中国科学: 数学 2017 年 第 47 卷 第 12 期: 1717～1734
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates

综 述

Poisson 几何与李 n- 代数

献给钱敏教授 90 华诞

生云鹤[1], 朱晨畅[2*]

1. 吉林大学数学学院, 长春 130012;
2. Department of Mathematics, Georg-August-Universität Göttingen, Göttingen D-37073, Germany
E-mail: shengyh@jlu.edu.cn, chenchang.zhu@mathematik.uni-goettingen.de

收稿日期: 2017-04-28; 接受日期: 2017-07-12; 网络出版日期: 2017-08-08; * 通信作者
吉林省自然科学基金 (批准号: 20170101050JC) 和国家自然科学基金 (批准号: 11471139) 资助项目

摘要 Poisson 几何与高阶结构密切相关. 本文主要综述 Poisson 几何中的 Courant 代数胚、pre-Courant 代数胚与李 2- 代数之间的关系; CLWX (CLWX 是 "Courant- 刘张炬 -Weinstein- 徐平" 的缩写) 2- 代数胚与李 3- 代数之间的关系; (非交换) omni-(n)- 李代数与李 2- 代数之间的关系; 多辛几何以及高阶 Courant 代数胚的迷向对合子丛与李 n- 代数之间的关系.

关键词 Poisson 几何 Courant 代数胚 多辛几何 李 n- 代数 L_∞- 代数

MSC (2010) 主题分类 17B65, 18B40, 58H05

1 引言

Poisson 几何是现代微分几何学的一个分支, 起源于分析力学. 在历史上, Poisson 为了研究古典力学系统的运动方程和守恒定律等基本问题, 在可观测量代数上引进了一个双线性的括号运算, 即对于任意两个可观测量 f 和 h (相空间上的光滑函数) 定义了一个新的可观测量 $\{f,h\}$. 此括号后来在古典力学的研究中起了重要作用, 被后人称为 Poisson 括号. 直观地讲, 所谓 Poisson 几何就是研究 Poisson 括号所蕴涵的局部及整体的几何. 尽管它成为一门独立的数学分支只有三十多年的历史, 但作为一门年轻且具有活力的学科在众多国际知名数学家的推动下已经有了迅速的发展. 近代 Poisson 几何不仅自身有许多深刻的数学问题需要探讨解决, 并且与其他学科交叉渗透, 产生了许多新的问题与方法. 在李群上的调和分析、无穷维李代数、可积系统、量子化、Poisson σ- 模型、gerbe 的无穷小形式以及拓扑量子场等理论中有广泛应用.

范畴化就是将集合用范畴来代替、函数用函子来代替、等式用自然同构来代替而得到的关于范畴上的结构的理论. 通过范畴化所得到的结构我们称为高阶结构. 在这里, 高阶李理论主要是指李 2- 代数[1] 和李 2- 群[2] 的相关理论. 李 2- 代数和李 2- 群分别是李代数和李群的范畴化. 近年来, 由于高阶结构在拓扑量子场理论[3–5]、弦论[6] 以及代数几何等领域的重要应用, 国际上越来越多的数学家和物理学家投入到高阶结构的研究中来. 李群可以描述一个质点的对称. 在弦论中, 要描述一个弦的对称,

英文引用格式: Sheng Y H, Zhu C C. Poisson geometry and Lie n-algebras (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1717–1734, doi: 10.1360/N012017-00085

© 2017《中国科学》杂志社

我们就需要李 2- 群和李 2- 代数. 粗略地讲, 高阶结构可以描述对称之间的对称. 对高阶结构的研究必将促进弦论等领域的发展.

为了研究李双代数胚的 double, Liu 等[7] 引入了 Courant 代数胚这个概念. 之后 Courant 代数胚被发现在广义复几何[8,9]、矩映射[10]、L_∞- 代数[11] 和拓扑量子场论[12] 等许多地方都有广泛应用. 可以说, Courant 代数胚的引入开辟了新的研究方向, 为 Poisson 几何的发展注入了新的动力. Courant 代数胚的一个非常重要的性质就是它的截面空间是一个李 2- 代数. 进而使得 Poisson 几何与高阶结构密切相关. 用 Poisson 几何的方法来研究高阶李理论, 或者反过来, 用高阶李理论的方法来研究 Poisson 几何中的问题, 不仅能够促进学科本身的发展、提供更多有价值的研究课题, 还能够帮助我们用更高的观点在更高的层次上来观察和解决问题. 例如, Sheng 和 Zhu [13] 利用高阶结构的扩张思想给出了 Courant 代数胚的积分; Lang 等[14] 通过考虑同伦 Poisson 流形的余切丛给出了用一个李 2- 代数构造新的李 2- 代数的方法; Liu 和 Sheng [15] 利用 Leibniz 代数的范畴化给出了 Courant 代数胚的范畴化, 得到了 CLWX 2- 代数胚这个重要结构; Fégier 和 Zambon [16] 利用同伦代数刻画了 Poisson 几何中的形变问题. 介于篇幅原因, 本文重点阐述 Poisson 几何与李 n- 代数等高阶结构之间的关系, 关于其他更广泛的应用请读者参见文后的参考文献.

本文安排如下: 第 2 节回顾李 n- 代数和 Leibniz 2- 代数的概念; 第 3 节阐述 Courant 代数胚与李 2- 代数之间的关系; 第 4 节阐述 pre-Courant 代数胚与李 2- 代数之间的关系; 第 5 节阐述 CLWX 2- 代数胚与 Leibniz 2- 代数和李 3- 代数之间的关系; 第 6 节阐述 omni- 李代数、非交换 omni- 李代数和 omni-n- 李代数与李 2- 代数之间的关系; 第 7 节阐述多辛几何与李 n- 代数之间的关系; 第 8 节阐述高阶 Courant 代数胚的迷向对合子丛与李 n- 代数之间的关系.

2 李 n- 代数与 Leibniz 2- 代数

把一个向量空间范畴化, 我们得到一个 2- 向量空间. 关于更多的介绍, 参见文献 [1]. 令 Vect 是向量空间构成的范畴.

定义 2.1 [1] 一个 2- 向量空间是范畴 Vect 中的一个范畴.

一个 2- 向量空间 C 是一个范畴, 这个范畴中对象的集合 C_0 是一个向量空间, 态射的集合 C_1 也是一个向量空间, 并且所有的范畴中的结构映射都是线性的. 令 $s,t:C_1\to C_0$ 分别表示范畴中的头映射和尾映射. 令 $\cdot_{\mathrm{v}}$ 表示态射的复合.

2- 向量空间构成的 2- 范畴与 2- 项的向量空间的复形构成的 2- 范畴是等价的. 粗略地讲, 给了一个 2- 向量空间 C, $\ker(s)\xrightarrow{t}C_0$ 是一个 2- 项的向量空间的复形. 反之, 一个 2- 项的向量空间的复形 $V_1\xrightarrow{\mathrm{d}}V_0$ 给出一个 2- 向量空间: 其中对象的集合是 V_0, 态射的集合是 $V_0\oplus V_1$, 头映射 s 由 $s(v+m)=v$ 给出, 尾映射 t 由 $t(v+m)=v+\mathrm{d}m$ 给出, 这里 $v\in V_0$, $m\in V_1$.

定义 2.2 一个李 2- 代数[1)] 是一个 2- 向量空间 C 以及

(i) 一个反对称的双线性函子, 称为括号, $[\cdot,\cdot]:C\times C\to C$;

(ii) 一个反对称的多重线性的自然同构, 称为 Jacobiator,

$$J_{x,y,z}:[[x,y],z]\mapsto[x,[y,z]]+[[x,z],y],\quad \forall\, x,y,z\in C_0,$$

[1)] 在这个定义中, 反对称这个条件并没有被弱化, 这类李 2- 代数也被称为半严格的李 2- 代数. 更一般的我们有弱李 2- 代数这个概念 (参见文献 [17]), 其中 Jacobi 恒等式和反对称性都被弱化.

使得对任意的 $w,x,y,z\in C_0$, 下面的 Jacobiator 恒等式成立:

$$\begin{aligned}&J_{[w,x],y,z}([J_{w,x,z},y]+1)(J_{w,[x,z],y}+J_{[w,z],x,y}+J_{w,x,[y,z]})\\&\quad=[J_{w,x,y},z](J_{[w,y],x,z}+J_{w,[x,y],z})([J_{w,y,z},x]+1)([w,J_{x,y,z}]+1).\end{aligned}$$

如果一个李 2- 代数的 Jacobiator 是恒同的自然同构, 我们称这个李 2- 代数是严格的.

L_∞- 代数, 也称为强同伦李代数, 是由 Stasheff [18] 引入的.

定义 2.3 一个 L_∞- 代数是一个分次向量空间 $L=L_0\oplus L_{-1}\oplus\cdots$ 以及一系列的线性运算 $\{l_k\mid 1\leqslant k<\infty\}$, 其中 $l_k:\wedge^kL\to L$ 的阶数是 $\deg(l_k)=2-k$, 使得对任意的 $n\geqslant 0$, 下面等式成立:

$$\sum_{i+j=n+1}(-1)^{i(j-1)}\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{Ksgn}(\sigma)l_j(l_i(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(i)}),x_{\sigma(i+1)},\ldots,x_{\sigma(n)})=0,\tag{2.1}$$

其中 $\sigma(1)<\cdots<\sigma(i)$, $\sigma(i+1)<\cdots<\sigma(n)$, Ksgn 是 Koszul 符号:

$$x_1\wedge\cdots\wedge x_n=\mathrm{Ksgn}(\sigma)x_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge x_{\sigma(n)}.$$

特别地, 如果当 $k>2$ 时, $l_k=0$, 我们就得到了通常的微分分次李代数的概念. 如果当 $k\geqslant n$ 时, $L_{-k}=0$, 我们就称之为 n- 项 L_∞- 代数.

由于 2- 项 L_∞- 代数在本文中会反复使用, 我们给出其具体定义.

