拟小浪及其对小波理论的应用

施咸亮*, 王伟

湖南师范大学数学与计算机科学学院, 长沙 410081

E-mail: xianliangshi@yahoo.com, wwang.wei@yahoo.com.cn

收稿日期: 2010-05-12; 接受日期: 2011-05-05; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 10671062)、高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20094306110004) 和湖南省自然科学基金 (批准号: 06JJ5012) 资助项目

摘要 本文提出拟小浪 (quasi vaguelet) 的概念, 推广和改进了 Meyer 的 vaguelet 理论, 进一步改进了 Daubechies 和 Chui-Shi 关于 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中无条件基的判别法.

关键词 拟小浪 小波 无条件基 奇异积分

MSC (2000) 主题分类 42B20, 42B25

1 引言

在 Meyer 的专著 [1] 中, 他提出小浪 (vaguelet) 的概念. 设 $\Phi := \{f_{j,k}\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数族. 我们称 Φ 是一个小浪族, 若

$$(i) |f_{j,k}(x)| \leq C 2^{nj/2} (1 + |2^j x - k|)^{-n-\alpha};$$

$$(ii) \int_{\mathbb{R}^n} f_{j,k}(x) dx = 0;$$

$$(iii) |f_{j,k}(x') - f_{j,k}(x)| \leq C 2^{j(n/2+\beta)} |x' - x|^\beta,$$

其中 $x, x' \in \mathbb{R}^n$, $0 < \beta < \alpha$ 且 C 是一个常数.

Meyer 证明, 若 Φ 是一族小浪, 则 Φ 构成 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的 Bessel 序列, 即存在常数 B 使得

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n} |\langle f, f_{j,k} \rangle|^2 \leq B \|f\|_2^2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n). \quad (1)$$

常数 B 称为 Bessel 界. 周知 (见 [2, 3]), 不等式 (1) 等价于算子

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) dy \quad (2)$$

的 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 有界性且 $\|T\| \leq B$, 其中

$$K(x, y) := \sum_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n} f_{j,k}(x) \bar{f}_{j,k}(y).$$

通常我们称算子 (2) 为框架算子.

本文的目的是改进上述结果. 我们称 $\mathbb{R}^n$ 上的函数族 $\Phi := \{f_{j,k}\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$ 为拟小浪, 若它满足下列三个条件:

- (i) $|f_{j,k}(x)| \leq C a^{nj/2} (1 + |a^j x - k|)^{-n-\alpha}$;
- (ii) $\int_{\mathbb{R}^n} f_{j,k}(x) dx = 0$;
- (iv) $|f_{j,k}(x') - f_{j,k}(x)| \leq C a^{nj/2} \frac{1}{(1 + |\ln(a^j |x' - x|)|)^\lambda}$,

其中 $x, x' \in \mathbb{R}^n, a > 1, \alpha > 0, \lambda > 0$ 且 C 是常数.

在第 2 节中, 我们将证明下述的

定理 1 设 $\Phi = \{f_{j,k}\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$ 构成拟小浪, 其中 $\lambda > \frac{n+\alpha}{\alpha}$. 则算子

$$T_{\Theta} f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n} \theta_{j,k} \langle f, f_{j,k} \rangle f_{j,k}(x) \quad (3)$$

是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 有界的, 其中 $\Theta = \{\theta_{j,k}\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$ 是任意的有界数列.

在第 3 节中, 我们给出拟小浪对于小波理论的一个应用. 设 ψ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的函数. 以

$$\psi_{j,k}(x) = a^{jn/2} \psi(a^j x - k), \quad (j, k) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n) \quad (4)$$

表示由 ψ 产生的一个仿射函数族.

假设 ψ 满足

- (i') $|\psi(x)| \leq C(1 + |x|)^{-n-\alpha}, x \in \mathbb{R}^n$;
- (ii') $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 0$;
- (iii') 连续模

$$\omega(\psi, t) := \sup_{\substack{|x-y| \leq t \\ x, y \in \mathbb{R}^n}} |\psi(x) - \psi(y)| \leq \frac{C}{(1 + |\ln t|)^\lambda},$$

其中 $0 < t \leq 1, \lambda > \frac{n+\alpha}{\alpha}$. 则由定理 1, 我们知道算子

$$T_{\Theta} f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \theta_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x) \quad (5)$$

是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 有界的. 由第 3 节的定理 3 我们可以得到, 倘若 $\lambda > \frac{n+\alpha+1}{\alpha}$, 则 (5) 也是弱 (1,1) 型的, 并且因此它是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界的, $1 < p < \infty$.

利用这一结果, 我们建立一个关于 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中的无条件仿射基的新判别法, 它改进了 Daubechies^[4] 和 Chui-Shi^[5] 得到的判别法.

全文中 C 表示常数, 在不同的地方它们可能取不同的值.

