4, 5\}$	$\{0, 10, 12\}$	$\{0, 5, 8\}$	$\{0, 4, 6\}$	$\{0, 3, 11\}$	$\{0, 2, 7\}$	$\{0, 1, 9\}$.

例 2.2 LMTS(10): 取点集 $\{a, b\} \cup F_{2^3}$, 其中 F_{2^3} 为 8 元有限域, 本原元 g 满足 $g^3 + g + 1 = 0$. 此 10 元集上的 30×8 个循环三元组可分拆为如下 8 个彼此无公共区组的 MTS(10): $\mathcal{B}_x, x \in F_{2^3}$. 不难核验, 这 8 个 $\mathcal{B}_x$ 恰构成一个 LMTS(10):

$$\langle a, b, x \rangle, \langle b, a, x \rangle, \langle a, y, g^3 + gy \rangle, \langle b, y, g^6 x + g^2 y \rangle, \langle x, y, g^5 x + g^4 y \rangle, \langle g^6 x + g^2 y, y, gx + g^3 y \rangle, \quad y \in F_8 \setminus \{x\}.$$

例 2.3 OLARDTS(10): 取点集 Z_{11} . 首先在 $Z_{11} \setminus \{10\}$ 上构作三个基小集 ARDTS(10)_s $\rightarrow \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, 每个基小集的第 i ($0 \leq i \leq 9$) 列分别构成 $Z_{11} \setminus \{10, i\}$ 的分拆. 它们再分别模 11 循环, 总共产生的 33 个 DTS(10) 恰构成一个 OLARDTS(10):

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{A}$:	(7 1 9)	(0 4 5)	(5 7 0)	(6 0 9)	(8 1 0)	(4 0 6)	(0 7 8)	(0 1 3)	(9 0 2)	(3 2 0)
	(8 4 2)	(6 2 7)	(9 1 6)	(5 1 8)	(2 5 9)	(2 3 1)	(1 5 2)	(9 5 4)	(6 1 4)	(4 1 7)
	(5 6 3)	(8 9 3)	(3 4 8)	(7 2 4)	(7 3 6)	(9 8 7)	(4 3 9)	(2 6 8)	(3 7 5)	(8 6 5),
$\mathcal{B}$:	(1 9 7)	(4 5 0)	(7 0 5)	(9 6 0)	(0 8 1)	(0 6 4)	(8 0 7)	(1 3 0)	(0 2 9)	(2 0 3)
	(4 2 8)	(7 6 2)	(6 9 1)	(1 8 5)	(9 2 5)	(3 1 2)	(5 2 1)	(5 4 9)	(1 4 6)	(7 4 1)
	(3 5 6)	(3 8 9)	(8 3 4)	(2 4 7)	(6 7 3)	(7 9 8)	(9 4 3)	(8 2 6)	(5 3 7)	(6 5 8),
$\mathcal{C}$:	(9 7 1)	(5 0 4)	(0 5 7)	(0 9 6)	(1 0 8)	(6 4 0)	(7 8 0)	(3 0 1)	(2 9 0)	(0 3 2)
	(2 8 4)	(2 7 6)	(1 6 9)	(8 5 1)	(5 9 2)	(1 2 3)	(2 1 5)	(4 9 5)	(4 6 1)	(1 7 4)
	(6 3 5)	(9 3 8)	(4 8 3)	(4 7 2)	(3 6 7)	(8 7 9)	(3 9 4)	(6 8 2)	(7 5 3)	(5 8 6).

例 2.4 LRMTS(12) = $\{(\{a, b\} \cup (Z_5 \times Z_2), \mathcal{B}_{ij}) : i \in Z_5, j \in Z_2\}$, $\mathcal{B}_{ij} \equiv \mathcal{B}_{0j} + i \pmod{5, -}$, 其中 $\mathcal{B}_{00}$ 和 $\mathcal{B}_{01}$ 如下, 元素 $(x, 0)$ 简记为 x , 而元素 $(x, 1)$ 则记为 $\bar{x}$. 每列的 4 个区组恰构成一个平行类.

$\mathcal{B}_{00}$:	$\langle a \bar{0} 3 \rangle$	$\langle a 2 4 \rangle$	$\langle a 4 2 \rangle$	$\langle a 3 \bar{0} \rangle$	$\langle a b 1 \rangle$	$\langle a 0 \bar{3} \rangle$	$\langle a \bar{2} \bar{4} \rangle$	$\langle a \bar{4} \bar{2} \rangle$	$\langle a 1 \bar{1} \rangle$	$\langle b a \bar{1} \rangle$	$\langle a \bar{3} 1 \rangle$
	$\langle b 0 4 \rangle$	$\langle b \bar{2} 3 \rangle$	$\langle b \bar{4} \bar{0} \rangle$	$\langle b \bar{1} 1 \rangle$	$\langle 0 \bar{1} \bar{4} \rangle$	$\langle b \bar{0} \bar{4} \rangle$	$\langle b 2 \bar{3} \rangle$	$\langle b 4 0 \rangle$	$\langle b \bar{3} 2 \rangle$	$\langle \bar{2} 1 4 \rangle$	$\langle b 3 \bar{2} \rangle$
	$\langle 1 2 \bar{4} \rangle$	$\langle 1 \bar{0} \bar{3} \rangle$	$\langle 1 3 0 \rangle$	$\langle 0 \bar{2} 2 \rangle$	$\langle \bar{0} 2 \bar{2} \rangle$	$\langle 1 \bar{2} 4 \rangle$	$\langle 1 0 3 \rangle$	$\langle 1 \bar{3} \bar{0} \rangle$	$\langle \bar{2} 0 \bar{0} \rangle$	$\langle 2 \bar{0} 0 \rangle$	$\langle \bar{0} \bar{1} 4 \rangle$
	$\langle \bar{1} \bar{2} \bar{3} \rangle$	$\langle \bar{1} 0 \bar{4} \rangle$	$\langle \bar{1} \bar{3} \bar{2} \rangle$	$\langle \bar{3} \bar{4} 4 \rangle$	$\langle 4 3 \bar{3} \rangle$	$\langle \bar{1} 2 3 \rangle$	$\langle \bar{1} \bar{0} 4 \rangle$	$\langle \bar{1} 3 2 \rangle$	$\langle 3 4 \bar{4} \rangle$	$\langle \bar{4} \bar{3} 3 \rangle$	$\langle 2 1 \bar{4} \rangle,$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{01} : & \langle a \bar{0} 4 \rangle \quad \langle a 2 3 \rangle \quad \langle a 3 2 \rangle \quad \langle a 4 \bar{0} \rangle \quad \langle a b \bar{1} \rangle \quad \langle a 0 \bar{4} \rangle \quad \langle a \bar{2} \bar{3} \rangle \quad \langle a \bar{3} \bar{2} \rangle \quad \langle a \bar{1} 1 \rangle \quad \langle b a 1 \rangle \quad \langle a \bar{4} 0 \rangle \\ & \langle b 0 3 \rangle \quad \langle b \bar{2} 4 \rangle \quad \langle b \bar{3} \bar{1} \rangle \quad \langle b 1 \bar{1} \rangle \quad \langle \bar{2} 1 3 \rangle \quad \langle b \bar{0} \bar{3} \rangle \quad \langle b 2 \bar{4} \rangle \quad \langle b 3 0 \rangle \quad \langle b \bar{4} 2 \rangle \quad \langle 0 \bar{1} \bar{3} \rangle \quad \langle b 4 \bar{2} \rangle \\ & \langle 1 2 \bar{3} \rangle \quad \langle 1 \bar{0} \bar{4} \rangle \quad \langle 1 4 0 \rangle \quad \langle 0 2 \bar{2} \rangle \quad \langle 2 0 \bar{0} \rangle \quad \langle 1 \bar{2} 3 \rangle \quad \langle 1 0 4 \rangle \quad \langle 1 \bar{4} \bar{0} \rangle \quad \langle \bar{2} \bar{0} 0 \rangle \quad \langle \bar{0} \bar{2} 2 \rangle \quad \langle 2 1 \bar{3} \rangle \\ & \langle \bar{1} \bar{2} \bar{4} \rangle \quad \langle \bar{1} 0 \bar{3} \rangle \quad \langle \bar{1} \bar{4} \bar{2} \rangle \quad \langle \bar{4} 3 \bar{3} \rangle \quad \langle \bar{3} 4 \bar{4} \rangle \quad \langle \bar{1} 2 4 \rangle \quad \langle \bar{1} \bar{0} 3 \rangle \quad \langle \bar{1} \bar{4} 2 \rangle \quad \langle \bar{4} \bar{3} 3 \rangle \quad \langle \bar{3} \bar{4} 4 \rangle \quad \langle \bar{0} \bar{1} 3 \rangle. \end{aligned}$$