定义 2.4 [1] 一个 2- 项 L_∞- 代数是一个 2- 项的向量空间的链复形 $L:L_{-1}\xrightarrow{\mathrm{d}}L_0$ 以及线性映射 $l_2:L_{-i}\wedge L_{-j}\to L_{-(i+j)}$ $(0\leqslant i+j\leqslant 1)$ 和 $l_3:\wedge^3L_0\to L_{-1}$, 使得对任意的 $x,y,z\in L_0$, $a,b\in L_{-1}$, 下列等式成立:

(i) $\mathrm{d}l_2(x,a)=l_2(x,\mathrm{d}a)$;

(ii) $l_2(\mathrm{d}a,b)=l_2(a,\mathrm{d}b)$;

(iii) $l_2(x,l_2(y,z))+l_2(y,l_2(z,x))+l_2(z,l_2(x,y))=\mathrm{d}l_3(x,y,z)$;

(iv) $l_2(x,l_2(y,a))+l_2(y,l_2(a,x))+l_2(a,l_2(x,y))=l_3(x,y,\mathrm{d}a)$;

(v) $\sum_{i=1}^4(-1)^il_2(x_i,l_3(x_1,\ldots,\hat{x_i},\ldots,x_4))=\sum_{i<j}(-1)^{i+j}l_3(l_2(x_i,x_j),x_1,\ldots,\hat{x_i},\ldots,\hat{x_j},\ldots,x_4)$.

由于 2- 向量空间构成的 2- 范畴与 2- 项的向量空间的链复形构成的 2- 范畴是等价的, 我们可以进一步证明李 2- 代数构成的 2- 范畴与 2- 项 L_∞- 代数构成的 2- 范畴是等价的, 更多细节参见文献 [1]. 因此, 我们下面会直接称一个 2- 项 L_∞- 代数为一个李 2- 代数, 称一个 n- 项 L_∞- 代数为一个李 n- 代数. 如果一个李 2- 代数中 $l_3=0$, 我们称其为严格的李 2- 代数.

强同伦 Leibniz 代数, 或者 Lod_∞- 代数是在文献 [19] 中引入的, 更多结果参见文献 [20]. 这里给出 2- 项的情形. 文献 [21] 引入了 Leibniz 2- 代数的概念, 它可以看成 Leibniz 代数的范畴化. 由 2- 项强同伦 Leibniz 代数构成的范畴与 Leibniz 2- 代数构成的范畴是等价的. 从而, 我们会直接称一个 2- 项强同伦 Leibniz 代数为 Leibniz 2- 代数.

定义 2.5 一个 Leibniz 2- 代数 $\mathbb{V}$ 包含以下结构:

(i) 一个向量空间的复形 $\mathbb{V}:V_{-1}\xrightarrow{\mathrm{d}}V_0$;

(ii) 双线性映射 $l_2:V_{-i}\times V_{-j}\to V_{-(i+j)}$, 其中 $0\leqslant i+j\leqslant 1$;

(iii) 一个多重线性映射 $l_3:V_0\times V_0\times V_0\to V_{-1}$,

使得对任意的 $w,x,y,z\in V_0$ 和 $m,n\in V_{-1}$, 下列等式成立:

(a1) $\mathrm{d}l_2(x,m)=l_2(x,\mathrm{d}m)$,

(a2) $\mathrm{d}l_2(m,x)=l_2(\mathrm{d}m,x)$,

(a3) $l_2(\mathrm{d}m, n) = l_2(m, \mathrm{d}n)$,
(b1) $\mathrm{d}l_3(x, y, z) = l_2(x, l_2(y, z)) - l_2(l_2(x, y), z) - l_2(y, l_2(x, z))$,
(b2) $l_3(x, y, \mathrm{d}m) = l_2(x, l_2(y, m)) - l_2(l_2(x, y), m) - l_2(y, l_2(x, m))$,
(b3) $l_3(x, \mathrm{d}m, y) = l_2(x, l_2(m, y)) - l_2(l_2(x, m), y) - l_2(m, l_2(x, y))$,
(b4) $l_3(\mathrm{d}m, x, y) = l_2(m, l_2(x, y)) - l_2(l_2(m, x), y) - l_2(x, l_2(m, y))$,
(c) Jacobiator 恒等式:

$$\begin{aligned} & l_2(w, l_3(x, y, z)) - l_2(x, l_3(w, y, z)) + l_2(y, l_3(w, x, z)) + l_2(l_3(w, x, y), z) \\ & \quad - l_3(l_2(w, x), y, z) - l_3(x, l_2(w, y), z) - l_3(x, y, l_2(w, z)) \\ & \quad + l_3(w, l_2(x, y), z) + l_3(w, y, l_2(x, z)) - l_3(w, x, l_2(y, z)) = 0. \end{aligned}$$

我们通常将一个 Leibniz 2- 代数记成 $(V_{-1} \xrightarrow{\mathrm{d}} V_0, l_2, l_3)$. 特别地, 如果 l_2 和 l_3 是反对称的, 我们就得到了李 2- 代数.

3 Courant 代数胚与李 2- 代数

原始的 Courant 代数胚的定义是 Liu 等[7] 研究李双代数胚的 double 时给出的. 下面这个修正了的满足 Leibniz 法则的定义是由 Roytenberg [22] 给出的.

定义 3.1 一个 Courant 代数胚是一个四元组 $(C, \rho, S, \diamond)$, 其中 C 是 M 上的向量丛, $\rho : C \to TM$ 是丛映射 (称为锚映射), S 是 C 上非退化的对称的双线性形式, $\diamond$ 是 $\Gamma(C)$ 上的双线性运算, 使得对任意的 $X, Y, Z \in \Gamma(C)$, 以下公理成立:

(C1) $(\Gamma(C), \diamond)$ 是一个 Leibniz 代数, 即下面等式成立:

$$X \diamond (Y \diamond Z) = (X \diamond Y) \diamond Z + Y \diamond (X \diamond Z);$$

(C2) $X \diamond X = \frac{1}{2}\mathcal{D}S(X, X)$, 其中 $\mathcal{D} : C^\infty(M) \to \Gamma(C)$ 定义为

$$S(\mathcal{D}(f), X) = \rho(X)(f), \quad \forall f \in C^\infty(M);$$

(C3) $\rho(X)S(Y, Z) = S(X \diamond Y, Z) + S(Y, X \diamond Z)$.

当 M 是一点时, 向量丛 C 变成一个向量空间. 由公理 (C2) 知, $\diamond$ 是反对称的; 由公理 (C1) 知, $(\mathfrak{g}, \diamond)$ 是一个李代数; 由公理 (C3) 知, S 是 $\mathfrak{g}$ 上的不变的双线性形式. 从而, 一点上的 Courant 代数胚是一个二次李代数, 即一个李代数带有一个非退化的不变的双线性形式.

例 3.2 在 $\mathcal{T}M \triangleq TM \oplus T^*M$ 上, 定义对称的非退化的配对 $(\cdot, \cdot)_+ : \Gamma(\mathcal{T}M) \times \Gamma(\mathcal{T}M) \to C^\infty(M)$ 如下:

$$(X + \alpha, Y + \beta)_+ = \langle X, \beta \rangle + \langle Y, \alpha \rangle, \quad \forall X + \alpha, Y + \beta \in \mathfrak{X}(M) \oplus \Omega^1(M), \tag{3.1}$$

定义双线性的运算 $\diamond : \Gamma(\mathcal{T}M) \times \Gamma(\mathcal{T}M) \to \Gamma(\mathcal{T}M)$ 如下:

$$(X + \alpha) \diamond (Y + \beta) = [X, Y] + L_X\beta - \iota_Y d\alpha, \tag{3.2}$$

其中 ι 是缩并记号, 则 $(TM \oplus T^*M, \mathrm{pr}_{TM}, (\cdot, \cdot)_+, \{\cdot, \cdot\})$ 是一个 Courant 代数胚. 我们称之为标准的 Courant 代数胚.

由定义中的三条公理, 我们可以推导出许多有用的公式.

引理 3.3 令 $(C,\rho,S,\diamond)$ 是一个 Courant 代数胚. 对任意的 $X,Y\in\Gamma(C)$, $f\in C^\infty(M)$, 我们有以下公式:

$$\begin{aligned}
&\rho(X\diamond Y)=[\rho(X),\rho(Y)],\\
&\rho\circ\rho^*=0,\\
&X\diamond(fY)=f(X\diamond Y)+\rho(X)(f)Y,\\
&(fX)\diamond Y=f(X\diamond Y)-\rho(Y)(f)X+S(X,Y)\mathcal{D}(f),\\
&\mathcal{D}f\diamond Y=0,\\
&X\diamond(\mathcal{D}f)=\mathcal{D}\rho(X)(f).
\end{aligned}$$

对一个 Courant 代数胚 $(C,\rho,S,\diamond)$, 我们在截面空间 $\Gamma(C)$ 上引入一个反对称的双线性运算:

$$[\![X,Y]\!]=\frac{1}{2}(X\diamond Y-Y\diamond X),\quad \forall\, X,Y\in\Gamma(C). \tag{3.3}$$

由公理 (C2), 我们可以将 (3.3) 写成

$$[\![X,Y]\!]=X\diamond Y-\frac{1}{2}\mathcal{D}S(X,Y). \tag{3.4}$$

直接验证可得反对称的双线性运算 $[\![\cdot,\cdot]\!]$ 并不满足 Jacobi 恒等式. 为此, 我们考虑 2- 项的向量空间的复形 $C^\infty(M)\xrightarrow{\mathcal{D}}\Gamma(C)$. 在它上面我们定义 l_2 如下:

$$\begin{aligned}
&l_2(X,Y)=[\![X,Y]\!],\quad \forall\, X,Y\in\Gamma(C),\\
&l_2(X,f)=\frac{1}{2}S(X,\mathcal{D}f),\quad \forall\, X\in\Gamma(C),\quad f\in C^\infty(M),
\end{aligned}$$

定义 $l_3:\wedge^3\Gamma(C)\to C^\infty(M)$ 如下:

$$l_3(X,Y,Z)=-\frac{1}{6}(S(X\diamond Y,Z)+\text{c.p.}),\quad \forall\, X,Y,Z\in\Gamma(C).$$

定理 3.4 [11] 令 $(C,\rho,S,\diamond)$ 是一个 Courant 代数胚, 则 $(C^\infty(M),\Gamma(C),\mathcal{D},l_2,l_3)$ 是一个李 2- 代数.