2 定理 1 的证明

2.1 Schur 引理

为证明定理 1 我们需要下述的 Schur 引理.

引理 1 (Schur 引理) 设 $M = (m(p, q))_{p, q \in \mathbb{Z}}$ 是一个无穷矩阵, 而 $\{w(p)\}$ 是一个正数列. 假设对于一切 $p \in \mathbb{Z}$ 有

$$\sum_{q \in \mathbb{Z}} |m(p, q)| w(q) \leq w(p);$$

且对于一切 $q \in \mathbb{Z}$ 有

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} |m(p, q)| w(p) \leq w(q).$$

则 $M : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ 是一个有界的映照且 $\|M\| \leq 1$ (参见 [1]).

2.2 定理 1 的推广

设 ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上某一个有界连续函数的连续模. 我们将证明下述比定理 1 更一般的定理.

定理 2 设 $\{f_{j,k}(x)\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$ 满足

$$(i) |f_{j,k}(x)| \leq C a^{nj/2} (1 + |a^j x - k|)^{-n-\alpha};$$

$$(ii) \int_{\mathbb{R}^n} f_{j,k}(x) dx = 0;$$

$$(v) |f_{j,k}(x') - f_{j,k}(x)| \leq C a^{nj/2} \omega(a^j |x' - x|),$$

其中 $\alpha > 0$, C 是常数且对于某个 $\theta \in (0, \frac{\alpha}{n+\alpha})$, ω 满足

$$\int_0^1 \frac{\omega^\theta(t)}{t} dt < \infty.$$

则 $\{f_{j,k}(x)\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的一个 Bessel 序列. 详言之, 存在常数 $B \geq 0$, 使得对于任意的系数 $\alpha(j, k)$, 成立

$$\left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \alpha(j, k) f_{j,k}(x) \right\|_2^2 \leq B \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\alpha(j, k)|^2. \quad (6)$$

证明 为证明 (6), 我们要估计

$$f(x) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \alpha(j, k) f_{j,k}(x)$$

的 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 范数. 为此, 考察积分

$$I(j, k; j', k') = \int_{\mathbb{R}^n} f_{j,k}(x) \bar{f}_{j',k'}(x) dx.$$

设 $j' \geq j$. 首先, 我们证明不等式

$$H := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{a^{nj'}}{(1 + |a^j x - k|)^{n+\alpha} (1 + |a^{j'} x - k'|)^{n+\alpha}} dx \leq \frac{C_{n,\alpha}}{(1 + a^j |k' a^{-j'} - k a^{-j}|)^{n+\alpha}}. \quad (7)$$

记 $r = \frac{1}{2} |a^{-j} k - a^{-j'} k'|$, 分解 (7) 左边的积分 H 成两部分:

$$H = \left(\int_{|x - a^{-j} k| \leq r} + \int_{|x - a^{-j} k| > r} \right) \frac{a^{nj'}}{(1 + |a^j x - k|)^{n+\alpha} (1 + |a^{j'} x - k'|)^{n+\alpha}} dx := H_1 + H_2. \quad (8)$$

对于 H_2 , 因为 $|x - a^{-j} k| > r$, 我们有

$$\frac{1}{(1 + |a^j x - k|)^{n+\alpha}} \leq \frac{1}{(1 + a^j r)^{n+\alpha}}.$$

因此成立

$$\begin{aligned} H_2 &\leq C \frac{1}{(1 + a^j r)^{n+\alpha}} \int_{|x - a^{-j} k| > r} \frac{a^{nj'}}{(1 + |a^{j'} x - k'|)^{n+\alpha}} dx \\ &\leq C \frac{2^{n+\alpha}}{(1 + a^j 2r)^{n+\alpha}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy}{(1 + |y|)^{n+\alpha}} \\ &\leq \frac{C_{n,\alpha}}{(1 + a^j |a^{-j} k - a^{-j'} k'|)^{n+\alpha}}. \end{aligned} \quad (9)$$

对于 H_1 , 因为 $|x - a^{-j}k| \leq r$, 我们有 $|x - a^{-j'}k'| \geq r$. 由此推知

$$\begin{aligned} H_1 &\leq \frac{a^{nj'}}{(1 + a^{j'}r)^{n+\alpha}} \int_{|x - a^{-j}k| \leq r} \frac{dx}{(1 + a^j|x - a^{-j}k|)^{n+\alpha}} \\ &\leq \frac{Ca^{nj'}}{(1 + a^{j'}|a^{-j}k - a^{-j'}k'|)^{n+\alpha}} \int_{|u| \leq r} \frac{du}{(1 + a^j|u|)^{n+\alpha}}. \end{aligned} \quad (10)$$

a) 首先假设 $a^j|a^{-j}k - a^{-j'}k'| \geq 1$. 于是 $a^{j'}|a^{-j}k - a^{-j'}k'| \geq 1$. 由 (10) 推得