例 2.5 $\text{LHTS}(4) = \{(Z_4, \mathcal{B}_{ij}) : i \in Z_2, j \in Z_4\}$, 其中

$$\mathcal{B}_{00} = \{\langle 1, 2, 3 \rangle, \langle 1, 0, 3 \rangle, \langle 2, 0, 1 \rangle, \langle 3, 0, 2 \rangle\}, \quad \mathcal{B}_{0j} \equiv \mathcal{B}_{00} + j \pmod{(-, 4)},$$

$$\mathcal{B}_{1j} = \{\langle z, y, x \rangle, \langle w, v, u \rangle : \langle x, y, z \rangle, \langle u, v, w \rangle \in \mathcal{B}_{0j}\}, \quad j \in Z_4.$$

例 2.6 $\text{LEDTS}(5) = \{(Z_5, \mathcal{A}_x) : x \in Z_5\} \cup \{(Z_5, \mathcal{B}_k) : k \in Z_4\} \cup \{(Z_5, \mathcal{C}_k) : k \in Z_4\}$, 其中

$$\mathcal{A}_0 = \{(0 0 0), (1 3 1), (2 1 2), (3 4 3), (4 2 4), (1 0 4), (2 0 3), (3 0 2), (4 0 1)\},$$

$$\mathcal{A}_x = \mathcal{A}_0 + x, \quad x \in Z_5,$$

$$\mathcal{B}_0 = \{(0 0 1), (0 3 2) \pmod{5}\}, \quad \mathcal{B}_1 = \{(0 0 2), (0 1 4) \pmod{5}\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \{(0 0 3), (0 4 1) \pmod{5}\}, \quad \mathcal{B}_3 = \{(0 0 4), (0 2 3) \pmod{5}\},$$

$$\mathcal{C}_0 = \{(0 1 1), (3 2 0) \pmod{5}\}, \quad \mathcal{C}_1 = \{(0 2 2), (1 4 0) \pmod{5}\},$$

$$\mathcal{C}_2 = \{(0 3 3), (4 1 0) \pmod{5}\}, \quad \mathcal{C}_3 = \{(0 4 4), (2 3 0) \pmod{5}\}.$$

3 三元系大集与超大集的存在性进展

3.1 Steiner 三元系

大集 $\text{LSTS}(v, \lambda)$ 的存在范围当然须在 $\text{STS}(v, \lambda)$ 存在谱内, 且每个大集恰由 $\frac{v-2}{\lambda}$ 个两两不交的小集组成. 1850 年, Cayley^[11] 证明了最多只有两个彼此不交的 $\text{STS}(7)$, 亦即不存在 $\text{LSTS}(7)$. 而 Kirkman^[1] 则在同一年给出了 $\text{LSTS}(9)$. 此后 LSTS 的研究几乎毫无进展, 1972 年引进递归方法后才又有所推进; 但直到 1980 年, 结果依旧零散, 距完全解决相去甚远. 1983–1984 年, *Journal of Combinatorial Theory* 连续发表了陆家羲的 6 篇论文: On large sets of disjoint Steiner triple systems^[14,15], 基本上完成了 $\text{LSTS}(v)$ 的存在谱. 他不幸早逝, 所遗留的 6 个阶数 $v = 141, v = 283, v = 501, v = 789, v = 1,501, v = 2,365$, 由 Teirlinck^[16] 在 1991 年完成, 从而宣告了历时 140 年之久的 Steiner 三元系大集的完全解决, 这是设计理论上完全解决的第一个大集系列. 关于三元系大集和超大集有以下结论 (其中 $\text{OLSTS}(v)$ 的存在可由 $S(3, 4, v+1)$ 的存在谱导出):

(i) 存在 $\text{LSTS}(v) \Leftrightarrow v \equiv 1, 3 \pmod{6}, v \geq 3, v \neq 7$ (参见文献 [14–16]);

(ii) 存在 $\text{LSTS}(v, \lambda) \Leftrightarrow \gcd(v-2, 6) \mid \lambda$ (参见文献 [17, 18]);

(iii) 存在 $\text{OLSTS}(v) \Leftrightarrow v \equiv 1, 3 \pmod{6}, v \geq 3$ (参见文献 [19, 20]).

3.2 Mendelsohn 三元系

在文献 [21–27] 中, 康庆德、常彦勋和雷建国合作完成了 $\text{LMTS}(v, \lambda)$ 存在谱, 其中 $\lambda = 1$ 的主体框架为

(i) 对于 $u \equiv \pm 1 \pmod{6}, u > 0$, 存在 $\text{LMTS}(u+2)$;

(ii) 对于 $u \equiv \pm 1 \pmod 6, u > 0, v \geq 3$, $\text{LMTS}(v+2) \Rightarrow \text{LMTS}(uv+2)$;

(iii) 对于 $u \equiv \pm 1 \pmod 6, u > 0$, 存在 $\text{LMTS}(2u+2)$;

(iv) 对于 $n \geq 3$, 存在 $\text{LMTS}(2^n+2)$;

(v) 对于 $u \equiv \pm 1 \pmod 6, u > 1$, $\text{LMTS}(u+2) \Rightarrow \text{LMTS}(4u+2)$.

在进一步完成了 $\lambda = 3$ 的情形后, 最终给出了完整的存在谱 (参见文献 [27]):

存在 $\text{LMTS}(v, \lambda) \Leftrightarrow \lambda \mid (v-2), (v, \lambda) \neq (6, 1)$, 当 $3 \nmid \lambda$ 时, $v \equiv 0, 1 \pmod 3$.

一些相关的研究参见文献 [28–34]. Ji 和 Wei^[35] 在 2007 年完成了 $\text{MTS}(v)$ 超大集的存在谱:

存在 $\text{OLMTS}(v) \Leftrightarrow v \equiv 0, 1 \pmod 3, v \geq 3, v \neq 6$.

3.3 可迁三元系

$\lambda = 1$ 时的 DTS 大集自 1983 年开始, 先后有 Lindner、Street、Colbourn、Rosa、Teirlinck、常彦勋和康庆德投入研究, 参见文献 [16, 21, 28, 36–39], 最终由后两位在文献 [40] 中完成. 其主要过程为

(i) 对于 $v = 4, 6, 18$, 存在 $\text{LDTS}(v)$;

(ii) 对于 $u \equiv \pm 1 \pmod 6, u > 0$, 存在 $\text{LDTS}(u+2)$;

(iii) 对于 $v \geq 3, v \neq 6$, $\text{LDTS}(v) \Rightarrow \text{LDTS}(3v)$;

(iv) 对于 $v \geq 3$, $\text{LDTS}(v+1) \Rightarrow \text{LDTS}(3v+1)$;

(v) 对于 $u \equiv \pm 1 \pmod 6, u > 0$, $\text{LDTS}(v+2) \Rightarrow \text{LDTS}(uv+2)$;

(iv) 对于 $v \geq 3$, $\text{LDTS}(v+2) \Rightarrow \text{LDTS}(16v+2)$.

进而应用幂等 Latin square 大集的存在性和递归方法, 可以完成 $\lambda = 3$ 的情形, 从而得到

(i) 存在 $\text{LDTS}(v, \lambda) \Leftrightarrow 3 \mid \lambda$ 时, $\frac{\lambda}{3} \mid v-2, 3 \nmid \lambda$ 时, $v \equiv \lambda+2, 2\lambda+2 \pmod{3\lambda}$ (参见文献 [41]);

(ii) 存在 $\text{OLDTS}(v, \lambda) \Leftrightarrow (\lambda = 1, v \equiv 0, 1 \pmod 3)$ 或 $(\lambda = 3, v \geq 3)$ (参见文献 [42]).