证明 最初这个定理的证明是根据 Courant 代数胚所满足的性质来直接证明李 2- 代数的定义中的各条公理成立, 参见文献 [11]. 随着弱李 2- 代数 [17] 这个概念的出现, 我们可以用弱李 2- 代数反对称化之后给出李 2- 代数这个结果来证明这个定理. 大致地说, Courant 代数胚中的括号运算 $\diamond$ 并不只满足 Leibniz 代数这个条件. 虽然它不是反对称的, 但是由公理 (C2), 这个障碍是可以被控制的, 从而实际上 $C^\infty(M)\oplus\Gamma(C)$ 上有弱李 2- 代数结构, 进而通过反对称化得到李 2- 代数. 我们把细节留给感兴趣的读者. □

例 3.5 对一个一点上的 Courant 代数胚, 也就是一个二次李代数 $(\mathfrak{g},[-,-]_{\mathfrak{g}},S)$, 我们得到一个李 2- 代数 $\mathrm{d}=2$, 其中 l_2 和 l_3 由以下公式给出:

$$\begin{aligned}
&l_2(x,y)=[x,y]_{\mathfrak{g}},\quad \forall\, x,y\in\mathfrak{g},\\
&l_2(x,r)=-l_2(r,x)=0,\quad \forall\, x\in\mathfrak{g},\quad r\in\mathbb{R},\\
&l_3(x,y,z)=S([x,y]_{\mathfrak{g}},z),\quad \forall\, x,y,z\in\mathfrak{g}.
\end{aligned}$$

这个李 2- 代数被称为 string 李 2- 代数.

4 Pre-Courant 代数胚与李 2- 代数

Pre-Courant 代数胚这个概念是在文献 [23] 中引入的, 在文献 [24] 中被深入研究. 一个 Courant 向量丛是一个底流形为 M 的向量丛 E 以及 E 上一个对称的非退化的双线性形式和一个锚映射 $\rho: E \to TM$, 使得 $\rho \circ \rho^* = 0$, 其中 $\rho^*: T^*M \to E^* \cong E$ 是 ρ 的对偶映射. 更多细节参见文献 [23]. 显然, $(\ker\rho)^\perp = \rho^*(T^*M) \subset \ker(\rho)$, 从而 $\ker(\rho)$ 是 E 上的余迷向分布.

定义 4.1 一个 Courant 向量丛 (E, S, ρ) 上的一个 pre-Courant 代数胚结构是一个 $\Gamma(E)$ 上的双线性运算 $\diamond$ 满足:

(i) $\rho(e_1 \diamond e_2) = [\rho(e_1), \rho(e_2)]$;

(ii) $S(e_1 \diamond e_1, e_2) = \frac{1}{2}\rho(e_2)S(e_1, e_1)$;

(iii) $\rho(e_1)S(e_2, e_3) = S(e_1 \diamond e_2, e_3) + S(e_2, e_1 \diamond e_3)$, $\forall\, e_1, e_2, e_3 \in \Gamma(E)$.

定义 $J: \Gamma(E) \times \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ 如下:

$$J(e_1, e_2, e_3) = e_1 \diamond (e_2 \diamond e_3) - (e_1 \diamond e_2) \diamond e_3 - e_2 \diamond (e_1 \diamond e_3).$$

我们称 J 为 pre-Courant 代数胚的 Jacobiator. 当 $J = 0$ 时, 我们就得到了 Courant 代数胚这个概念. 如果存在闭的 4- 形式 $H \in \Omega^4(M)$ 使得

$$J(e_1, e_2, e_3) = \rho^*(i_{\rho(e_1)\wedge\rho(e_2)\wedge\rho(e_3)}H),$$

我们就得到了在研究 3 维带 Wess-Zumino 项的 sigma 模型时得到的由闭的 4- 形式 H 扭曲的 Courant 代数胚的概念 (参见文献 [21,25]).

对一个 pre-Courant 代数胚 E, 记 $C^k_{\mathcal{D}}(E) = \Gamma(\wedge^k \ker(\rho))$. 通过 E^* 和 E 的同构, 我们可以将其看成 $\Gamma(\wedge^k E^*)$ 的子集. $C^k_{\mathcal{D}}(E)$ 可以由以下式子刻画:

$$C^k_{\mathcal{D}}(E) = \{\psi \in \Gamma(\wedge^k E^*) \mid i_{\mathcal{D}f}\psi = 0, \forall\, f \in C^\infty(M)\}. \tag{4.1}$$

定义协变导数 $\mathcal{D}: C^k_{\mathcal{D}}(E) \to C^{k+1}_{\mathcal{D}}(E)$ 如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\psi(e_1, \ldots, e_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}\rho(e_i)\psi(e_1, \ldots, \hat{e_i}, \ldots, e_{k+1}) \\ &+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\psi(e_i \diamond e_j, e_1, \ldots, \hat{e_i}, \ldots, \hat{e_j}, \ldots, e_{k+1}).\end{aligned} \tag{4.2}$$

由于 Jacobiator 不等于零, 因此, $\mathcal{D}^2 \neq 0$.

对 $\psi \in C^k_{\mathcal{D}}(E)$, 它诱导了 $\psi^\sharp: \Gamma(\wedge^{k-1}E) \to \Gamma(\ker(\rho))$ 如下:

$$S(\psi^\sharp(e_1, \ldots, e_{k-1}), e_k) := \psi(e_1, \ldots, e_k).$$

记

$$C^k_{\mathcal{D}}(E, \ker(\rho)) = \{\psi^\sharp \mid \psi \in C^{k+1}_{\mathcal{D}}(E)\}. \tag{4.3}$$

具体地, $\phi: \Gamma(\wedge^k E) \to \Gamma(E)$ 属于 $C^k_{\mathcal{D}}(E, \ker(\rho))$ 当且仅当

(i) $\mathrm{Im}\phi \subset \ker(\rho)$;

(ii) $i_{\mathcal{D}f}\phi = 0$, $\forall\, f \in C^\infty(M)$;

(iii) 映射 $(e_1,\dots,e_k,e_{k+1})\mapsto S(\phi(e_1,\dots,e_k),e_{k+1})$ 是反对称的.

定义协变导数 $\partial: C^k_{\mathcal{D}}(E,\ker(\rho))\to C^{k+1}_{\mathcal{D}}(E,\ker(\rho))$ 如下:

$$\begin{aligned}\partial\phi(e_1,\dots,e_{k+1})=&\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}e_i\diamond\phi(e_1,\dots,\hat{e_i},\dots,e_{k+1})\\&+(-1)^{k+1}\phi(e_1,\dots,e_k)\diamond e_{k+1}\\&+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\phi(e_i\diamond e_j,e_1,\dots,\hat{e_i},\dots,\hat{e_j},\dots,e_{k+1}).\end{aligned}$$

对 $\phi\in C^k_{\mathcal{D}}(E,\ker(\rho))$, 定义 $\phi^\flat\in C^{k+1}_{\mathcal{D}}(E)$ 使得 $(\phi^\flat)^\sharp=\phi$, 即

$$\phi^\flat(e_1,\dots,e_{k+1})=S(\phi(e_1\dots.,e_k),e_{k+1}).$$

引理 4.2 [24] 对任意的 $\psi\in C^k_{\mathcal{D}}(E)$, 有 $\mathcal{D}\psi=(\partial\psi^\sharp)^\flat$.

定理 4.3 [24] 对 pre-Courant 代数胚 $(E,S,\rho,\diamond)$, 我们有 Jacobiator $J\in C^3_{\mathcal{D}}(E,\ker(\rho))$, 且 $\partial J=0$. 或者等价地, $J^\flat\in C^4_{\mathcal{D}}(E)$, 且 $\mathcal{D}(J^\flat)=0$.

注 4.4 这个定理说明, 虽然在 pre-Courant 代数胚的定义中对 Jacobiator 并没有任何要求, 但是实际上 Jacobiator 自然满足某种闭的条件. 这个结果是非常深刻的, 对我们分析其背后的代数性质至关重要.

有了以上准备, 我们可以证明一个 pre-Courant 代数胚 $(E,S,\rho,\diamond)$ 可以给出一个 Leibniz 2- 代数. 为此, 我们考虑复形

$$\mathbb{E}:\Gamma(\ker(\rho))\xrightarrow{i}\Gamma(E),\tag{4.4}$$

其中 i 表示含入映射. 定义 $l_2:\mathbb{E}\times\mathbb{E}\to\mathbb{E}$ 如下:

$$\begin{cases}l_2(e_1,e_2)=e_1\diamond e_2, & \forall\, e_1,e_2\in\Gamma(E),\\ l_2(e,\kappa)=e\diamond\kappa, & \forall\, e\in\Gamma(E),\quad \kappa\in\Gamma(\ker(\rho)),\\ l_2(\kappa,e)=\kappa\diamond e, & \forall\, e\in\Gamma(E),\quad \kappa\in\Gamma(\ker(\rho)).\end{cases}\tag{4.5}$$

定义 $l_3:\wedge^3\mathbb{E}\to\mathbb{E}$ 如下:

$$l_3(e_1,e_2,e_3)=J(e_1,e_2,e_3),\quad \forall\, e_1,e_2,e_3\in\Gamma(E).\tag{4.6}$$

定理 4.5 [24] 对 pre-Courant 代数胚 $(E,S,\rho,\diamond)$, $(\mathbb{E},l_2,l_3)$ 是一个 Leibniz 2- 代数, 其中 $\mathbb{E}$、l_2 和 l_3 由 (4.4)–(4.6) 给出.