$$\begin{aligned} H_1 &\leq \frac{Ca^{nj'}a^{-nj}}{a^{j'(n+\alpha)}|a^{-j}k - a^{-j'}k'|^{n+\alpha}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy}{(1 + |y|)^{n+\alpha}} \\ &\leq \frac{C}{(1 + a^j|a^{-j}k - a^{-j'}k'|)^{n+\alpha}}. \end{aligned} \quad (11)$$

b) 其次假设 $a^j|a^{-j}k - a^{-j'}k'| < 1$. 由 (10) 推得

$$\begin{aligned} H_1 &\leq \frac{Ca^{nj'}r^n}{(1 + a^{j'}|a^{-j}k - a^{-j'}k'|)^{n+\alpha}} \leq \frac{Ca^{nj'}|a^{-j}k - a^{-j'}k'|^n}{(a^{j'}|a^{-j}k - a^{-j'}k'|)^n(1 + a^{j'}|a^{-j}k - a^{-j'}k'|)^\alpha} \\ &= \frac{C}{(1 + a^{j'}|a^{-j}k - a^{-j'}k'|)^\alpha}. \end{aligned} \quad (12)$$

注意到当 $a^j|a^{-j}k - a^{-j'}k'| < 1$ 时, 有

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1 + a^j|a^{-j}k - a^{-j'}k'|}.$$

因此, 由 (12) 导出

$$H_1 \leq \frac{C2^n}{(1 + a^j|a^{-j}k - a^{-j'}k'|)^{n+\alpha}}. \quad (13)$$

综合 (8), (9), (11) 和 (13), 便知 (7) 成立. 因此我们有

$$|I(j, k; j', k')| \leq Ca^{-(n/2)|j'-j|} \left(\frac{a^{-j} + a^{-j'}}{a^{-j} + a^{-j'} + |ka^{-j} - k'a^{-j'}|} \right)^{n+\alpha}. \quad (14)$$

另一方面, 由条件 (ii) 和 (v) 我们得到

$$\begin{aligned} |I(j, k; j', k')| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_{j,k}(x) - f_{j,k}(a^{-j'}k')| |\bar{f}_{j',k'}(x)| dx \\ &\leq Ca^{jn/2} \int_{\mathbb{R}^n} \omega(a^j|x - a^{-j'}k'|) |\bar{f}_{j',k'}(x)| dx \\ &\leq Ca^{(j+j')n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \omega(a^j|x|) (1 + |a^{j'}x|)^{-(n+\alpha)} dx. \end{aligned}$$

由于 $j' \geq j$, 我们得到

$$\begin{aligned} |I(j, k; j', k')| &\leq Ca^{(j+j')n/2} a^{-j'n} \int_{\mathbb{R}^n} \omega\left(\frac{|x|}{a^{|j'-j|}}\right) (1 + |x|)^{-(n+\alpha)} dx \\ &= Ca^{(j+j')n/2} a^{-j'n} \left(\int_{|x| \leq (\sqrt{a})^{|j'-j|}} + \int_{|x| > (\sqrt{a})^{|j'-j|}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \omega\left(\frac{|x|}{a^{|j'-j|}}\right)(1+|x|)^{-(n+\alpha)}dx \\ & := P_1 + P_2. \end{aligned} \quad (15)$$

显然, 我们有

$$\begin{aligned} P_1 & \leq C a^{-|j'-j|n/2} \int_{|x| \leq (\sqrt{a})^{|j'-j|}} \omega\left(\frac{|x|}{a^{|j'-j|}}\right)(1+|x|)^{-(n+\alpha)}dx \\ & \leq C a^{-|j'-j|n/2} \omega\left(\frac{1}{(\sqrt{a})^{|j'-j|}}\right) \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-(n+\alpha)}dx \\ & \leq C a^{-|j'-j|n/2} \omega\left(\frac{1}{(\sqrt{a})^{|j'-j|}}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

因为 $\omega(|x|) = O(1)$, 我们得到

$$P_2 \leq C a^{-|j'-j|n/2} \int_{|x| > (\sqrt{a})^{|j'-j|}} \frac{dx}{(1+|x|)^{n+\alpha}} \leq C a^{-|j'-j|n/2 - \frac{1}{2}\alpha|j'-j|}. \quad (17)$$

综合 (15)–(17), 我们导出

$$|I(j, k; j', k')| \leq C \left(a^{-|j'-j|n/2} \omega\left(\frac{1}{(\sqrt{a})^{|j'-j|}}\right) + a^{-|j'-j|n/2 - \frac{1}{2}\alpha|j'-j|} \right). \quad (18)$$

由 (14) 和 (18), 对于 $I(j, k; j', k')$ 我们有两个上界, 即

$$M_1 := C a^{-(n/2)|j'-j|} \left(\frac{a^{-j} + a^{-j'}}{a^{-j} + a^{-j'} + |ka^{-j} - k'a^{-j'}|} \right)^{n+\alpha}$$

和

$$M_2 := C \left(a^{-|j'-j|n/2} \omega\left(\frac{1}{(\sqrt{a})^{|j'-j|}}\right) + a^{-|j'-j|n/2 - \frac{1}{2}\alpha|j'-j|} \right).$$

因此, 对于 $0 < \theta < 1$, $M_3 := M_1^{1-\theta} M_2^\theta$ 也是 $I(j, k; j', k')$ 的上界.