3.4 Hybrid 三元系

大集 $\text{LHTS}(v, \lambda)$ 的存在谱是 Kang 和 Lei^[43] 在 1996 年最终完成的:

存在 $\text{LHTS}(v, \lambda) \Leftrightarrow \lambda \mid 4(v-2), 3 \nmid \lambda$ 时, $3 \nmid (v-2), (v, \lambda) \neq (3, 1)$.

超大集 $\text{OLHTS}(v, \lambda)$ 的存在谱是 Tian 和 Cheng^[44] 在 2008 年完成的:

存在 $\text{OLHTS}(v, \lambda) \Leftrightarrow \lambda = 1, 2, 4$ 和 $v \equiv 0, 1 \pmod 3, v \geq 4$.

3.5 纯的有向三元系

(i) 存在 $\text{LPMTS}(v) \Leftrightarrow v \equiv 0, 1 \pmod 3, v \geq 4, v \neq 6, 7$ (参见文献 [45]);

(ii) 存在 $\text{OLPMTS}(v) \Leftrightarrow v \equiv 0, 1 \pmod 3, v \geq 4, v \neq 6$ (参见文献 [46]);

(iii) 存在 $\text{LPDTS}(v) \Leftrightarrow v \equiv 0, 1 \pmod 3, v \geq 4$ (参见文献 [47]);

(iv) 存在 $\text{OLPDTS}(v) \Leftrightarrow v \equiv 0, 1 \pmod 3, v \geq 4$ (参见文献 [48]);

(v) 存在 $\text{LPHTS}(v)$ 和 $\text{OLPHTS}(v) \Leftrightarrow v \equiv 0, 1 \pmod 3, v \geq 4$ (参见文献 [49, 50]).

3.6 广义三元系

- (i) 对任意正整数 v , 存在 $\text{LESTS}(v)$ 和 $\text{LEMTS}(v)$;
- (ii) 对任意正整数 $v \neq 4$, 存在 $\text{LEDTS}(v)$ (参见文献 [51–53]).

3.7 Kirkman 三元系

$\text{LKTS}(v)$ 是历史上第一个提出的大集问题 (1850 年), 虽然历经各国学者们的不懈努力 (参见文献 [54–61]), 但却至今尚未完全解决. 初期的进展中 (参见文献 [1, 13, 62–67]), 主要依据“三倍构造”扩展无穷类:

- (i) 存在 $\text{LKTS}(v)$ 和 $\text{TKTS}(v) \Rightarrow$ 存在 $\text{LKTS}(3v)$ (参见文献 [68]);
- (ii) 存在 $\text{LKTS}(v)$ 和 $\text{TRISQ}(v) \Rightarrow$ 存在 $\text{LKTS}(3v)$ (参见文献 [69, 70]),

其中 $\text{TKTS}(v)$ 是一个带有 v 阶自同构群的 $\text{KTS}(v)$, 而 $\text{TRISQ}(v)$ 是一个可迁的可分解幂等对称拟群. 在给出 $\text{TRISQ}(v)$ 的存在谱 $v \equiv 3 \pmod{6}$ 后, 上述三倍递归构造被进一步简化为

$$\text{存在 } \text{LKTS}(v) \Rightarrow \text{存在 } \text{LKTS}(3v).$$

另一方面, Lei^[71] 引进了 u 元集 X 上的一种辅助设计 $\text{LR}(u)$, 并证明了:

- (i) 存在 $\text{LKTS}(v)$ 、 $\text{TKTS}(v)$ 和 $\text{LR}(u) \Rightarrow$ 存在 $\text{LKTS}(uv)$,
- (ii) 存在 $\text{LR}(u)$ 、 $\text{TKTS}(v)$ 和 $\text{LR}(v) \Rightarrow$ 存在 $\text{LR}(uv)$.

Zhu 和 Zhang^[70] 又将此二结论中的条件 $\text{TKTS}(v)$ 去掉, 而雷建国则给出了一些 LR 的存在性.

迄今的 LKTS 与 OLKTS 存在性结论如下 (参数一般为非负整数, q 和 q_i 表示模 12 余 7 的素数幂, 记 $M = \{\prod_{i=1}^d (2q_i^{n_i} + 1) \prod_{j=1}^t (4^{a_j} 25^{b_j} - 1) : d+t \geq 1, n_i, a_j \geq 1\}$, $N = \{2^{2w+1} 25^r + 1 : w+r \geq 1\}$), 则

- (i) 存在 $\text{LKTS}(3^u(p^k + 2))$, 其中 $p \in \{67, 139, 163, 211, 283, 307, 331\}$;
- (ii) 存在

$$\text{LKTS}\left(3^m 5^n c \prod_{i=1}^a (2 \cdot 7^{r_i} + 1) \prod_{j=1}^b (2 \cdot 13^{s_j} + 1)\right),$$

其中 $m, r_i, s_j \geq 1$, 当 $n \geq 1$ 且 $c \neq 1$ 时, $a+b \geq 1$, 而 $c \in \{1, 7, 11, 13, 17, 35, 43, 67, 91, 123\} \cup M \cup N$;

- (iii) 存在 $\text{OLKTS}(v)$, 其中 $v \in \{21\} \cup M \cup (3N)$ (参见文献 [59, 72–75]).

* 200 以内的未知阶数 v :

$\text{LKTS}(v)$: 57, 87, 93, 111, 123, 147, 159, 177, 183, 195;

$\text{OLKTS}(v)$: 33, 51, 57, 69, 75, 93, 105, 111, 123, 129, 141, 147, 159, 165, 171, 177, 183, 195.

3.8 可分解的 Mendelsohn 三元系

可分解的 Mendelsohn 三元系包括 LRMTS 、 LARMTS 、 OLRMTS 和 OLARMTS 四类. 研究工作始于 1995 年, 迄今为止的存在性结论可概括如下 (参见文献 [76–83], 参数标注同上节):

- (i) 存在

$$\text{LRMTS}\left(3\alpha \prod_{i=1}^a (2 \cdot 7^{r_i} + 1) \prod_{j=1}^b (2 \cdot 13^{s_j} + 1) \prod_{k=1}^c \beta_k\right),$$

其中 $c \geq 1, \alpha \neq 1$ 时, $a+b \geq 1$; $\beta_k \in \{5, 2^{2g+1} 25^h + 1 : g+h \geq 1\}$, α 是 $\{4^m 25^n - 1 : m \geq 1\} \cup \{4 \cdot 7^s - 1\} \cup \{2q^r + 1\}$ 中一些元之积, 或 $\alpha \in \{4^m, \frac{4^m 25^n - 1}{3}, \frac{t^m + 2}{3} : m \geq 1, t \in \{7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 61\}\} \cup \{8, 23, 25, 28, 32, 35, 37, 40, 41, 43, 47, 53, 55, 61, 65, 67, 68, 71, 76, 77, 91, 92, 93, 95, 97, 100, 103, 113, 121\}$.

- (ii) 存在 LRMTS($p^n + 2$), 素数幂 $p \equiv 1 \pmod{3}$, $p \leq 373$, $n \geq 1$ (参见文献 [84, 85]).
- (iii) 存在 OLRMTS(v), 其中 $v \in \{12, 18, 21, 24\} \cup M \cup (3N) \cup \{2 \cdot 4^n + 1\}$ (参见文献 [86]).
- (iv) 存在 LARMTS(v), 其中 $v \in \{4^n, 2(7^n + 1), 2(31^n + 1), 2(127^n + 1) : n \geq 1\}$, 且 $v \neq 7$.
- (v) 存在 OLARMTS(v), 其中 $v = 10, 22, 28, 40, 46, 4^a 25^b, p^c$,
而 $a, b, c \geq 1$, $p \in \{4, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 61\}$.

* 100 以内的未知阶数 v :

LRMTS(v) : 30, 42, 54, 57, 78, 87, 90, 93;

OLRMTS(v) : 30, 36, 42, 48, 51, 54, 57, 60, 66, 69, 72, 75, 78, 84, 90, 93, 96;

LARMTS(v) : $v = 3r + 1 : r \in [3, 32] \setminus \{5, 21\}$;

OLARMTS(v) : 52, 55, 58, 67, 70, 73, 76, 79, 82, 85, 88, 91, 94, 97.