证明 由定义, 很容易得到性质 (a1)–(a3) 和 (b1)–(b4) 是成立的. 由定理 4.3 知, 性质 (c) 也成立. 因此, $(\mathbb{E},l_2,l_3)$ 是一个 Leibniz 2- 代数. □

在本节的最后, 我们通过一个 pre-Courant 代数胚 $(E,S,\rho,\diamond)$ 构造一个李 2- 代数. 定义反对称的双线性运算如下:

$$[\![e_1,e_2]\!]=\frac{1}{2}(e_1\circ e_2-e_2\circ e_1)=e_1\circ e_2-\frac{1}{2}\mathcal{D}S(e_1,e_2).\tag{4.7}$$

记 $\mathcal{J}:\wedge^3\Gamma(E)\to\Gamma(E)$ 为其 Jacobiator:

$$\mathcal{J}(e_1,e_2,e_3)=[\![e_1,[\![e_2,e_3]\!]]\!]+[\![e_2,[\![e_3,e_1]\!]]\!]+[\![e_3,[\![e_1,e_2]\!]]\!].$$

我们有

$$\mathcal{J}(e_1,e_2,e_3)=J(e_1,e_2,e_3)-\mathcal{D}T(e_1,e_2,e_3),$$

其中 $T(e_1,e_2,e_3)$ 由下式给出:

$$T(e_1,e_2,e_3)=\frac{1}{6}(S([\![e_1,e_2]\!],e_3)+\text{c.p.}).$$

考虑 2- 项向量空间的复形

$$\mathcal{E}:\Gamma(\ker(\rho))\xrightarrow{i}\Gamma(E). \tag{4.8}$$

定义 $\mathfrak{l}_2:\wedge^2\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ 如下:

$$\begin{cases}\mathfrak{l}_2(e_1,e_2)=[\![e_1,e_2]\!], & \forall\, e_1,e_2\in\Gamma(E),\\ \mathfrak{l}_2(e_1,\kappa)=[\![e_1,\kappa]\!], & \forall\, e_1\in\Gamma(E),\quad \kappa\in\Gamma(\ker(\rho)).\end{cases} \tag{4.9}$$

定义 $l_3:\wedge^3\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ 如下:

$$\mathfrak{l}_3(e_1,e_2,e_3)=\mathcal{J}(e_1,e_2,e_3),\quad \forall\, e_1,e_2,e_3\in\Gamma(E). \tag{4.10}$$

定理 4.6 [24] 对一个 pre-Courant 代数胚 $(E,S,\rho,\diamond)$, $(\mathcal{E},\mathfrak{l}_2,\mathfrak{l}_3)$ 是一个李 2- 代数, 其中 $\mathcal{E}$、$\mathfrak{l}_2$ 和 $\mathfrak{l}_3$ 由 (4.8)–(4.10) 给出.

5 CLWX 2- 代数胚与李 3- 代数

CLWX 2- 代数胚是在文献 [15] 中引入的, 它可以看成 Courant 代数胚的范畴化. 一个 Courant 代数胚可以给出一个李 2- 代数, 作为这个结果的高阶推广, 一个 CLWX 2- 代数胚可以给出一个李 3- 代数.

定义 5.1 [15] 一个 CLWX 2- 代数胚是一个 M 上分次向量丛 $\mathcal{E}=E_{-1}\oplus E_0$ 以及 $\mathcal{E}$ 上的一个非退化的分次对称的双线性形式 S, 一个双线性运算 $\diamond:\Gamma(E_{-i})\times\Gamma(E_{-j})\to\Gamma(E_{-(i+j)})$, $0\leqslant i+j\leqslant 1$, 它在 $\Gamma(E_0)\times\Gamma(E_0)$ 是反对称的, 一个 E_0 上的 E_{-1}- 值的 3- 形式 Ω, 两个丛映射 $\partial:E_{-1}\to E_0$ 和 $\rho:E_0\to TM$, 使得 E_{-1} 和 E_0 是迷向的, 并且下列公理成立:

(i) $(\Gamma(E_{-1}),\Gamma(E_0),\partial,\diamond,\Omega)$ 是一个 Leibniz 2- 代数;

(ii) 对任意的 $e\in\Gamma(\mathcal{E})$, $e\diamond e=\frac{1}{2}\mathcal{D}S(e,e)$, 其中 $\mathcal{D}:C^\infty(M)\to\Gamma(E_{-1})$ 由下式定义:

$$S(\mathcal{D}f,e^0)=\rho(e^0)(f),\quad \forall\, e^0\in\Gamma(E_0); \tag{5.1}$$

(iii) 对任意的 $e_1^1,e_2^1\in\Gamma(E_{-1})$, $S(\partial(e_1^1),e_2^1)=S(e_1^1,\partial(e_2^1))$;

(iv) 对任意的 $e_1,e_2,e_3\in\Gamma(\mathcal{E})$, $\rho(e_1)S(e_2,e_3)=S(e_1\diamond e_2,e_3)+S(e_2,e_1\diamond e_3)$;

(v) 对任意的 $e_1^0,e_2^0,e_3^0,e_4^0\in\Gamma(E_0)$, $S(\Omega(e_1^0,e_2^0,e_3^0),e_4^0)=-S(e_3^0,\Omega(e_1^0,e_2^0,e_4^0))$.

记一个 CLWX 2- 代数胚为 $(E_{-1},E_0,\partial,\rho,S,\diamond,\Omega)$, 或者简记为 $\mathcal{E}$. 由于一个 CLWX 2- 代数胚的截面是一个 Leibniz 2- 代数, 一个 Courant 代数胚的截面是一个 Leibniz 代数并且 Leibniz 2- 代数是 Leibniz 代数的范畴化, 从而可以将 CLWX 2- 代数胚看成 Courant 代数胚的范畴化.

注 5.2 当 M 是一点时, E_0 和 E_{-1} 都是向量空间, $\mathcal{D}$ 和 ρ 都不存在. 此时, $\diamond$ 是反对称的. 从而 $(E_{-1}, E_0, \partial, \diamond, \Omega)$ 是一个李 2- 代数. 另外, S 是一个度为 1 的配对. 定义 5.1 中公理 (iii) 和 (iv) 说明 S 是不变的. 因此, 我们得到一个度量 (二次) 李 2- 代数. 具体地, 一个二次李 2- 代数是一个带有度为 1 分次对称的双线性形式 S 的李 2- 代数 $(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0, l_1, l_2, l_3)$ 使得 $\mathfrak{g}_{-1}$ 同构于 $\mathfrak{g}_0^*$, 且下面的不变性条件成立:

$$S(l_1(x^1), y^1) = S(l_1(y^1), x^1), \tag{5.2}$$

$$S(l_2(x, y^0), z^1) = -S(l_2(x, z^1), y^0), \tag{5.3}$$

$$S(l_3(x^0, y^0, z^0), u^0) = -S(l_3(x^0, y^0, u^0), z^0), \tag{5.4}$$

其中 $x^0, y^0, z^0, u^0 \in \mathfrak{g}_0$, $x^1, y^1 \in \mathfrak{g}_{-1}$, $x \in \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$.

我们在 $\Gamma(\mathcal{E})$ 上引入反对称的运算:

$$[\![e_1, e_2]\!] = \frac{1}{2}(e_1 \diamond e_2 - e_2 \diamond e_1), \quad \forall\, e_1, e_2 \in \Gamma(\mathcal{E}). \tag{5.5}$$

由定义 5.1 中公理 (ii), 我们可以将 (5.5) 写成

$$[\![e_1, e_2]\!] = e_1 \diamond e_2 - \frac{1}{2}\mathcal{D}S(e_1, e_2). \tag{5.6}$$

令 $(E_{-1}, E_0, \partial, \rho, S, \diamond, \Omega)$ 是一个 CLWX 2- 代数胚. 考虑分次向量空间 $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_{-2} \oplus \mathfrak{e}_{-1} \oplus \mathfrak{e}_0$, 其中 $\mathfrak{e}_0 = \Gamma(E_0)$, $\mathfrak{e}_{-1} = \Gamma(E_{-1})$, $\mathfrak{e}_{-2} = C^\infty(M)$.

定理 5.3 [15] 一个 CLWX 2- 代数胚 $(E_{-1}, E_0, \partial, \rho, S, \diamond, \Omega)$ 给出一个李 3- 代数 $(\mathfrak{e}, l_1, l_2, l_3, l_4)$, 其中 l_i 由以下公式给出:

$$\begin{aligned}
&l_1(f) = \mathcal{D}(f), \quad \forall\, f \in C^\infty(M),\\
&l_1(e^1) = \partial(e^1), \quad \forall\, e^1 \in \Gamma(E_{-1}),\\
&l_2(e_1^0 \wedge e_2^0) = [\![e_1^0, e_2^0]\!], \quad \forall\, e_1^0, e_2^0 \in \Gamma(E_0),\\
&l_2(e^0 \wedge e^1) = [\![e^0, e^1]\!], \quad \forall\, e^0 \in \Gamma(E_0), \quad e^1 \in \Gamma(E_{-1}),\\
&l_2(e^0 \wedge f) = \frac{1}{2}S(e^0, \mathcal{D}f), \quad \forall\, e^0 \in \Gamma(E_0), \quad f \in C^\infty(M),\\
&l_2(e_1^1 \vee e_2^1) = 0, \quad \forall\, e_1^1, e_2^1 \in \Gamma(E_{-1}),\\
&l_3(e_1^0 \wedge e_2^0 \wedge e_3^0) = \Omega(e_1^0, e_2^0, e_3^0), \quad \forall\, e_1^0, e_2^0, e_3^0 \in \Gamma(E_0),\\
&l_3(e_1^0 \wedge e_2^0 \wedge e^1) = -T(e_1^0, e_2^0, e^1), \quad \forall\, e_1^0, e_2^0 \in \Gamma(E_0), \quad e^1 \in \Gamma(E_{-1}),\\
&l_4(e_1^0 \wedge e_2^0 \wedge e_3^0 \wedge e_4^0) = \overline{\Omega}(e_1^0, e_2^0, e_3^0, e_4^0), \quad \forall\, e_1^0, e_2^0, e_3^0, e_4^0 \in \Gamma(E_0),
\end{aligned}$$

这里反对称的 $T : \Gamma(E_0) \times \Gamma(E_0) \times \Gamma(E_{-1}) \to C^\infty(M)$ 由下式给出:

$$T(e_1^0, e_2^0, e^1) = \frac{1}{6}(S(e_1^0, [\![e_2^0, e^1]\!]) + S(e^1, [\![e_1^0, e_2^0]\!]) + S(e_2^0, [\![e^1, e_1^0]\!])), \tag{5.7}$$

$\overline{\Omega} : \wedge^4\Gamma(E_0) \to C^\infty(M)$ 由下式给出:

$$\overline{\Omega}(e_1^0, e_2^0, e_3^0, e_4^0) = S(\Omega(e_1^0, e_2^0, e_3^0), e_4^0).$$

注 5.4 文献 [26] 引入了弱李 3- 代数的定义. 正如弱李 2- 代数, 弱李 3- 代数是将李 3- 代数中对诸括号 l_i 的反对称性取消并加以合适的同伦项来控制它们. 正像 E_∞ 代数是将 C_∞ 代数的诸乘法的对称性取消并加以合适的同伦项来控制它们一样, 我们也应该有所谓的 EL_∞ 代数 (及 operad) 来正确地包括弱李 2 和弱李 3- 代数. 目前, 这方面的研究前沿还没有具体的公式来定义 EL_∞- 代数, 所以弱李 3- 代数, 作为 EL_∞ 代数的 3 项截断, 是这方面现在最优的结果. 而我们以上的 CLWX 2- 代数胚, 可以直接给出一个弱李 3- 代数, 定理 5.3 中的李 3- 代数是这个弱李 3- 代数的反对称化后的结果.