由假设, $0 < \theta < \frac{\alpha}{n+\alpha}$, 从而 $(n+\alpha)(1-\theta) > n$, 因此存在正数 γ 使得

$$\begin{aligned} |I(j, k; j', k')| & \leq C a^{-|j'-j|(n/2+\gamma)} \left(\frac{a^{-j} + a^{-j'}}{a^{-j} + a^{-j'} + |ka^{-j} - k'a^{-j'}|} \right)^{n+\gamma} \\ & \quad + C a^{-|j'-j|n/2} \omega^\theta\left(\frac{1}{(\sqrt{a})^{|j'-j|}}\right) \left(\frac{a^{-j} + a^{-j'}}{a^{-j} + a^{-j'} + |ka^{-j} - k'a^{-j'}|} \right)^{n+\gamma} \\ & := C [I^{(1)}(j, k; j', k') + I^{(2)}(j, k; j', k')]. \end{aligned} \quad (19)$$

由 $I(j, k; j', k')$ 的对称性不难得到 (19) 对于 $j > j'$ 的情形也成立.

下面我们应用 Schur 引理来完成定理 2 的证明.

根据与 [1, 第 223 页] 类似的讨论, 易见对于 $w_{j,k} = a^{-nj/2}$, 有

$$\sum_{j' \in \mathbb{Z}, k' \in \mathbb{Z}^n} I^{(1)}(j, k; j', k') w_{j',k'} \leq C w_{j,k} \quad (20)$$

和

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n} I^{(1)}(j, k; j', k') w_{j,k} \leq C w_{j',k'}. \quad (21)$$

下面考虑 $I^{(2)}(j, k; j', k')$. 写

$$\begin{aligned} Q &:= \sum_{j' \in \mathbb{Z}} \sum_{k' \in \mathbb{Z}^n} a^{-|j'-j|n/2} \omega^\theta \left(\frac{1}{(\sqrt{a})^{|j'-j|}} \right) \left(\frac{a^{-j} + a^{-j'}}{a^{-j} + a^{-j'} + |ka^{-j} - k'a^{-j'}|} \right)^{n+\gamma} w_{j', k'} \\ &= \left(\sum_{j' \geq j} + \sum_{j' < j} \right) \sum_{k' \in \mathbb{Z}^n} a^{-nj'/2} a^{-|j'-j|n/2} \omega^\theta \left(\frac{1}{(\sqrt{a})^{|j'-j|}} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{a^{-j} + a^{-j'}}{a^{-j} + a^{-j'} + |ka^{-j} - k'a^{-j'}|} \right)^{n+\gamma} \\ &:= Q_1 + Q_2. \end{aligned}$$

若 $j' \geq j$, 则记 $d = j' - j$ 和

$$F := \frac{a^{-j} + a^{-j'}}{a^{-j} + a^{-j'} + |a^{-j}k - a^{-j'}k'|}. \quad (22)$$

注意到 $F \leq \frac{2}{1+|k-a^{-d}k'|}$, 我们得到

$$\begin{aligned} Q_1 &= a^{-nj/2} \sum_{j' \geq j} \left(\sum_{k'} a^{-nd} F^{n+\gamma} \right) \omega^\theta \left(\frac{1}{(\sqrt{a})^{|j'-j|}} \right) \\ &\leq C a^{-nj/2} \sum_{j' \geq j} \left(\sum_{k'} a^{-nd} (1 + |k - a^{-d}k'|)^{-n-\gamma} \right) \omega^\theta \left(\frac{1}{(\sqrt{a})^{|j'-j|}} \right). \end{aligned}$$

由 Riemann 和估计导出

$$\sum_{k' \in \mathbb{Z}^n} a^{-nd} (1 + |k - a^{-d}k'|)^{-n-\gamma} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy}{(1 + |k - y|)^{n+\gamma}} = C$$

和

$$\sum_{j' \geq j} \omega^\theta \left(\frac{1}{(\sqrt{a})^{|j'-j|}} \right) \leq C \int_0^1 \frac{\omega^\theta(u)}{u} du = C.$$

我们得到 $Q_1 \leq C w_{j,k}$.