3.9 可分解的可迁三元系

可分解的可迁三元系包括 LRDTs、LARDTs、OLRDTs 和 OLARDTs 四类. 研究亦始于 1995 年, 至今已知的存在性结果如下 (参见文献 [76–81, 87, 88]):

- (i) 存在 LRDTs(v):

$$v = 3^k m, \quad k \geq 1,$$

$$m \in \{1, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 25, 35, 37, 41, 43, 47, 53, 55, 57, 61, 65, 67, 71, 91, 95, 103, 111, 123\},$$

$$v = 7^k + 2, 13^k + 2, 25^k + 2, 2^{4k} + 2, 2^{6k} + 2, k \geq 0,$$

$$v = 12(t + 1), \quad t = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 14, 16, 18, 20, 22, 24,$$

$$v = 6t + 3, \quad t \in \{38, 46, 47, 48, 56, 60\},$$

$$v = 3u, \quad u \in \{4^m 25^n - 1 : m \geq 1, n \geq 0\} \cup \{2q^t + 1\} \text{ 中一些元的乘积};$$

- (ii) 存在 OLRDTs(v), 其中 $v \in \{21\} \cup M \cup (3N)$;

- (iii) 存在 LARDTs(v), 其中 $v \in \{7, 4^n, 2(7^n + 1), 2(31^n + 1), 2(127^n + 1) : n \geq 1\}$;

- (iv) 存在 OLARDTs(v), 其中 $v \in \{10, 4^n, 7^n, 13^n, 25^n, 25 \cdot 4^n : n \geq 1\}$.

* 初始的未知阶数 v :

LRDTs(v) : 30, 42, 54, 57, 78, 87, 90, 93, ...;

OLRDTs(v) : 12, 18, 24, 30, 33, 36, 42, 48, 51, 54, 57, 60, 66, 69, 72, 75, ...;

LARDTs(v) : 10, 13, 19, 22, 25, 28, ...;

OLARDTs(v) : 19, 22, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 52, ...

4 关于 OLKTS 和 OLRMTS 的新结果

4.1 OLKTS

mv 元集 X 上的可分组设计 (t, k) -GDD(m^v) 是一个 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{B})$, 其中 $k \geq t$, $\mathcal{G}$ 是集合 X 的一个 m -子集 (称为组) 分拆; $\mathcal{B}$ 是 X 中 k -子集 (称为区组) 的族, 且每个区组与任一个组至多交于一点; X 的每个取自不同组的 t -子集恰好出现在一个区组中.

广义框架 $F(t, k, v\{m\})$ 是一个集族 $\{(X, \mathcal{G}, \mathcal{B}_r) : r \in R\}$, 其中 $\mathcal{G}$ 是 vm 元集 X 的 m -子集分拆, 例如, $\mathcal{B}_r$ 两两不交, 且 $(X, \mathcal{G}, \bigcup_{r \in R} \mathcal{B}_r)$ 是一个 (t, k) -GDD(m^v); 而对于 $G \in \mathcal{G}$, 每个 $(X \setminus G, \mathcal{G} \setminus \{G\}, \mathcal{B}_r)$ 都是 $(t-1, k)$ -GDD(m^{v-1}). $F(2, 3, v\{m\})$ 被称为 Kirkman 框架, 记作 $\text{KF}(m^v)$. 当一个 $F(3, 3, v\{m\})$ 中的每个 $(2, 3)$ -GDD(m^{v-1}) 都是 $\text{KF}(m^{v-1})$ 时, 称其为 Kirkman 框架超大集, 记为 $\text{OLKF}(m^v)$.

引理 4.1 ^[12, 71, 89] (i) 对于素数幂 q 和正整数 n , 存在 $S(3, q+1, q^n+1)$;

(ii) 存在 $\text{KF}(m^v) \Leftrightarrow 2 \mid m, 3 \mid m(v-1), v \geq 4$;

(iii) 存在 $\text{OLKF}(2^{14})$;

(iv) 存在 $S(3, k, v)$ 和 $\text{OLKF}(m^k) \Rightarrow$ 存在 $\text{OLKF}(m^v)$.

引理 4.2 存在 $\text{OLKF}(2^{n+1}) \Rightarrow$ 存在 $\text{OLKTS}(2n+1)$.

证明 令 $\text{OLKF}(2^{n+1}) = \{(Z_{n+1} \times Z_2, \mathcal{G}, \mathcal{B}(x_k)) : x_k \in Z_{n+1} \times Z_2\}$, 其中 $\mathcal{G} = \{G_x : x \in Z_{n+1}\}$, $G_x = \{x_0, x_1\}$. 每个 $((Z_{n+1} \times Z_2) \setminus G_x, \mathcal{G} \setminus \{G_x\}, \mathcal{B}(x_k))$ 均为一个 $\text{KF}(2^n)$, 且

$$\mathcal{B}(x_k) = \bigcup_{y \in Z_{n+1} \setminus \{x\}} \mathcal{B}(x_k, y), \quad \text{其中 } \mathcal{B}(x_k, y) \text{ 构成 } (Z_{n+1} \setminus \{x, y\}) \times Z_2 \text{ 的分拆.}$$

对每个 $x_k \in Z_{n+1} \times Z_2$, 定义

(i) $\mathcal{B}'(x_k) = \{C(x_k, y) : y \in Z_{n+1} \setminus \{x\}\}$, 其中 $C(x_k, y) = \{x_{1-k}\} \cup G_y$;

(ii) $\mathcal{A}(x_k) = \mathcal{B}(x_k) \cup \mathcal{B}'(x_k)$, $\mathcal{A}(x_k, y) = \mathcal{B}(x_k, y) \cup \{C(x_k, y)\}$.

可以验证 $\{((Z_{n+1} \times Z_2) \setminus \{x_k\}, \mathcal{A}(x_k)) : x_k \in Z_{n+1} \times Z_2\}$ 是一个 $\text{OLKTS}(2n+1)$, 其中每个 $\mathcal{A}(x_k)$ 的平行类分解是 $\{\mathcal{A}(x_k, y) : y \in Z_{n+1} \setminus \{x\}\}$. $\square$

定理 4.1 当 $n \geq 0$ 时, 存在 $\text{OLKTS}(2 \cdot 13^n + 1)$.

证明 当 $n = 0$ 时, 存在 $\text{OLKTS}(3)$. 而当 $n \geq 1$ 时, 由引理 4.1(i) 和 4.1(iii) 知, 存在 $S(3, 14, 13^n + 1)$ 和 $\text{OLKF}(2^{14})$. 进而由引理 4.1(iv), 可得到 $\text{OLKF}(2^{13^n+1})$, 从而由引理 4.2, 结论成立. $\square$

4.2 OLRMTS

所谓 gn 阶带洞的 Mendelsohn 三元 t -系统 $t\text{-HMTS}(v)$ 是一个 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{B})$, 其中 $\mathcal{G}$ 是 v 元点集 X 的子集分拆, 其成员称为组; $\mathcal{B}$ 是 X 的一些循环三元组的族, 其成员称为区组. 使得 $\mathcal{B}$ 中每个区组与 $\mathcal{G}$ 中任一组至多交于一点, 且当 $t = 2$ (或 $t = 3$) 时, X 中取自 t 个不同组的每个有序对 (或循环三元组) 恰含于一个区组中. 此设计的组型定义为多重集 $T = \{|G| : G \in \mathcal{G}\}$. 符号 $t\text{-HMTS}(g_1^{a_1} \dots g_r^{a_r})$ 即表示 $a_1 g_1 + \dots + a_r g_r$ 个元的点集被分拆为 a_i ($1 \leq i \leq r$) 个 g_i 长组. 当 $t = 2$ 时, t 可省略不写; 而当其区组集可被分拆为平行类时, 称其为可分解的, 记为 RHMTS .