例 5.5 令 $(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0, l_1, l_2, l_3, S)$ 是一个二次李 2- 代数 (一点上的 CLWX 2- 代数胚). 在 3- 项向量空间复形 $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0$ 上, 其中 $\mathbb{R}$ 的度为 -2, 我们定义 $\mathfrak{l}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ 如下:

$$\begin{cases} \mathfrak{l}_1(r) = 0, \quad \mathfrak{l}_1(x^1) = l_1(x^1), \\ \mathfrak{l}_2(x^0, y^0) = l_2(x^0, y^0), \quad \mathfrak{l}_2(x^0, y^1) = l_2(x^0, y^1), \\ \mathfrak{l}_2(x^0, r) = 0, \quad \mathfrak{l}_2(x^1, y^1) = 0, \\ \mathfrak{l}_3(x^0, y^0, z^0) = l_3(x^0, y^0, z^0), \\ \mathfrak{l}_3(x^0, y^0, z^1) = \dfrac{1}{2} S(z^1, l_2(x^0, y^0)), \\ \mathfrak{l}_4(x^0, y^0, z^0, u^0) = S(l_3(x^0, y^0, z^0), u^0), \end{cases} \tag{5.8}$$

则 $(\mathbb{R}, \mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3, \mathfrak{l}_4)$ 是一个李 3- 代数.

我们将这个李 3- 代数称为 string 李 2- 代数的高阶推广.

6 (非交换) Omni-(n-) 李代数与李 2- 代数

6.1 Omni- 李代数

Omni- 李代数这个概念是由 Weinstein [27] 引入的.

定义 6.1 一个向量空间 V 给出的 omni- 李代数是一个三元组 $(\mathfrak{gl}(V) \oplus V, (\cdot,\cdot)_+, \{\cdot,\cdot\})$, 其中对称的非退化的 V- 值配对 $(\cdot,\cdot)_+$ 由下式给出:

$$(A + u, B + v)_+ = Av + Bu, \quad \forall\, A + u, B + v \in \mathfrak{gl}(V) \oplus V, \tag{6.1}$$

双线性的括号运算 $\{\cdot,\cdot\}$ 由下式给出:

$$\{A + u, B + v\} = [A, B] + Av. \tag{6.2}$$

我们有以下公式:

$$(\{A + u, B + v\}, C + w)_+ + (B + v, \{A + u, C + w\})_+ = A(B + v, C + w)_+.$$

Omni- 李代数有许多重要性质:

(i) Omni- 李代数是标准 Courant 代数胚的线性化 [27];

(ii) $(\mathfrak{gl}(V) \oplus V, \{\cdot,\cdot\})$ 是一个 Leibniz 代数, 即下面等式成立:

$$\{e_1, \{e_2, e_3\}\} = \{\{e_1, e_2\}, e_3\} + \{e_2, \{e_1, e_3\}\}, \quad \forall\, e_1, e_2, e_3 \in \mathfrak{gl}(V) \oplus V,$$

因此, omni- 李代数为 Leibniz 代数提供了自然的例子;

(iii) 尽管 $(\mathfrak{gl}(V)\oplus V,\{\cdot,\cdot\})$ 不是李代数, 从 V 到 $\mathfrak{gl}(V)$ 的算子给出的 Dirac 结构刻画了 V 上所有的李代数结构.

下面具体刻画由 omni- 李代数给出的李 2- 代数. 定义反对称的双线性运算 $[\![\cdot,\cdot]\!]$:

$$[\![(A,u),(B,v)]\!]=\left([A,B],\frac{1}{2}(Av-Bu)\right),\quad \forall A,B\in\mathfrak{gl}(V),\quad u,v\in V. \tag{6.3}$$

(6.3) 中的因子 $\frac{1}{2}$ 使得 Jacobi 恒等式不成立. 具体地, 我们有

$$\begin{aligned}[\![[\![(A,u),(B,v)]\!],(C,w)]\!]+\text{c.p.}&=\frac{1}{4}([A,B]w+[B,C]u+[C,A]v)\\&\triangleq T((A,u),(B,v),(C,w)).\end{aligned}$$

因此, $[\![\cdot,\cdot]\!]$ 并不是一个李括号. 然而, 我们可以得到一个李 2- 代数. 考虑 2- 项的向量空间的复形 $V\xrightarrow{i}\mathfrak{gl}(V)\oplus V$, 其中 i 为含入映射. 定义 l_2 和 l_3 如下:

$$\begin{cases}l_2(e_1,e_2)=[\![e_1,e_2]\!], & e_1,e_2\in\mathfrak{gl}(V)\oplus V,\\ l_2(e,f)=[\![e,f]\!], & e\in\mathfrak{gl}(V)\oplus V,\quad f\in V,\\ l_3(e_1,e_2,e_3)=-T(e_1,e_2,e_3), & e_1,e_2,e_3\in\mathfrak{gl}(V)\oplus V.\end{cases} \tag{6.4}$$

定理 6.2 对任意的一个向量空间 V, $(V\xrightarrow{i}\mathfrak{gl}(V)\oplus V,l_2,l_3)$ 是一个李 2- 代数, 其中 l_2 和 l_3 由 (6.4) 给出.

6.2 非交换 Omni- 李代数

令 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 是一个李代数, $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 是其共轭映射.

定义 6.3 [28] 一个对应于李代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 的非交换 omni- 李代数是一个三元组 $(\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})\oplus\mathfrak{g},(\cdot,\cdot)_+,\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g}})$, 其中 $(\cdot,\cdot)_+$ 是由 (6.1) 给出的对称的非退化的 $\mathfrak{g}$- 值配对, $\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g}}$ 是由下式定义的双线性运算:

$$\{A+u,B+v\}_{\mathfrak{g}}=[A,B]+[A,\mathrm{ad}_v]+[\mathrm{ad}_u,B]-\mathrm{ad}_{Av}+Av+[u,v]_{\mathfrak{g}}. \tag{6.5}$$

一个非交换的 omni- 李代数可以看成由 Poisson 流形给出的 Courant 代数胚的线性化, 也可以看成 omni- 李代数的平凡形变, 有丰富的代数和几何性质. 更多内容参见文献 [28].

命题 6.4 记号如上, $(\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})\oplus\mathfrak{g},\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g}})$ 是一个 Leibniz 代数. 另外, $(\cdot,\cdot)_+$ 和 $\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g}}$ 是相容的:

$$(\{e_1,e_2\}_{\mathfrak{g}},e_3)_++(e_2,\{e_1,e_3\}_{\mathfrak{g}})_+=\rho_{\mathfrak{g}}(e_1)(e_2,e_3)_+, \tag{6.6}$$

其中 $\rho_{\mathfrak{g}}:\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})\oplus\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 的定义为

$$\rho_{\mathfrak{g}}(A+u)=A+\mathrm{ad}_u. \tag{6.7}$$

考虑反对称的括号 $[\![\cdot,\cdot]\!]$:

$$[\![e_1,e_2]\!]=\frac{1}{2}(\{e_1,e_2\}_{\mathfrak{g}}-\{e_2,e_1\}_{\mathfrak{g}}).$$

具体地, 我们有

$$[\![A+u,B+v]\!]=[A,B]+[A,\mathrm{ad}_v]+[\mathrm{ad}_u,B]-\frac{1}{2}(\mathrm{ad}_{Av}-\mathrm{ad}_{Bu})+\frac{1}{2}(Av-Bu)+[u,v]_{\mathfrak{g}}. \tag{6.8}$$

$[\![\cdot,\cdot]\!]$ 并不是一个李括号, 即 Jacobi 恒等式不成立. 但是我们可以得到一个李 2- 代数. 为此, 我们考虑 2-项向量空间链复形 $\mathfrak{g} \xrightarrow{l_1} \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}$, 对任意的 $u, v, w, m \in \mathfrak{g}$ 和 $A, B, C \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, l_1、l_2 和 l_3 定义如下:

$$\begin{cases} l_1(m) = m - \mathrm{ad}_m, \\ l_2(A+u, m) = \dfrac{1}{2}[u, m]_{\mathfrak{g}} + \dfrac{1}{2}Am, \\ l_2(A+u, B+v) = [\![A+u, B+v]\!], \\ l_3(A+u, B+v, C+w) = -\dfrac{1}{2}C[u, v]_{\mathfrak{g}} - \dfrac{1}{4}[A, B]w - \dfrac{1}{4}([u, Bw]_{\mathfrak{g}} + [Bu, w]_{\mathfrak{g}}) + \text{c.p.}. \end{cases}$$

定理 6.5 [14] 令 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 是一个李代数, 则 $(\mathfrak{g} \xrightarrow{l_1} \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}, l_2, l_3)$ 是一个李 2- 代数.

这个李 2- 代数是在研究同伦 Poisson 流形的余切丛所给出的 Courant 代数胚时得到的, 参见文献 [14, 例 4.10].