类似地, 若 $j' < j$, 则记 $d = j - j'$. 由 (22) 定义的 F 有上界 $2(1 + |a^{-d}k - k'|)^{-1}$. 对于这种情形同样可由 Riemann 和估计导出

$$\sum_{k' \in \mathbb{Z}^n} F^{n+\gamma} \leq C_{n,\gamma} \sum_{k' \in \mathbb{Z}^n} (1 + |a^{-d}k - k'|)^{-n-\gamma} \leq C_{n,\gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy}{(1 + |a^{-d}k - y|)^{n+\gamma}} = C.$$

由于

$$\sum_{j' < j} a^{-nj'/2} a^{-|j-j'|n/2} \omega^\theta \left(\frac{1}{(\sqrt{a})^{|j-j'|}} \right) \leq C a^{-nj/2},$$

我们有 $Q_2 \leq C w_{j,k}$. 综合起来导出

$$Q = Q_1 + Q_2 \leq C w_{j,k}.$$

这就证明了对于 $w_{j,k} = a^{-nj/2}$, 有

$$\sum_{j' \in \mathbb{Z}, k' \in \mathbb{Z}^n} I^{(2)}(j, k; j', k') w_{j', k'} \leq C w_{j,k}. \quad (23)$$

由对称性同样可得

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n} I^{(2)}(j, k; j', k') w_{j,k} \leq C w_{j',k'}. \quad (24)$$

由 (19)–(21), (23) 和 (24), 应用 Schur 引理可得 Gramm 矩阵 $\{I(j, k; j', k')\}$ 是 $l^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n)$ 到 $l^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n)$ 的有界算子. 这等价于 $\{f_{j,k}(x)\}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的 Bessel 序列. 定理 2 证明完毕.

2.3 定理 1 的证明

设定理 1 的条件 (iv) 满足. 又设 $\omega(t)$ 是某连续函数的连续模, 满足

$$\omega(t) \leq \frac{C}{(1 + |\ln t|)^\lambda}, \quad 0 < t \leq 1,$$

其中 $\lambda > \frac{n+\alpha}{\alpha}$. 设

$$\lambda = \frac{n+\alpha}{\alpha} + \beta, \quad \beta > 0.$$

取 $\theta = \frac{\alpha}{n+\alpha} - \delta$, 其中 $\delta = \frac{\alpha^2 \beta}{2(n+\alpha)(n+\alpha+\alpha\beta)}$. 则有 $\theta\lambda > 1$, 从而

$$\int_0^1 \frac{\omega^\theta(t)}{t} dt \leq \int_{1/2}^1 \frac{\omega^\theta(t)}{t} dt + \int_0^{1/2} \frac{C}{t(\ln \frac{1}{t})^{\lambda\theta}} dt < \infty.$$

因此 $\omega(t)$ 也满足定理 2 的条件. 根据定理 2 便知定理 1 成立. 于是证明了定理 1.

3 对于小波理论的应用

在这一节中, 我们将把拟小浪应用于小波理论. 为此先把定理 2 的结论推广到 $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. 详言之, 我们将证明下述的

定理 3 设 $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 满足下列条件,

i)

$$|\psi(x)| \leq C(1 + |x|)^{-n-\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad (25)$$

ii) ψ 的连续模 $\omega(\psi, t)$ 满足

$$\int_0^1 \frac{\omega^\theta(\psi, t)}{t} dt < \infty, \quad (26)$$

其中 $\alpha > 0$, $0 < \theta < \frac{\alpha}{n+\alpha+1}$. 则对于一切有界数列 Θ 和 $p \in (1, \infty)$, 由 (5) 定义的算子 T_Θ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中是有界的当且仅当 $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 0$.

证明 首先证明条件 $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 0$ 的必要性. 由于 T_Θ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 有界的, 故 $\{\psi_{j,k}(x)\}$ 是 Bessel 序列, 即满足“框架”的上界估计. 因此存在常数 B 使得对于几乎所有的 ω , 成立

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a^j \omega)|^2 \leq B, \quad (27)$$

其中 $\hat{\psi}$ 表示 ψ 的 Fourier 变换. 上式对于一维情形是 Chui 和 Shi^[4] 建立的. 不难见到对于 n 维空间, (27) 也是成立的. 由 i), $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 所以 $\hat{\psi}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数. 结合 (27) 便可推出 (见注记 2)

$$\hat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 0. \quad (28)$$

必要性证明完毕.

下面证明充分性, 为此我们需要验证算子 T_Θ 的核

$$K(x, y) := \sum_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n} \theta_{j,k} \psi_{j,k}(x) \bar{\psi}_{j,k}(y)$$

满足

$$|K(y, x) - K(y, x')| \leq C \omega^\theta \left(\psi, \frac{|x - x'|}{|x - y|} \right) |x - y|^{-n}, \quad (29)$$

其中 $x \neq y, |x - x'| \leq \frac{1}{2}|x - y|$.