特别地, 若一个 $3\text{-HMTS}(g^n)$ 的区组集 $\mathcal{B}$ 可被分拆为 $\mathcal{B}_x$ ($x \in G \in \mathcal{G}$), 使得每个 $(X \setminus G, \mathcal{G} \setminus \{G\}, \mathcal{B}_x)$ 均为 $\text{HMTS}(g^{n-1})$, 则称其为 3-Mendelsohn 框架, 记为 $3\text{-MF}(g^n)$; 进而, 若其中每个 $(X \setminus G, \mathcal{G} \setminus \{G\}, \mathcal{B}_x)$ 都是可分解的 $\text{HMTS}(g^{n-1})$, 则称此 $3\text{-MF}(g^n)$ 为可分解的, 记为 $\text{RMF}(g^n)$.

所谓带洞的可分解 Mendelsohn 三元系 $\text{RMTS}(v, h) = (X, H, \mathcal{B})$ 是一个 $\text{HMTS}(1^{v-h}h^1)$, H 为洞 (即 h 长组), 且其区组集可被分拆为 $P_1, \dots, P_{v-1}$, 前 $v-h$ 个 P_i 均是 v 元集 X 的分拆 (即平行类), 其余 $h-1$ 个 P_i 均是 $v-h$ 元集 $X \setminus H$ 的分拆 (即带洞平行类).

所谓 v 阶 Mendelsohn 烛台系统 MCS 是一个 $(X, S, \mathcal{G}, \mathcal{A})$, 其中 S 是 v 元集 X 的 s -子集, $\mathcal{G}$ 是 $X \setminus S$ 的分拆; $\mathcal{A}$ 是 X 的一些循环三元组的族; $X, S, \mathcal{G}$ 和 $\mathcal{A}$ 中的元素分别被称为点、干、组、区组. 集合 X 上每个循环三元组, 除去完全落在某个 $S \cup G$ ($G \in \mathcal{G}$) 中的外, 均是 $\mathcal{A}$ 的一个区组. 定义 $\text{MCS} = (X, S, \mathcal{G}, \mathcal{A})$ 的型为 $(\prod_{G \in \mathcal{G}} |G| : |S|)$, 当组长均为 g 时, 常记为 $\text{MCS}(g^n : s)$.

一个 $\text{MCS}(g^n : 1) = (X, \{\infty\}, \mathcal{G}, \mathcal{A})$ 的区组集若可被分拆为 $\mathcal{A}_\infty$ 和 $\mathcal{A}_x$ ($x \in G \in \mathcal{G}$), 使得 $\mathcal{A}_\infty$ 是 $X \setminus \{\infty\}$ 上的 $\text{RHMTS}(g^n)$ 区组集, 而每个 $\mathcal{A}_x$ 是 $X \setminus \{x\}$ 上洞为 $(G \setminus \{x\}) \cup \{\infty\}$ 的 $\text{RMTS}(gn, g)$ 区组集, 则此 MCS 被称为 1-可分解可分拆的, 记为 $1\text{-RPMCS}(g^n : 1)$.

引理 4.3 存在 $1\text{-RPMCS}(g^n : 1)$ 和 $\text{OLRMTS}(g) \Rightarrow$ 存在 $\text{OLRMTS}(gn)$.

证明 设 $(X, \{\infty\}, \mathcal{G}, \mathcal{A})$ 是 $1\text{-RPMCS}(g^n : 1)$, 其中 $\mathcal{G} = \{G_k : k \in Z_n\}$, $\mathcal{A}$ 可被分拆为 $\mathcal{A}_\infty$ 和 $\mathcal{A}_x$ ($x \in G \in \mathcal{G}$). 对每个 $k \in Z_n$, 令 $\{\mathcal{B}_x : x \in G_k\} \cup \{\mathcal{B}_\infty^k\}$ 是 $G_k \cup \{\infty\}$ 上 $\text{OLRMTS}(g)$ 的 $g+1$ 个小集. 定义

$$\mathcal{C}_x = \mathcal{A}_x \cup \mathcal{B}_x, \quad x \in X \setminus \{\infty\}; \quad \mathcal{C}_\infty = \mathcal{A}_\infty \cup \bigcup_{k \in Z_n} \mathcal{B}_\infty^k,$$

则 $gn+1$ 个小集 $\{(X \setminus \{x\}, \mathcal{C}_x) : x \in X\}$ 恰可构成 X 上的一个 $\text{OLRMTS}(gn)$. $\square$

设 $(X, \mathcal{B})$ 为 $S(t, k, v)$, 对于 $x \in X$, 记 $\mathcal{B}_x = \{B \setminus \{x\} : x \in B \in \mathcal{B}\}$. 若每个 $(X \setminus \{x\}, \mathcal{B}_x)$ 均是 $\text{RS}(t-1, k-1, v-1)$, 则称该 $S(t, k, v)$ 为带可分解导出设计的 Steiner 系统, 记为 $\text{RDS}(t, k, v)$.

引理 4.4 ^[59, 74] (i) 对于素数幂 q 和正整数 n , 存在 $\text{RDS}(3, q+1, q^n+1)$;

(ii) 存在 $\text{RDS}(3, 4, 4^n)$, $n \geq 1$.

引理 4.5 存在 $1\text{-RPMCS}(3^5 : 1)$.

证明 由引理 4.4(ii) 可知, 存在 $\text{RDS}(3, 4, 16) = (X \cup \{\infty\}, \mathcal{B})$. 记 $\mathcal{B}_\infty = \{B \setminus \{\infty\} : \infty \in B \in \mathcal{B}\}$, 则 $(X, \mathcal{B}_\infty)$ 是一个 $\text{KTS}(15)$. 取其中一个平行类作为组集合 $\mathcal{G}$, 记

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_x &= \{B \setminus \{x\} : x \in B \in \mathcal{B}, B \setminus \{\infty\} \notin \mathcal{G}\}, \\ \mathcal{A}_x &= \{\langle a, b, c \rangle, \langle b, a, c \rangle : \{a, b, c\} \in \mathcal{B}_x\}, \quad x \in X, \\ \mathcal{A}_\infty &= \{\langle a, b, c \rangle, \langle b, a, c \rangle : \{a, b, c\} \in \mathcal{B}_\infty \setminus \mathcal{G}\}, \\ \mathcal{A} &= \mathcal{A}_\infty \cup \left(\bigcup_{x \in X} \mathcal{A}_x \right), \end{aligned}$$

则 $(X \cup \{\infty\}, \{\infty\}, \mathcal{G}, \mathcal{A})$ 即是一个 $1\text{-RPMCS}(3^5 : 1)$. $\square$

引理 4.6 存在 $\text{RDS}(3, k+1, u+1)$ 、 $1\text{-RPMCS}(m^k : 1)$ 和 $\text{RMF}(m^{k+1}) \Rightarrow$ 存在 $1\text{-RPMCS}(m^u : 1)$.

证明 设 $\text{RDS}(3, k+1, u+1) = (X \cup \{\infty\}, \mathcal{B})$. 记 $\mathcal{B}_0 = \{B : \infty \notin B \in \mathcal{B}\}$, $\mathcal{B}_1 = \{B : \infty \in B \in \mathcal{B}\}$, $\bar{\mathcal{B}}_1 = \{B \setminus \{\infty\} : B \in \mathcal{B}_1\}$. 对于 $x \in X$, 令 $G_x = \{x\} \times Z_m$.

对每个区组 $B \in \bar{\mathcal{B}}_1$, 存在 $1\text{-RPMCS}(m^k : 1) = ((B \times Z_m) \cup \{\infty\}, \{\infty\}, \mathcal{G}_B, \mathcal{A}_B)$, 其中

$$\mathcal{G}_B = \{G_x : x \in B\}, \quad \mathcal{A}_B = \mathcal{A}_B(\infty) \cup \bigcup_{x_i \in B \times Z_m} \mathcal{A}_B(x_i),$$

而每个 $\mathcal{A}_B(x_i)$ 是集合 $\{\infty\} \cup ((B \times Z_m) \setminus \{x_i\})$ 上洞为 $(G_x \setminus \{x_i\}) \cup \{\infty\}$ 的 $\text{RMTS}(mk, m)$ 的区组集, $\mathcal{A}_B(\infty)$ 是 $B \times Z_m$ 上组集合为 $\mathcal{G}_B$ 的 $\text{RHMTS}(m^k)$ 的区组集.