6.3 Omni-n- 李代数

n- 李代数, 也称为 Filippov 代数, 是在文献 [29] 中引入的, 在数学物理的许多领域都有应用, 更多内容见综述文献 [30].

定义 6.6 一个 n- 李代数是一个向量空间 $\mathfrak{g}$ 以及一个 n- 重线性反对称的括号运算 $[\cdot,\ldots,\cdot]_{\mathfrak{g}}: \wedge^n\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, 使得对任意的 $u_i, v_i \in \mathfrak{g}$, 以下基本恒等式成立:

$$[u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, [v_1, v_2, \ldots, v_n]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}} = \sum_{i=1}^{n} [v_1, v_2, \ldots, [u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, v_i]_{\mathfrak{g}}, \ldots, v_n]_{\mathfrak{g}}. \tag{6.9}$$

对 $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1} \in \mathfrak{g}$, 定义 $\mathrm{ad}: \wedge^{n-1}\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 如下:

$$\mathrm{ad}_{u_1,u_2,\ldots,u_{n-1}} v = [u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, v]_{\mathfrak{g}}, \quad \forall\, v \in \mathfrak{g},$$

则等式 (6.9) 等价于 $\mathrm{ad}_{u_1,u_2,\ldots,u_{n-1}}$ 是一个导子, 即

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{u}}[v_1, v_2, \ldots, v_n]_{\mathfrak{g}} = \sum_{i=1}^{n} [v_1, v_2, \ldots, \mathrm{ad}_{\mathfrak{u}} v_i, \ldots, v_n]_{\mathfrak{g}}, \quad \forall\, \mathfrak{u} = u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_{n-1} \in \wedge^{n-1}\mathfrak{g}. \tag{6.10}$$

对一个 n- 李代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\ldots,\cdot]_{\mathfrak{g}})$, 我们称 $\wedge^{n-1}\mathfrak{g}$ 中的元素为基本对象. 下面将 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{u}} v$ 简写成 $\mathfrak{u} \circ v$.

在基本对象的集合上定义双线性运算 $\circ: (\wedge^{n-1}\mathfrak{g}) \otimes (\wedge^{n-1}\mathfrak{g}) \to \wedge^{n-1}\mathfrak{g}$ 如下:

$$\mathfrak{u} \circ \mathfrak{v} = \sum_{i=1}^{n-1} v_1 \wedge \cdots \wedge v_{i-1} \wedge \mathfrak{u} \circ v_i \wedge v_{i+1} \wedge \cdots \wedge v_{n-1}, \tag{6.11}$$

其中 $\mathfrak{u} = u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_{n-1}$, $\mathfrak{v} = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}$. 文献 [31] 证明了 $(\wedge^{n-1}\mathfrak{g}, \circ)$ 是一个 Leibniz 代数.

令 V 是一个向量空间, $A \in \mathfrak{gl}(V)$, 定义 $\mathcal{L}_A: \otimes^{n-1}V \to \otimes^{n-1}V$ 如下:

$$\mathcal{L}_A(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} v_1 \otimes \cdots \otimes Av_i \otimes \cdots \otimes v_{n-1}.$$

定义 6.7 [32] 一个 omni n- 李代数是一个三元组 $(\mathfrak{gl}(V) \oplus \wedge^{n-1}V, (\cdot,\cdot)_+, \{\cdot,\cdot\})$, 其中 $\{\cdot,\cdot\}$ 是一个双线性的括号运算, 定义如下:

$$\{A + \mathfrak{u}, B + \mathfrak{v}\} = [A, B] + \mathcal{L}_A \mathfrak{v}, \tag{6.12}$$

$(\cdot,\cdot)_+$ 是 $(V\otimes\wedge^{n-2}V)$- 值的配对定义如下:

$$(A+\mathfrak{u},B+\mathfrak{v})_+=\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}(Av_i\otimes v_1\wedge\cdots\wedge\hat{v}_i\wedge\cdots\wedge v_{n-1}+Bu_i\otimes u_1\wedge\cdots\wedge\hat{u}_i\wedge\cdots\wedge u_{n-1}),\tag{6.13}$$

其中 $\mathfrak{u}=u_1\wedge u_2\wedge\cdots\wedge u_{n-1}$, $\mathfrak{v}=v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_{n-1}$.

注 6.8 当 $n=2$ 时, 我们就得到 Weinstein 定义的 omni- 李代数, 见定义 6.1.

命题 6.9 [32] 记号如上, $(\mathfrak{gl}(V)\oplus\wedge^{n-1}V,\{\cdot,\cdot\})$ 是一个 Leibniz 代数. 另外, $(\cdot,\cdot)_+$ 和 $\{\cdot,\cdot\}$ 满足以下关系:

$$(\{e_1,e_2\},e_3)_++(e_2,\{e_1,e_3\})_+=\rho_V(e_1)(e_2,e_3)_+,\tag{6.14}$$

其中 $e_i\in\mathfrak{gl}(V)\oplus\wedge^{n-1}V$, $i=1,2,3$, $\rho_V:\mathfrak{gl}(V)\oplus\wedge^{n-1}V\to\mathfrak{gl}(V\otimes\wedge^{n-2}V)$ 由下式给出:

$$\rho_V(A+\mathfrak{u})(\mathfrak{w})=\mathcal{L}_A\mathfrak{w},\quad\forall\,\mathfrak{w}\in V\otimes\wedge^{n-2}V.\tag{6.15}$$

令 $F:\wedge^nV\to V$ 为一个线性映射, 则 F 诱导了一个线性映射 $F^\sharp:\wedge^{n-1}V\to\mathfrak{gl}(V)$,

$$F^\sharp(\mathfrak{u})(u)=F(\mathfrak{u},u),\quad\forall\,\mathfrak{u}\in\wedge^{n-1}V,\quad u\in V.$$

将 $F^\sharp$ 的图记成 $G_F\subset\mathfrak{gl}(V)\oplus\wedge^{n-1}V$.

定理 6.10 [32] 令 $F:\wedge^nV\to V$ 是一个线性映射, 则 (V,F) 是一个 n- 李代数当且仅当 G_F 是 Leibniz 代数 $(\mathfrak{gl}(V)\oplus\wedge^{n-1}V,\{\cdot,\cdot\})$ 的 Leibniz 子代数.

证明 G_F 是 Leibniz 代数 $(\mathfrak{gl}(V)\oplus\wedge^{n-1}V,\{\cdot,\cdot\})$ 的 Leibniz 子代数当且仅当对任意 $\mathfrak{u},\mathfrak{v}\in\wedge^{n-1}V$, 有 $\{F^\sharp(\mathfrak{u})+\mathfrak{u},F^\sharp(\mathfrak{v})+\mathfrak{v}\}\in G_F$, 这等价于

$$F^\sharp(\mathcal{L}_{F^\sharp(\mathfrak{u})}\mathfrak{v})=[F^\sharp(\mathfrak{u}),F^\sharp(\mathfrak{v})].$$

由于 $\mathcal{L}_{F^\sharp(\mathfrak{u})}\mathfrak{v}=\sum_{i=1}^{n-1}v_1\wedge\cdots\wedge F(\mathfrak{u},v_i)\wedge\cdots\wedge v_{n-1}$, 上面等式等价于

$$F^\sharp(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{v})=[F^\sharp(\mathfrak{u}),F^\sharp(\mathfrak{v})],$$

即 (V,F) 是一个 n- 李代数. □

与 omni- 李代数类似, 考虑 2- 项向量空间的复形 $\wedge^{n-1}V\xrightarrow{i}\mathfrak{gl}(V)\oplus\wedge^{n-1}V$, 其中 i 代表含入映射, 以及反对称的括号

$$\begin{aligned}[\![A+\mathfrak{u},B+\mathfrak{v}]\!]&=\frac{1}{2}(\{A+\mathfrak{u},B+\mathfrak{v}\}-\{B+\mathfrak{v},A+\mathfrak{u}\})\\&=[A,B]+\frac{1}{2}(\mathcal{L}_A\mathfrak{v}-\mathcal{L}_B\mathfrak{u}).\end{aligned}$$

定义 l_2 和 l_3 如下:

$$\begin{cases}l_2(e_1,e_2)=[\![e_1,e_2]\!], & e_1,e_2\in\mathfrak{gl}(V)\oplus\wedge^{n-1}V,\\ l_2(e,f)=[\![e,f]\!], & e\in\mathfrak{gl}(V)\oplus\wedge^{n-1}V,\quad f\in\wedge^{n-1}V,\\ l_3(e_1,e_2,e_3)=-T(e_1,e_2,e_3), & e_1,e_2,e_3\in\mathfrak{gl}(V)\oplus\wedge^{n-1}V,\end{cases}\tag{6.16}$$

其中 $T:\wedge^3(\mathfrak{gl}(V)\oplus\wedge^{n-1}V)\to\wedge^{n-1}V$ 定义为

$$T(A+\mathfrak{u},B+\mathfrak{v},C+\mathfrak{w})=\frac{1}{4}(\mathcal{L}_{[A,B]}\mathfrak{w}+\mathcal{L}_{[B,C]}\mathfrak{u}+\mathcal{L}_{[C,A]}\mathfrak{v}).$$

定理 6.11 对任意的一个向量空间 V, $(\wedge^{n-1}V \xrightarrow{i} \mathfrak{gl}(V) \oplus \wedge^{n-1}V, l_2, l_3)$ 是一个李 2- 代数.

注 6.12 本节我们看到 omni- 李代数、非交换 omni- 李代数和 omni-n- 李代数给出的李 2- 代数本质上都是由 Leibniz 代数反对称化得到的. 一般地, 对任意一个 Leibniz 代数, 通过反对称化, 我们都可以得到一个李 2- 代数, 参见文献 [33].

7 n- 辛几何与李 n- 代数

定义 7.1 称一个流形 M 上的 $(n+1)$- 形式 ω 为一个多辛结构, 或者具体地, n- 辛结构, 若

(i) ω 是闭的, 即 $d\omega = 0$;

(ii) ω 是非退化的, 即对任意的 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 有

$$\iota_X \omega = 0 \Rightarrow X = 0.$$

若 ω 是 M 上的多辛结构, 则称 (M, ω) 为多辛流形, 或者 n- 辛流形.