为了证明 (29), 我们建立下述的

引理 2 设 $\Phi(t)$ 是 $[0, \infty)$ 上的非负且单调递减函数, 满足

$$\Phi(0) < \infty \quad \text{和} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|x|) dx < \infty. \quad (30)$$

则存在常数 C_n 使得对于一切 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 成立

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \Phi(|x - k|) \Phi(|y - k|) \leq C_n \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|x|) dx + \Phi(0) \right) \Phi \left(\frac{|x - y|}{2} \right). \quad (31)$$

证明 当 $n = 1$ 时, 这是 [5] 中的引理. 现在证明 n 维情形. 与 [5] 类似, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \Phi(|x - k|) \Phi(|y - k|) &= \left(\sum_{|y-k| \geq \frac{1}{2}|x-y|} + \sum_{|y-k| < \frac{1}{2}|x-y|} \right) \Phi(|x - k|) \Phi(|y - k|) \\ &\leq \Phi \left(\frac{|x - y|}{2} \right) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \Phi(|x - k|) + \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \Phi(|y - k|) \right). \end{aligned} \quad (32)$$

以下估计 $G(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \Phi(|x - k|)$. 设 Q_s 是 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为中心、边长为 2^s 且各边与坐标轴平行的方体. 由于 $G(x)$ 是整数平移不变的函数, 我们可以不妨假设 $x \in Q_1$. 我们有

$$G(x) = \sum_{(x-k) \in Q_1} \Phi(|x - k|) + \sum_{s=2}^{\infty} \sum_{(x-k) \in Q_s \setminus Q_{s-1}} \Phi(|x - k|).$$

容易得到当 $s \geq 4$ 时,

$$\sum_{(x-k) \in Q_s \setminus Q_{s-1}} \Phi(|x - k|) \leq C_n \int_{2^{s-3} \leq |x| \leq 2^{s-2}} \Phi(|x|) dx. \quad (33)$$

由 (33) 导出

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \Phi(|x - k|) \leq C_n \Phi(0) + \sum_{s=4}^{\infty} C_n \int_{2^{s-3} \leq |x| \leq 2^{s-2}} \Phi(|x|) dx$$

$$\leq C_n \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|x|) dx + \Phi(0) \right) < \infty.$$

因此由 (32) 推知 (31) 成立. 证明完毕.

以下证明不等式

$$|K(x, y)| \leq C|x - y|^{-n}. \quad (34)$$

对于固定的 $x \neq y$, 我们可以找到 $j_0 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$a^{j_0} \leq \frac{1}{|x - y|} < a^{j_0+1}. \quad (35)$$

设

$$\Phi(t) := \frac{1}{(1+t)^{n+\alpha}}, \quad 0 \leq t < \infty.$$

由假设 (25), 我们得到

$$\begin{aligned} |K(x, y)| &\leq C \sum_{j \leq j_0} a^{jn} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \Phi(|a^j x - k|) \Phi(|a^j y - k|) \\ &\quad + C \sum_{j > j_0} a^{jn} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \Phi(|a^j x - k|) \Phi(|a^j y - k|) \\ &:= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

由引理 2 推得

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \Phi(|a^j x - k|) \Phi(|a^j y - k|) &\leq C \Phi\left(\frac{|a^j x - a^j y|}{2}\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|x|) dx + \Phi(0) \right) \\ &\leq C \Phi(0) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|x|) dx + \Phi(0) \right). \end{aligned}$$

于是我们得到

$$I_1 \leq C \sum_{j \leq j_0} a^{jn} \leq C a^{j_0 n}.$$

由 (35) 导出

$$I_1 \leq \frac{C}{|x - y|^n}. \quad (36)$$

当 $j > j_0$ 时, (35) 蕴含

$$|a^j x - a^j y| \geq a^{j_0} |x - y| \geq \frac{1}{a}.$$

因此, 由引理 2 推得

$$I_2 \leq C \sum_{j > j_0} a^{jn} \cdot \Phi\left(\frac{|a^j x - a^j y|}{2}\right) \leq C \sum_{j > j_0} a^{jn} \cdot a^{-j(n+\alpha)} |x - y|^{-(n+\alpha)} \leq \frac{C}{|x - y|^n}. \quad (37)$$

由估计式 (36) 和 (37), 我们得到不等式 (34) 成立.