对每个区组 $B \in \mathcal{B}_0$, 存在 $\text{RMF}(m^{k+1}) = (B \times Z_m, \mathcal{G}_B, \mathcal{D}_B)$, 其中区组集 $\mathcal{D}_B = \bigcup_{x_i \in B \times Z_m} \mathcal{D}_B(x_i)$, 且每个 $((B \setminus \{x\}) \times Z_m, \mathcal{G}_B \setminus \{G_x\}, \mathcal{D}_B(x_i))$ 均是 $\text{RHMTS}(m^k)$.

令

$$\begin{aligned} Y &= (X \times Z_m) \cup \{\infty\}, \\ \mathcal{G} &= \{G_x : x \in X\}, \\ \mathcal{B}_{0,x} &= \{B : x \in B \in \mathcal{B}_0\}, \end{aligned}$$

$$\bar{\mathcal{B}}_{1,x} = \{B : x \in B \in \bar{\mathcal{B}}_1\}.$$

今定义

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x_i) &= \bigcup_{B \in \bar{\mathcal{B}}_{1,x}} \mathcal{A}_B(x_i) \cup \bigcup_{B \in \mathcal{B}_{0,x}} \mathcal{D}_B(x_i), \quad x_i = (x, i) \in X \times Z_m, \\ \mathcal{F}(\infty) &= \bigcup_{B \in \bar{\mathcal{B}}_1} \mathcal{A}_B(\infty), \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}(\infty) \cup \bigcup_{x_i \in X \times Z_m} \mathcal{F}(x_i).\end{aligned}$$

不难验证 $(Y, \{\infty\}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$ 确是一个 $1\text{-RPMCS}(m^u : 1)$. $\square$

引理 4.7 存在 $\text{RMF}(3^6)$.

证明 取 $\mathcal{G} = \{\{i, i+6, i+12\} : 0 \leq i \leq 5\}$. 对 $x \in Z_{18}$, 定义 $\mathcal{B}_x = \{B+x \bmod 18 : B \in \mathcal{B}_0\}$, 而 $\mathcal{B}_0$ 如下:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \langle 123 \rangle & \langle 18\bar{0} \rangle & \langle 132 \rangle & \langle 1\bar{5}4 \rangle & \langle 27\bar{6} \rangle & \langle 72\bar{6} \rangle & \langle 15\bar{4} \rangle & \langle 1\bar{4}5 \rangle & \langle 37\bar{4} \rangle & \langle 3\bar{4}7 \rangle & \langle 38\bar{3} \rangle & \langle 3\bar{3}8 \rangle \\ \langle 458 \rangle & \langle 35\bar{6} \rangle & \langle 475 \rangle & \langle 1\bar{3}2 \rangle & \langle 5\bar{5}8 \rangle & \langle 59\bar{3} \rangle & \langle 249 \rangle & \langle 7\bar{5}0 \rangle & \langle 14\bar{1} \rangle & \langle 8\bar{1}4 \rangle & \langle 6\bar{1}1 \rangle & \langle 4\bar{5}7 \rangle \\ \langle 79\bar{1} \rangle & \langle 5\bar{2}7 \rangle & \langle 9\bar{0}4 \rangle & \langle 3\bar{6}5 \rangle & \langle 7\bar{1}9 \rangle & \langle 81\bar{0} \rangle & \langle 7\bar{7}8 \rangle & \langle 1\bar{2}3 \rangle & \langle 2\bar{5}5 \rangle & \langle 5\bar{3}9 \rangle & \langle 294 \rangle & \langle 2\bar{5}0 \rangle \\ \langle 3\bar{0}5 \rangle & \langle 7\bar{1}9 \rangle & \langle 6\bar{7}3 \rangle & \langle 78\bar{7} \rangle & \langle 3\bar{4}4 \rangle & \langle 34\bar{7} \rangle & \langle 0\bar{3}1 \rangle & \langle 89\bar{6} \rangle & \langle 0\bar{3}7 \rangle & \langle 7\bar{2}0 \rangle & \langle 57\bar{0} \rangle & \langle 7\bar{9}1 \rangle \\ \langle 6\bar{4}7 \rangle & \langle 3\bar{4}4 \rangle & \langle 8\bar{5}1 \rangle & \langle 9\bar{4}0 \rangle & \langle 0\bar{1}3 \rangle & \langle 4\bar{1}5 \rangle & \langle 5\bar{6}3 \rangle & \langle 3\bar{7}4 \rangle & \langle 8\bar{6}9 \rangle & \langle 5\bar{1}6 \rangle & \langle 4\bar{5}7 \rangle & \langle 4\bar{6}1 \rangle,\end{array}$$

其中 $\bar{x}$ 表示 Z_{18} 中的元 $x+10$ ($0 \leq x \leq 7$). 易见, 每列的 5 个循环三元组都恰构成 $Z_{18} \setminus \{0, 6, 12\}$ 的一个平行类. 不难核验, $(Z_{18}, \mathcal{G}, \bigcup_{x \in Z_{18}} \mathcal{B}_x)$ 恰构成一个 $\text{RMF}(3^6)$. $\square$

定理 4.2 当 $n \geq 0$ 时, 存在 $\text{OLRMTS}(3 \cdot 5^n)$.

证明 由引理 4.4(i)、4.5 和 4.7 知, 当 $n \geq 0$ 时, 存在 $\text{RDS}(3, 6, 5^n + 1)$ 、 $1\text{-RPMCS}(3^5 : 1)$ 和 $\text{RMF}(3^6)$, 在引理 4.6 中取 $k = 5$, $u = 5^n$, $m = 3$, 便可给出 $1\text{-RPMCS}(3^{5^n} : 1)$. 而因存在 $\text{OLRMTS}(3)$, 由引理 4.3, 即可得到 $\text{OLRMTS}(3 \cdot 5^n)$. $\square$

定理 4.1 和 4.2 确实给出了新的存在性结果. 例如, 由定理 4.1 可得到存在 $\text{OLKTS}(v)$ 的新阶数有 $v = 339, 4395, \dots$; 由定理 4.2 可得到存在 $\text{OLRMTS}(v)$ 的新阶数有 $v = 75, 375, 1875, \dots$

5 第一作者的后记

1963 年底, 本科毕业前的我, 曾因出身和白专被拒于报考研究生的门外. 14 年后, 恢复研究生制度的消息令我振奋: 面对改变命运的难得机遇, 科学院系统刚开始招生, 我即率先选报了学生时代就仰慕已久的万哲先教授. 但年龄已届上限的我, 被担忧难与年轻考生竞争—劝阻的回音令我转报了他处. 然而, 万先生不久捎话来表示可考虑我的报名—我寄去的论文《Jordan 法式的演变阵》让他感受到了一位中年教师的数学情怀和功力. 遗憾的是, 南开大学的准考证已提前寄到, 精力和时间的冲突, 令我错过了成为先生正式学子的机会. 尽管这段周折让我与万先生结下了因缘, 也有幸长期领受先生的关怀和指导, 但此番的坐失良机一直被自己引为悔叹与抱憾.

在读研阶段, 我先后认真拜读了万先生的专著《代数和编码》、《有限几何与不完全区组设计的一些研究》和《非线性移位寄存器》. 通过这些书著, 先生成了我的编外老师, 隔空向我传授了许多重要的代数、几何和编码知识, 并使我对 de Bruijn-Good 图、m 序列和 M 序列等课题产生了浓厚的兴趣. 应当说, 我硕士论文的选题与完成, 很大程度上得益于未曾见过的这位书面导师. 1981 年 5 月, 提前完

成学位论文的我, 坚持要求聘请万先生来主持答辩. 终于, 先生风尘仆仆地来到南开大学, 亲自为我单独主持了一场答辩. 先生签署的答辩委员会决议, 对我的研究工作给予了充分的肯定——这当然是对一位初出茅庐者的极大鼓舞和鞭策.