1- 辛流形就是通常的辛流形. 一个 n- 辛结构可以诱导一个从向量场到 n- 形式的单射, 从而可以给出如下定义:

定义 7.2 令 (M, ω) 为 n- 辛流形. 称一个 $(n-1)$- 形式 α 为 Hamilton $(n-1)$- 形式, 如果存在一个向量场 X_α 使得下式成立:

$$d\alpha = -\iota_{X_\alpha}\omega.$$

同时我们称 X_α 为 Hamilton 向量场.

我们分别用 $\Omega^{n-1}_{\mathsf{Ham}}(M)$ 和 $\mathfrak{X}_{\mathsf{Ham}}(M)$ 来表示 Hamilton $(n-1)$- 形式和 Hamilton 向量场的集合. 注意到, Hamilton 向量场 X_α 如果存在则必唯一. 如果 $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$ 是闭的, 则它一定是 Hamilton $(n-1)$- 形式, 对应的 Hamilton 向量场是零向量场.

与经典的情形类似, Hamilton 向量场保多辛结构.

引理 7.3 令 X_α 是对应 $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$ 的 Hamilton 向量场, 则 $L_{X_\alpha}\omega = 0$.

证明 由 Cartan 公式, 有

$$L_{X_\alpha}\omega = \iota_{X_\alpha} d\omega + d\iota_{X_\alpha}\omega = -dd\alpha = 0.$$

证毕. □

下面对 2- 辛结构, 构造一个李 2- 代数. 对经典的辛结构, 在函数空间上有 Poisson 括号. 现在对 2- 辛结构, 我们可以在 Hamilton 1- 形式上定义一个括号 $[\cdot,\cdot]_s$ 如下:

$$[\alpha, \beta]_s = \iota_{X_\beta}\iota_{X_\alpha}\omega = \iota_{X_\alpha} d\beta, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \Omega^1_{\mathsf{Ham}}(M). \tag{7.1}$$

显然这个括号是反对称的, 另外有

$$\begin{aligned} d[\alpha, \beta]_s &= -d\iota_{X_\alpha}\iota_{X_\beta}\omega = -L_{X_\alpha}\iota_\beta\omega + \iota_{X_\alpha} d\iota_{X_\beta}\omega \\ &= -L_{X_\alpha}\iota_\beta\omega + \iota_{X_\alpha} L_{X_\beta}\omega = -\iota_{[X_\alpha, X_\beta]}\omega. \end{aligned}$$

从而, 括号 $[\cdot,\cdot]_s$ 是良定的. 但是这个括号并不满足 Jacobi 恒等式.

命题 7.4 令 (M,ω) 是一个 2- 辛流形, $\alpha,\beta,\gamma\in\Omega^1_{\mathsf{Ham}}(M)$, X_α、X_β 和 X_γ 是对应的 Hamilton 向量场, 则有

$$[\alpha,[\beta,\gamma]_s]_s+[\beta,[\gamma,\alpha]_s]_s+[\gamma,[\alpha,\beta]_s]_s=d\iota_{X_\alpha}\iota_{X_\beta}\iota_{X_\gamma}\omega. \tag{7.2}$$

证明 利用公式

$$L_X=\iota_X d+d\iota_X,\quad \iota_{[X,Y]}=L_X\iota_Y-\iota_Y L_X,\quad \forall\, X,Y\in\mathfrak{X}(M),$$

我们有

$$\begin{aligned}[\alpha,[\beta,\gamma]_s]_s+[\beta,[\gamma,\alpha]_s]_s+[\gamma,[\alpha,\beta]_s]_s&=\iota_{X_\alpha}d[\beta,\gamma]_s+\iota_{X_\beta}d[\gamma,\alpha]_s-\iota_{X_{[\alpha,\beta]_s}}d\gamma\\&=\iota_{X_\alpha}d\iota_{X_\beta}d\gamma-\iota_{X_\beta}d\iota_{X_\alpha}d\gamma-\iota_{[X_\alpha,X_\beta]}d\gamma\\&=-d\iota_{X_\alpha}\iota_{X_\beta}d\gamma\\&=d\iota_{X_\alpha}\iota_{X_\beta}\iota_{X_\gamma}\omega.\end{aligned}$$

证毕. □

下面考虑复形 $C^\infty(M)\xrightarrow{d}\Omega^1_{\mathsf{Ham}}(M)$. 定义 l_2 和 l_3 如下:

$$\begin{aligned}&l_2(\alpha,\beta)=[\alpha,\beta]_s,\quad \forall\,\alpha,\beta\in\Omega^1_{\mathsf{Ham}}(M),\\&l_2(\alpha,f)=-l_2(f,\alpha)=0,\quad \forall\,\alpha\in\Omega^1_{\mathsf{Ham}}(M),\quad f\in C^\infty(M),\\&l_3(\alpha,\beta,\gamma)=\iota_{X_\alpha}\iota_{X_\beta}\iota_{X_\gamma}\omega.\end{aligned}$$

定理 7.5 [6] 令 (M,ω) 是一个 2- 辛流形, 则 $(C^\infty(M)\xrightarrow{d}\Omega^1_{\mathsf{Ham}}(M),l_2,l_3)$ 是一个李 2- 代数.

证明 由命题 7.4, 我们只需证明定义 2.4 中公理 (v) 成立. 对任意的 $\alpha,\beta,\gamma,\theta\in\Omega^1_{\mathsf{Ham}}(M)$, 由引理 7.3, 有

$$\begin{aligned}0&=d\omega(X_\alpha,X_\beta,X_\gamma,X_\theta)=X_\alpha\omega(X_\beta,X_\gamma,X_\theta)-\omega([X_\alpha,X_\beta],X_\gamma,X_\theta)+\text{c.p.}\\&=\langle L_{X_\alpha}\omega,X_\beta,X_\gamma,X_\theta\rangle-\omega([X_\alpha,X_\beta],X_\gamma,X_\theta)-\omega(X_\beta,[X_\alpha,X_\gamma],X_\theta)\\&\quad-\omega(X_\beta,X_\gamma,[X_\alpha,X_\theta])-\omega([X_\alpha,X_\beta],X_\gamma,X_\theta)+\text{c.p.}\\&=-2\omega([X_\alpha,X_\beta],X_\gamma,X_\theta)+\text{c.p.}\\&=-2l_3([\alpha,\beta]_s,\gamma,\theta)+\text{c.p.},\end{aligned}$$

即公理 (v) 成立. □

例 7.6 [34] 令 G 是一个紧单李群, $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ 是它的李代数, 则在 G 上存在一个既左不变又右不变的 3- 形式 ω 定义如下:

$$\omega(u,v,w)=(u,[v,w]_{\mathfrak{g}})_K,\quad \forall\,u,v,w\in\mathfrak{g}.$$

这里不区分 $\mathfrak{g}$ 和左不变向量场 $\mathfrak{X}(G)^L$, $(\cdot,\cdot)_K$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的 Killing 型. 则 ω 是 G 上的一个 2- 辛结构. 为了得到有限维的李 2- 代数, 考虑左不变函数 $C^\infty(G)^L$ 和左不变 Hamilton 1- 形式 $\Omega^{1L}_{\mathsf{Ham}}(G)$. 显然, $C^\infty(G)^L=\mathbb{R}$, $\Omega^{1L}_{\mathsf{Ham}}(G)\cong\mathfrak{g}^*$. 下面为了简便, 我们不区分 $\mathfrak{g}^*$ 和 $\Omega^{1L}_{\mathsf{Ham}}(G)$. 利用 Killing 型 $(\cdot,\cdot)_K$, 任意的 $\alpha\in\mathfrak{g}^*$ 都通过关系式 $\langle\alpha,u\rangle=(X_\alpha,u)_K$ 给出 $X_\alpha\in\mathfrak{g}$, 则 X_α 就是 α 对应的 Hamilton 向量场. 这是由于

$$d\alpha(u,v)=-\alpha([u,v]_{\mathfrak{g}})=-(X_\alpha,[u,v]_{\mathfrak{g}})_K=-\iota_{X_\alpha}\omega(u,v).$$

从而得到一个李 2- 代数 $(\mathbb{R}, \mathfrak{g}^*, l_1, l_2, l_3)$, 其中 $l_1 = 0$, l_2 和 l_3 由下式给出:

$$\begin{aligned} &l_2(\alpha, \beta) = ([X_\alpha, X_\beta]_{\mathfrak{g}}, \cdot)_K, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathfrak{g}^*, \\ &l_2(\alpha, r) = -l_2(r, \alpha) = 0, \quad \forall\, \alpha \in \mathfrak{g}^*, \quad r \in \mathbb{R}, \\ &l_3(\alpha, \beta, \gamma) = -([X_\alpha, X_\beta]_{\mathfrak{g}}, X_\gamma)_K, \quad \forall\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{g}^*. \end{aligned}$$

显然这个李 2- 代数与单李代数 $\mathfrak{g}$ 给出的 string 李 2- 代数是同构的, 见例 3.5.

更一般地, 对于 n- 辛流形, 我们有下面的定理:

定理 7.7 [35] 令 (M, ω) 是一个 n- 辛流形, 则有李 n- 代数 $(\bigoplus_{i=0}^{n-1} L_{-i}, \{l_i\})$, 其中

(i) 当 $i = 0$ 时, $L_0 = \Omega^{n-1}_{\mathsf{Ham}}(M)$;

(ii) 当 $0 < i \leqslant n-1$ 时, $L_{-i} = \Omega^{n-1-i}(M)$;

(iii) $l_1 = d$;

(iv) 非平凡的 l_i $(i > 1)$ 由下式给出:

$$l_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_i) = \begin{cases} (-1)^{\frac{i}{2}+1} \iota_{X_{\alpha_i}} \cdots \iota_{X_{\alpha_1}} \omega, & i \text{ 是偶数}, \\ (-1)^{\frac{i-1}{2}} \iota_{X_{\alpha_i}} \cdots \iota_{X_{\alpha_1}} \omega, & i \text{ 是奇数}, \end{cases}$$

这里 $\alpha_1, \ldots, \alpha_i \in \Omega^{n-1}_{\mathsf{Ham}}(M)$, $X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_i}$ 是其对应的 Hamilton 向量场.