下面证明 (29). 注意到

$$|K(x, y) - K(x', y)| \leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n} |\psi_{j,k}(x') - \psi_{j,k}(x)|^\theta |\psi_{j,k}(x') - \psi_{j,k}(x)|^{1-\theta} |\psi_{j,k}(y)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n} |\psi_{j,k}(x') - \psi_{j,k}(x)|^\theta |\psi_{j,k}(x')|^{1-\theta} |\psi_{j,k}(y)| \\
&\quad + C \sum_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n} |\psi_{j,k}(x') - \psi_{j,k}(x)|^\theta |\psi_{j,k}(x)|^{1-\theta} |\psi_{j,k}(y)| \\
&:= J_1 + J_2.
\end{aligned} \tag{38}$$

先来估计 J_1 . 我们有

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ a^{jn} \omega^\theta(\psi, |a^j x - a^j x'|) \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} [\Phi(|a^j x' - k|)]^{1-\theta} \Phi(|a^j y - k|) \right\} \\
&\leq C \left(\sum_{j \leq j_0} + \sum_{j > j_0} \right) \left\{ a^{jn} \omega^\theta(\psi, |a^j x - a^j x'|) \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} [\Phi(|a^j x' - k|)]^{1-\theta} \Phi(|a^j y - k|) \right\} \\
&:= J_{11} + J_{12}.
\end{aligned}$$

由引理 2 的证明知

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} [\Phi(|a^j x' - k|)]^{1-\theta} \Phi(|a^j y - k|) \leq C \Phi(0)^{1-\theta} \left(\Phi(0) + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|x|) dx \right),$$

我们得到

$$J_{11} \leq C \omega^\theta(\psi, |a^{j_0} x - a^{j_0} x'|) \sum_{j \leq j_0} a^{jn} \leq C \omega^\theta \left(\psi, \frac{|x - x'|}{|x - y|} \right) |x - y|^{-n}. \tag{39}$$

对于函数 $\Phi^{1-\theta}$ 应用引理 2, 我们得到对于 $j > j_0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} [\Phi(|a^j x' - k|)]^{1-\theta} \Phi(|a^j y - k|) &\leq C \Phi(0)^\theta \left[\Phi \left(\frac{|a^j x' - a^j y|}{2} \right) \right]^{1-\theta} \\
&\leq \frac{C}{a^{j(n+\alpha)(1-\theta)} |x' - y|^{(n+\alpha)(1-\theta)}}.
\end{aligned}$$

于是我们得到,

$$J_{12} \leq C \sum_{j > j_0} a^{jn} \omega^\theta(\psi, |a^j x - a^j x'|) \frac{1}{a^{j(n+\alpha)(1-\theta)} |x' - y|^{(n+\alpha)(1-\theta)}}.$$

注意到连续模满足

$$\omega(\psi, \lambda t) \leq (\lambda + 1) \omega(\psi, t), \quad t, \lambda > 0,$$

且

$$\frac{1}{2} |x' - y| \leq |x - y| \leq \frac{3}{2} |x' - y|,$$

我们有

$$\omega(\psi, |a^j x - a^j x'|) \leq (a^{j-j_0} + 1) \omega(\psi, a^{j_0} |x - x'|).$$

当 $0 < \theta < \alpha/(n + \alpha + 1)$ 时, $(n + \theta) - (n + \alpha)(1 - \theta) < 0$, 于是我们得到

$$J_{12} \leq C \sum_{j > j_0} a^{jn} a^{(j-j_0)\theta} \omega^\theta \left(\psi, \frac{|x - x'|}{|x - y|} \right) (a^{j(n+\alpha)(1-\theta)} |x - y|^{(n+\alpha)(1-\theta)})^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \sum_{j>j_0} a^{j[(n+\theta)-(n+\alpha)(1-\theta)]} a^{-j_0\theta+j_0(n+\alpha)(1-\theta)} \omega^\theta\left(\psi, \frac{|x-x'|}{|x-y|}\right) \\
&\leq C \omega^\theta\left(\psi, \frac{|x-x'|}{|x-y|}\right) |x-y|^{-n}.
\end{aligned} \tag{40}$$

综合 (39) 和 (40), 我们导出

$$J_1 \leq C \omega^\theta\left(\psi, \frac{|x-x'|}{|x-y|}\right) |x-y|^{-n}.$$

类似地, 我们也有

$$J_2 \leq C \omega^\theta\left(\psi, \frac{|x-x'|}{|x-y|}\right) |x-y|^{-n}.$$

把它代入 (38), 便知 (29) 成立.

下面我们证明条件 (29) 蕴含以下的 Hörmander 条件: 存在常数 $C_1 > 1$ 和 $C_2 > 0$, 使得对任意的 $y \in \mathbb{R}^n$ 和 $\delta > 0$, 成立

$$\int_{|x| \geq C_1 \delta} |K(x, y) - K(x, \bar{y})| dx \leq C_2,$$

其中 $\bar{y} \in B(y, \delta)$ 而 $B(y, \delta)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中以 y 为中心、 δ 为半径的球. 不失一般性, 可设 $y = 0$. 由 (29) 我们得到

$$\int_{|x| \geq C_1 \delta} |K(x, 0) - K(x, \bar{y})| dx \leq C \int_{|x| \geq C_1 \delta} \frac{\omega^\theta\left(\frac{|\bar{y}|}{|x|}\right)}{|x|^n} dx \leq C \int_0^{C_1^{-1}} \frac{\omega^\theta(t)}{t} dt := C_2.$$

即核 K 满足 Hörmander 条件.