1984 年秋, 万哲先和徐利治两位先生推荐我参加了中国数学会组织的陆家羲学术工作评审委员会. 1985 年秋, 万先生又与吴文俊先生一起举荐我在首届刘徽数学讨论班上作高层演讲. 让我受宠若惊的是, 这次应邀登上中科院数学研究所讲台的都是赫赫有名的数学家, 只有自己是一个职称仅为讲师的无名小辈. 我演讲的题目是组合设计中的三元系大集问题, 主要介绍陆家羲的研究成果, 也涉及自己刚启步的大集研究进展. 坐在前排的吴先生和万先生两位前辈, 始终专注地聆听着我的演讲——他们的亲切目光, 以及演讲结束后的带头鼓掌与握手, 至今一直深深地镌刻在我的脑海中. 报告会结束后, 万先生请我去友谊宾馆用餐, 专门为我点了两只价格不菲的大对虾. 交谈中, 他不仅肯定了我的演讲, 还语重心长地对我说了这样一段话: “现在, 你既然已经进入了组合设计大集这个前沿方向, 就不要再东一榔头、西一棒槌地搞什么小问题了. 我建议你: 牢牢抓住这个方向, 闷头搞下去. 只要努力奋斗、持之以恒, 就一定可以作出大的成绩!”

万哲先先生向我指明的这个前进方向让我一直牢记在心. 10 年后, 当先生结束了在瑞典的工作回国时, 我当面向他汇报了自己按照其嘱咐, 在大集研究方向上锲而不舍、执着奋斗的进展: 完整解决了三个系列组合设计大集的存在性, 获得了河北省科技进步一等奖和教育部自然科学二等奖, 并在国外出版了大集问题的英文专著, …… 诚然, 我只是先生的编外学生, 但不论从身受的惠泽还是多方的感受, 我早已自认是先生的正式学子, 心目中始终尊他为恩师! 从当年主持答辩至今的 35 年中, 我不时得到先生的鼓励、指点和帮助, 聆听到他的谆谆教诲与敏捷思维, 感受到他的敬业精神和治学风范. 先生多次认真批阅我呈上的论文和有关材料, 几番出面为我组织召开的学术会议担纲, 还曾行文力荐我破格升任教授职务, 出面推荐我兼任外省博士导师, 保举我承担国家自然科学基金重点项目, …… 在我出任全国组合数学会秘书长期间, 先生更是不吝口舌地对学会工作提出意见和建议, 给予支持和指正, 还多次谆谆告诫我: “秘书长是学会的管家人, 除去组织学术活动, 还必须学会顾全大局、抓好团结!”

从 30 年前先生对我的那次方向指点, 到 20 年前我向先生的当面汇报, 再到自己的古稀年退休, 我一直在大集研究这个既定方向上坚持带队登攀, 不断取得进展. 应当说, 我在学术上所取得的一切都应首先归功于先生对我的关怀、爱护和指点. 这也正是我之所以选择组合设计大集这个题材来祝贺万先生九秩荣寿的缘由.

参考文献

- 1 Kirkman T P. Note on an unanswered prize question. Cambridge Dublin Math J, 1850, 5: 255–262
- 2 Reiss M. Über eine Steinersche combinatorische Aufgabe, welche in 45sten Bande dieses Journals. J Reine Angew Math, 1859, 56: 326–344
- 3 Mendelsohn N S. A natural generalization of Steiner triple systems. In: Computers in Number Theory. New York: Academic Press, 1971, 323–338
- 4 Hung S H Y, Mendelsohn N S. Directed triple systems. J Combin Theory Ser A, 1973, 14: 310–318
- 5 Colbourn C J, Pulleyblank W R, Rosa A. Hybrid triple systems and cubic feedback sets. Graphs Combin, 1989, 5: 15–28
- 6 Ray-Chaudhuri D K, Wilson R M. Solution of Kirkman's schoolgirl problem. Proc Sympos Pure Math, 1971, 19: 187–203
- 7 Bermond J C, Germa A, Sotteau D. Resolvable decomposition of K_n^* . J Combin Theory Ser A, 1979, 26: 179–185
- 8 Bennett F E, Sotteau D. Almost resolvable decomposition of K_n^* . J Combin Theory Ser B, 1981, 30: 228–232
- 9 Bennett F E, Mendelsohn N S. On pure cyclic triple systems and semisymmetric quasigroups. Ars Combin, 1978, 5:

- 13–22
- 10 Johnson D M, Mendelsohn N S. Extended triple systems. *Aequationes Math*, 1972, 8: 191–198
- 11 Cayley A. On the triadic arrangements of seven and fifteen things. *Lond Edinburgh Dublin Philos Mag J Sci* (3), 1850, 37: 50–53
- 12 Stinson D R. Frames for Kirkman triple systems and related designs. *Discrete Math*, 1987, 65: 289–300
- 13 Denniston R H F. Sylvester's problem of the 15 schoolgirls. *Discrete Math*, 1974, 9: 229–233
- 14 Lu J. On large sets of disjoint Steiner triple systems I–III. *J Combin Theory Ser A*, 1983, 34: 140–182
- 15 Lu J. On large sets of disjoint Steiner triple systems IV–VI. *J Combin Theory Ser A*, 1984, 37: 136–192
- 16 Teirlinck L. A completion of Lu's determination of the spectrum for large sets of disjoint Steiner triple systems. *J Combin Theory Ser A*, 1991, 57: 302–305
- 17 Schreiber S. Colloquio internazionale sulle teorie combinatorie (Atti dei Convegni Lincei, 17). 1976, Tomo II: 249–252
- 18 Teirlinck L. On the maximum number of disjoint Steiner triple systems. *Discrete Math*, 1973, 6: 299–300
- 19 Sharry M J, Street A P. A doubling construction for overlarge sets of Steiner triple systems. *Ars Combin*, 1991, 32: 143–151
- 20 Sharry M J. Large and overlarge sets of block designs. PhD Thesis. Australia: The University of Queensland, 1992
- 21 Kang Q. On large sets of block designs. PhD Thesis. Netherlands: Eindhoven University of Technology, 1989
- 22 Kang Q, Chang Y. Symmetric Mendelsohn triple systems and large sets of disjoint Mendelsohn triple systems. In: *Combinatorial Designs and Applications*. New York: Marcel Dekker Inc., 1990, 69–78
- 23 Kang Q. The construction of large sets of disjoint Mendelsohn triple systems of order $2^n + 2$. *Discrete Math*, 1991, 90: 199–205
- 24 Kang Q, Chang Y. Further results for the large sets of disjoint Mendelsohn triple systems, I. *Discrete Math*, 1993, 118: 263–268
- 25 Kang Q, Chang Y. Further results about large sets of disjoint Mendelsohn triple systems, II. *Chinese Sci Bull*, 1992, 37: 90–91
- 26 Kang Q, Lei J. A completion of the spectrum for large sets of disjoint Mendelsohn triple systems. *Bull Inst Combin Appl*, 1993, 9: 14–26
- 27 Kang Q, Lei J, Chang Y. The spectrum for large sets of disjoint Mendelsohn triple system with any index. *J Combin Des*, 1994, 2: 351–358
- 28 Colbourn C J, Rosa A. Directed and Mendelsohn triple systems. In: *Contemporary Design Theory*. New York: Wiley, 1992, 97–136
- 29 Colbourn C J, Colbourn M J. Disjoint cyclic Mendelsohn triple systems. *Ars Combin*, 1981, 11: 3–8
- 30 Kang Q. Large Sets of Triple Systems and Related Designs. *Applied Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, vol. 3. New York: Science Press, 1995
- 31 Kang Q. Large sets of three types of oriented triple systems. *J Statist Plann Inference*, 1997, 58: 151–176
- 32 Lindner C C. On the number of disjoint Mendelsohn triple systems. *J Combin Theory Ser A*, 1981, 30: 326–330
- 33 Teirlinck L. On the large sets of disjoint ordered designs. *Ars Combin*, 1988, 25: 31–37
- 34 Wilson R M. Some partittions of all triples into Steiner triple systems. In: *Hypergraph Seminar*. Berlin: Springer, 1974, 267–277
- 35 Ji L, Wei R. The spectrum of 2-idempotent 3-quasigroups with conjugate invariant subgroups. *J Combin Des*, 2010, 18: 292–304
- 36 Chang Y, Kang Q. On the large sets of pairwise disjoint transitive triple system. *Chinese Sci Bull*, 1992, 37: 171–171
- 37 Lindner C C, Street A P. Construction of large sets of pairwise disjoint transitive triple systems. *European J Combin*, 1983, 4: 335–346
- 38 Lindner C C, Street A P. Ordered triple system and transitive quasigroups. *Ars Combin*, 1984, 17: 297–306
- 39 Lindner C C. Construction of large sets of pairwise disjoint transitive triple systems, II. *Discrete Math*, 1987, 65: 65–74
- 40 Kang Q, Chang Y. A completion of the spectrum for large sets of disjoint transitive triple systems. *J Combin Theory Ser A*, 1992, 60: 287–294
- 41 Chang Y. On large sets of directed triple systems. *J Statist Plann Inference*, 1996, 51: 137–142
- 42 Tian Z, Ji L. The spectrum for overlarge sets of directed triple systems. *Sci China Ser A*, 2007, 50: 1369–1381
- 43 Kang Q, Lei J. On large sets of disjoint hybrid triple systems. *J Statist Plann Inference*, 1996, 51: 181–188
- 44 Cheng M, Tian Z. The spectrum for overlarge sets of Hybrid triple systems. *Acta Math Appl Sin Engl Ser*, 2014, 3: 635–646
- 45 Zhou J, Chang Y, Ji L. The spectrum for large sets of pure Mendelsohn triple systems. *Discrete Math*, 2008, 308: 1850–1863