8 高阶 Courant 代数胚与李 n- 代数

在直和丛 $\mathcal{T}^n M \triangleq TM \oplus \wedge^n T^* M$ 上定义对称的非退化的 $\wedge^{n-1} T^* M$- 值的配对 $(\cdot, \cdot)_+ : \mathcal{T}^n M \times \mathcal{T}^n M \to \wedge^{n-1} T^* M$ 如下:

$$(X + \alpha, Y + \beta)_+ = i_X \beta + i_Y \alpha, \quad \forall\, X + \alpha, Y + \beta \in \mathfrak{X}(M) \oplus \Omega^n(M). \tag{8.1}$$

定义括号运算 $[\![\cdot, \cdot]\!] : \Gamma(\mathcal{T}^n M) \times \Gamma(\mathcal{T}^n M) \to \Gamma(\mathcal{T}^n M)$ 如下:

$$[\![X + \alpha, Y + \beta]\!] = [X, Y] + L_X \beta - i_Y d\alpha. \tag{8.2}$$

我们称四元组 $(TM \oplus \wedge^n T^* M, (\cdot, \cdot)_+, [\![\cdot, \cdot]\!], \mathrm{pr}_{TM})$ 为高阶标准 Courant 代数胚. 特别地, 当 $n = 1$ 时, 我们就得到了标准的 Courant 代数胚, 见例 3.2.

定义 8.1 称一个子丛 $\mathcal{L} \subset \mathcal{T}^n M$ 为迷向的, 如果对任意的截面 $e_1, e_2 \in \Gamma(\mathcal{L})$, 有

$$(e_1, e_2)_+ = 0. \tag{8.3}$$

称一个子丛 $\mathcal{L} \subset \mathcal{T}^n M$ 为对合的, 如果对任意的截面 $e_1, e_2 \in \Gamma(\mathcal{L})$, 有

$$[\![e_1, e_2]\!] \in \Gamma(L). \tag{8.4}$$

定义 8.2 令 $\mathcal{L} \subset \mathcal{T}^n M$ 为一个迷向对合子丛. 称 $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$ 为一个 Hamilton $(n-1)$- 形式, 如果存在 (并不唯一) $X_\alpha \in \mathfrak{X}(M)$ 使得 $X_\alpha + d\alpha \in \Gamma(\mathcal{L})$.

我们分别用 $\Omega^{n-1}_{\mathsf{Ham}}(M, \mathcal{L})$ 和 $\mathfrak{X}_{\mathsf{Ham}}(M, \mathcal{L})$ 来表示 Hamilton $(n-1)$- 形式和 Hamilton 向量场的集合.

定理 8.3 [36] 令 $\mathcal{L} \subset \mathcal{T}^n M$ 为一个迷向对合子丛, 则有李 n- 代数 $(\bigoplus_{i=0}^{n-1} L_{-i}, \{l_i\})$, 其中

(i) 当 $i = 0$ 时, $L_0 = \Omega^{n-1}_{\mathsf{Ham}}(M, \mathcal{L})$;

(ii) 当 $0 < i \leqslant n-1$ 时, $L_{-i} = \Omega^{n-1-i}(M)$;

(iii) $l_1 = d$;

(iv) 非平凡的 l_i $(i > 1)$ 由下式给出:

$$l_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_i) = \begin{cases} -(-1)^{\frac{i}{2}+1} \iota_{X_{\alpha_i}} \cdots \iota_{X_{\alpha_2}} d\alpha_1, & i \text{ 是偶数}, \\ -(-1)^{\frac{i-1}{2}} \iota_{X_{\alpha_i}} \cdots \iota_{X_{\alpha_2}} d\alpha_1, & i \text{ 是奇数}, \end{cases}$$

这里 $\alpha_1, \ldots, \alpha_i \in \Omega^{n-1}_{\mathsf{Ham}}(M, \mathcal{L})$, $X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_i}$ 是其对应的 Hamilton 向量场.

注 8.4 这个定理可以看成定理 7.7 的推广. 特别地, 如果 ω 是一个 n- 辛结构, 则

$$G_\omega := \{X - \iota_X \omega \mid X \in \mathfrak{X}(M)\}$$

是一个迷向对合子丛. 由定理 8.3 给出的李 n- 代数与由定理 7.7 给出的李 n- 代数是一致的.

参考文献

1 Baez J, Crans A. Higher-dimensional algebra, VI: Lie 2-algebras. Theory Appl Categ, 2004, 12: 492–538
2 Baez J, Lauda A. Higher-dimensional algebra, V: 2-groups. Theory Appl Categ, 2004, 12: 423–491
3 Baez J, Dolan J. Higher-dimensional algebra and topological quantum field theory. J Math Phys, 1995, 36: 6073–6105
4 Crane L, Frenkel I. Four dimensional topological quantum field theory, Hopf categories, and the canonical bases. J Math Phys, 1994, 35: 5136–5154
5 Lurie J. On the classification of topological field theories. Curr Dev Math, 2009, 2008: 129–280
6 Baez J, Hoffnung A, Rogers C. Categorified symplectic geometry and the classical string. Comm Math Phys, 2010, 293: 701–725
7 Liu Z, Weinstein A, Xu P. Manin triples for Lie bialgebroids. J Differential Geom, 1997, 45: 547–574
8 Gualtieri M. Generalized complex geometry. Ann of Math (2), 2011, 174: 75–123
9 Hitchin N. Generalized Calabi-Yau manifolds. Q J Math, 2003, 54: 281–308
10 Alekseev A, Kosmann-Schwarzbach Y. Manin Pairs and moment maps. J Differential Geom, 2000, 56: 133–165
11 Roytenberg D, Weinstein A. Courant algebroids and strongly homotopy Lie algebras. Lett Math Phys, 1998, 46: 81–93
12 Roytenberg D. AKSZ-BV formalism and Courant algebroid induced topological field theories. Lett Math Phys, 2007, 79: 143–159
13 Sheng Y, Zhu C. Higher extensions of Lie algebroids. Commun Contemp Math, 2017, 19: 1650034
14 Lang H, Sheng Y, Xu X. Strong homotopy Lie algebras, homotopy Poisson manifolds and Courant algebroids. Lett Math Phys, 2017, 107: 861–885
15 Liu J, Sheng Y. QP-structures of degree 3 and CLWX 2-algebroids. ArXiv:1602.01127, 2016
16 Frégier Y, Zambon M. Simultaneous deformations and Poisson geometry. Compos Math, 2015, 151: 1763–1790
17 Roytenberg D. On weak Lie 2-algebras. AIP Conf Proc, 2007, 956: 180–198
18 Stasheff J. Differential raded Lie algebras, quasi-Hopf algebras and higher homotopy algebras. In: Quantum Groups (Leningrad, 1990), vol. 1510. Berlin: Springer, 1992, 120–137
19 Livernet M. Homologie des algèbres stables de matrices sur une A_∞-algèbre. C R Acad Sci Paris Sér I Math, 1999, 329: 113–116
20 Uchino K. Derived brackets and sh Leibniz algebras. J Pure Appl Algebra, 2011, 215: 1102–1111
21 Sheng Y, Liu Z. Leibniz 2-algebras and twisted Courant algebroids. Comm Algebra, 2013, 41: 1929–1953
22 Roytenberg D. Courant algebroids, derived brackets and even symplectic supermanifolds. ArXiv:9910078, 1999
23 Vaisman I. Transitive Courant algebroids. Int J Math Math Sci, 2005, 11: 1737–1758
24 Liu Z, Sheng Y, Xu X. The Pontryagin class for pre-Courant algebroids. J Geom Phys, 2016, 104: 148–162
25 Hansen M, Strobl T. First class constrained systems and twisting of Courant algebroids by a closed 4-form. In: Fundamental Interactions, A Memorial Volume for Wolfgang Kummer. Singapore: World Scientific, 2010, 115–144

26 Dehling M. Weak Lie 3-algebras. In preparation.
27 Weinstein A. Omni-Lie algebras: Microlocal analysis of the Schrödinger equation and related topics (Japanese) (Kyoto, 1999). Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku, 2000, 1176: 95–102
28 Lang H, Sheng Y, Xu X. Nonabelian omni-Lie algebras. Banach Center Publ, 2016, 110: 167–176
29 Filippov V. n-Lie algebras. Sibirsk Mat Zh, 1985, 26: 126–140
30 de Azcárraga J, Izquierdo J. n-ary algebras: A review with applications. J Phys A, 2010, 43: 293001
31 Daletskii Y, Takhtajan L. Leibniz and Lie algebra structures for Nambu algebra. Lett Math Phys, 1997, 39: 127–141
32 Liu J, Sheng Y, Wang C. Omni n-Lie algebras and linearization of higher analogues of Courant algebroids. Int J Geom Methods Mod Phys, 2017, 14: 1750113
33 Sheng Y, Liu Z. From Leibniz algebras to Lie 2-algebras. Algebr Represent Theory, 2016, 19: 1–5
34 Baez J, Rogers C. Categorified symplectic geometry and the string Lie 2-algebra. Homology, Homotopy Appl, 2010, 12: 221–236
35 Rogers C. L_∞-algebras from multisymplectic geometry. Lett Math Phys, 2012, 100: 29–50
36 Zambon M. L_∞-algebras and higher analogues of Dirac structures and Courant algebroids. J Symplectic Geom, 2012, 10: 563–599

Poisson geometry and Lie n-algebras

SHENG YunHe & ZHU ChenChang

Abstract There is a close relation between Poisson geometry and higher categorical structures. In this paper, we mainly summarize the relation between Courant algebroids, pre-Courant algebroids and Lie 2-algebras; the relation between CLWX 2-algebroids and Lie 3-algebras; (nonabelian) omni-(n)-Lie algebras and Lie 2-algebras; multisymplectic geometry and Lie n-algebras; isotropic involutive subbundle of higher analogue of Courant algebroids and Lie n-algebras.

Keywords **Poisson geometry, Courant algebroids, multisymplectic geometry, Lie n-algebras, L_∞-algebras**

MSC(2010) **17B65, 18B40, 58H05**

doi: 10.1360/N012017-00085