由调和分析的结果知道这样的算子 T_Θ 是弱 (1,1) 有界的 (参见 [7, 第 19 页]). 另一方面, 由定理 1 知, T_Θ 又是强 (2,2) 型的. 根据 Marcinkiewicz 插值定理 [7, 8] 以及对偶原理推知算子 T_Θ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中是有界的, $1 < p < \infty$.

应用定理 3 我们可以改进 Daubechies^[4] 和 Chui-Shi^[5] 关于无条件基的判别定理. 具体地说, 我们有下列的

定理 4 设 $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 满足定理 3 的 i) 和 iv), 且 $\{\psi_{j,k}(x)\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的无条件基. 此外, 它的对偶基也是由满足 i) 和 iv) 的某个函数 $\tilde{\psi} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 以同样方式产生, 也即

$$\tilde{\psi}_{j,k}(x) = a^{jn/2} \tilde{\psi}(a^j x - k), \quad (j, k) \in (Z \times Z^n).$$

则 $\{\psi_{j,k}\}$ 和 $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}$ 都是 $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ 中的无条件基.

证明类似于 [5], 故从略. 需要指出的是, 条件 i) 和 $\{\psi_{j,k}\}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中无条件基的假设蕴含 (见注记 3)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 0.$$

4 几点注记

注记 1 定理 3 对 θ 的要求略高于定理 2.

注记 2 不等式 (27) 也可参见 [9] 和 [10]. 由 (27) 推出 $\hat{\psi}(0) = 0$ 可用反证法. 若 $\hat{\psi}(0) \neq 0$, 则在 0 的一个邻域 $|\omega| \leq \eta$ 内成立 $|\hat{\psi}(\omega)| \geq \epsilon > 0$. 于是在这个邻域内 (27) 不可能成立.

由 [6, 10] 知道对于框架, 成立

$$0 < A \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a^j \omega)|^2 \leq B, \quad \text{a.e.} \quad (41)$$

由 (41) 可以导出 Daubechies 不等式

$$A\omega_{n-1} \ln a \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|^n} d\omega \leq B\omega_{n-1} \ln a, \quad (42)$$

其中 ω_{n-1} 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面面积. 由 (42) 也可推出 $\hat{\psi}(0) = 0$.

Sun 和 Zhou^[11] 对一维不规则仿射框架建立了 (41) 型不等式.

注记 3 定理 4 后面我们给出“条件 i) 和 $\{\psi_{j,k}\}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中无条件基的假设蕴含 (28)”, 这是因为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的无条件基等价于 Riesz 基. Riesz 基必定是框架, 从而可推出不等式 (27). 所以 (28) 成立.

参考文献

- 1 Meyer Y. Ondelettes et Opérateurs II: Opérateurs de Calderón-Zygmund. Paris: Hermann, 1990
- 2 Young R M. An Introduction to Nonharmonic Fourier Series. New York: Academic Press, 1980
- 3 Chui C K, Shi X L. Bessel sequences and affine frames. Appl Comp Harmon Anal, 1993, 1: 29–49
- 4 Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. CBMS-NSF Series in Applied Math, 61. Philadelphia: SIAM, 1992
- 5 Chui C K, Shi X L. On L^p -boundedness of affine frame operators. Indag Math (N S), 1993, 4: 431–438
- 6 Chui C K, Shi X L. Inequalities of Littlewood-Paly type for frames and wavelets. SIAM J Math Anal, 1993, 24: 263–277
- 7 Stein E M. Harmonic Analysis. Princeton: Princeton Univ Press, 1993
- 8 Torchinsky A. Real Variable Methods in Harmonic Analysis. New York: Academic Press, 1986
- 9 Chui C K. An Introduction to Wavelets. Boston: Academic Press, 1992
- 10 施咸亮, 陈芳. 仿射框架的必要条件和充分条件. 中国科学 A 辑, 2005, 35: 831–840
- 11 Hu Z S, Su C, Wang D C. Irregular sampling for multivariate band-limited functions. Sci China Ser A, 2002, 45: 1548–1556

Quasi vaguelets and its application to theory of wavelets

SHI XianLiang & WANG Wei

Abstract In this paper, we propose the concept of quasi vaguelets which generalizes and improves the theory of vaguelets created by Meyer. Furthermore, we improve criteria on unconditional bases of $L^p(\mathbb{R}^n)$ established by Daubechies and Chui-Shi, respectively.

Keywords: quasi vaguelet, wavelet, unconditional basis, singular integral

MSC(2000): 42B20, 42B25

doi: 10.1360/012010-357