- 46 Liu Y. A completion of the spectrum for the overlarge sets of pure Mendelsohn triple systems. *Graphs Combin*, 2016, 32: 1077–1100
- 47 Zhou J, Chang Y, Ji L. The spectrum for large sets of pure directed triple systems. *Sci China Ser A*, 2006, 49: 1103–1127
- 48 Liu Y, Kang Q. The existence spectrum for overlarge sets of pure directed triple systems. *Sci China Math*, 2010, 53: 2801–2810
- 49 Liu Y. The existence spectrum for overlarge sets of pure Hybrid triple systems. *Graphs Combin*, 2016, 1: 297–310
- 50 Liu Y, Nie M. The existence spectrum for large sets of pure Hybrid triple systems. *Discrete Math*, 2016, 339: 804–812
- 51 Liu Y, Kang Q. Large sets of extended directed triple systems with even orders. *Discrete Math*, 2009, 309: 6515–6529
- 52 Liu Y, Kang Q. Large sets of extended directed triple systems with odd orders. *Discrete Math*, 2010, 310: 3619–3632
- 53 Liu Y, Kang Q. Completing the spectrum for large sets of extended directed triple systems. *Discrete Math*, 2015, 338: 1573–1576
- 54 Lei J. On large sets of Kirkman triple systems and 3-wise balanced design. *Discrete Math*, 2004, 279: 345–354
- 55 Ji L, Lei J. Further results on Large sets of Kirkman triple systems. *Discrete Math*, 2008, 308: 4643–4652
- 56 Ji L. A construction for large sets of disjoint Kirkman triple systems. *Des Codes Cryptogr*, 2007, 43: 115–122
- 57 Yuan L, Kang Q. Some infinite families of large sets of Kirkman triple systems. *J Combin Des*, 2008, 16: 202–212
- 58 Yuan L, Kang Q. Another construction for large sets of Kirkman triple systems. *Des Codes Cryptogr*, 2008, 48: 35–42
- 59 Chang Y, Zhou J. Large sets of kirkman triple systems and related designs. *J Combin Theory Ser A*, 2013, 120: 649–670
- 60 Zhou J, Chang Y. New results on large sets of kirkman triple systems. *Des Codes Cryptogr*, 2010, 55: 1–7
- 61 Zheng H, Chang Y, Zhou J. Direct constructions of large sets of Kirkman triple systems. *Des Codes Cryptogr*, 2017, 83: 23–32
- 62 Chang Y, Ge G. Some new large sets of $KTS(v)$. *Ars Combin*, 1999, 51: 306–312
- 63 Denniston R H F. Further cases of double resolvability. *J Combin Theory Ser A*, 1979, 26: 298–303
- 64 Denniston R H F. Four double resolvable complete 3-designs. *Ars Combin*, 1979, 7: 265–272
- 65 Ge G. More large sets of $KTS(v)$. *J Combin Math Combin Comput*, 2004, 49: 211–214
- 66 Wu L. Large sets of $KTS(3^n \cdot 41)$. *J Suzhou Univ*, 1998, 14: 1–2
- 67 Wu L. Large sets of $KTS(v)$. In: *Lecture Notes in Pure and Applied Math*, vol. 126. New York: Marcel Dekker, 1990, 175–178
- 68 Denniston R H F. Double resolvability of some complete 3-designs. *Manuscripta Math*, 1974, 12: 105–112
- 69 Zhang S, Zhu L. Transitive resolvable idempotent symmetric quasigroups and large sets of Kirkman triple systems. *Discrete Math*, 2002, 247: 215–223
- 70 Zhang S, Zhu L. An improved product construction for large sets of Kirkman triple systems. *Discrete Math*, 2003, 260: 307–313
- 71 Lei J. On large sets of Kirkman triple systems with holes. *Discrete Math*, 2002, 254: 259–274
- 72 Yuan L, Kang Q. Further results on overlarge sets of Kirkman triple systems. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2009, 25: 419–434
- 73 Yuan L, Kang Q. A tripling construction for overlarge sets of KTS^* . *Discrete Math*, 2009, 309: 975–981
- 74 Yuan L, Kang Q. On overlarge sets of Kirkman triple systems. *Discrete Math*, 2010, 310: 2119–2125
- 75 Kang Q, Tian Z. Large sets of oriented triple systems with resolvability. *Discrete Math*, 2000, 212: 199–221
- 76 Kang Q, Lei J. Large sets of resolvable MTS and DTS. *J Combin Des*, 1996, 4: 95–104
- 77 Kang Q. Large sets of Resolvable MTS and DTS of orders $p^n + 2$. *J Combin Des*, 1996, 4: 301–321
- 78 许荣家, 康庆德. LRMTS($3v$) 和 LRDTs($3v$) 的构造. *河北师范学院学报: 自然科学版*, 1997, 2: 8–13
- 79 Zhou J, Chang Y. Product constructions for large sets of resolvable MTs and DTs. *Australas J Combin*, 2005, 33: 47–56
- 80 Kang Q, Xu R. More large sets of resolvable MTS and DTS with even orders. *Acta Math Appl Sin*, 2008, 2: 233–252
- 81 Kang Q, Zhao H. More large sets of resolvable MTS and DTS with odd orders. *Discrete Math*, 2008, 308: 886–895
- 82 Chang Y. Transitive resolvable idempotent quasigroups and large sets of resolvable Mendelsohn triple systems. *Discrete Math*, 2009, 309: 5926–5931
- 83 周君灵. 一类可分解 Mendelsohn 三元系超大集. *北京交通大学学报*, 2012, 6: 141–143
- 84 Zhou J, Chang Y. New large sets of resolvable Mendelsohn triple systems. *Discrete Math*, 2014, 328: 27–35
- 85 Geng M, Zhou J. Large sets of resolvable Mendelsohn triple systems of prime power sizes. *Discrete Math*, 2015, 338: 1017–1021
- 86 Zhou J, Chang Y. Overlarge sets of Mendelsohn triple systems with resolvability. *Discrete Math*, 2013, 313: 490–497

- 87 Zhou J, Chang Y. Tripling construction for large sets of resolvable directed triple systems. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2006, 22: 311–318
- 88 Zhao H. Another product construction for large sets of resolvable directed triple systems. *Electron J Combin*, 2009, 16: 1632–1655
- 89 Lei J. On large sets of disjoint Kirkman triple systems. *Discrete Math*, 2002, 257: 63–81

Large sets and overlarge sets of triple systems

KANG QingDe & YUAN LanDang

Abstract The large set problem in the combinatorial design theory has a long history and important applications. The related research work had been quite slow in making progress for a long period of time due to its sophistication. Being benefited and motivated by some new methodology the research in the large set problem has taken on a promising posture in recent thirty years. In this paper, we give a comprehensive summary about the development of large sets and overlarge sets for some types of classical triple systems. In addition, we obtain new results that there exist an $OLKTS(2 \cdot 13^n + 1)$ and an $OLRMTS(3 \cdot 5^n)$, where $n \geq 0$.

Keywords combinatorial design, Steiner triple system, Kirkman triple system, Mendelsohn triple system, large set, overlarge set

MSC(2010) 05B05

doi: 10.1360/N012016-00144