非时齐 Markov 链泛函的弱收敛

周力凯¹, 王汉超^{2*}

1. 浙江财经大学数据科学学院, 杭州 310018;

2. 山东大学中泰金融研究院, 济南 250100

E-mail: lkzhou@zufe.edu.cn, wanghanchao@sdu.edu.cn

收稿日期: 2016-07-28; 接受日期: 2016-09-12; 网络出版日期: 2017-03-03; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11371317) 资助项目

摘要 本文考虑了非时齐 Markov 链泛函的弱收敛定理. 本文的极限过程是一类随机积分型的随机过程. 作为应用, 首先考虑了单位根检验问题; 其次考虑了协整回归模型中参数最小二乘估计量的渐近分布. 这两类问题中, 均涉及了收敛至随机积分的弱收敛定理.

关键词 弱收敛 随机积分 协整回归 单位根检验

MSC (2010) 主题分类 60F17, 60H05

1 引言及主要结果

令 $(\xi_{n,i})_{1 \leq i \leq n}$ 是一列定义在概率空间 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 、取值于 $\mathbb{R}$ 的非时齐 Markov 链. 若 g 和 h 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值函数, 定义

$$X_{n,i} = g(\xi_{n,i}), \quad V_{n,i} = h(\xi_{n,i}).$$

本文假设 $D(\sum_{i=1}^n X_{n,i}) = D(\sum_{i=1}^n V_{n,i}) =: \sigma_n^2$, 我们将考虑形如

$$\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j}\right) X_{n,i+1} \quad (1.1)$$

和

$$\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j}\right) V_{n,i+1} \quad (1.2)$$

过程的弱收敛问题.

很多学者已经考虑了形如

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^i X_j\right) X_{i+1} \quad (1.3)$$

英文引用格式: Zhou L K, Wang H C. Weak convergence of functionals of non-homogeneous Markov chain (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 757–764, doi: 10.1360/SCM-2016-0479

过程的弱收敛问题, 这里 $\{X_n\}_{n \geq 1}$ 是平稳过程. 当 $\{X_n\}_{n \geq 1}$ 是线性过程时, Ibragimov 和 Phillips^[1] 考虑了 (1.3) 的弱收敛. 当 $\{X_n\}_{n \geq 1}$ 是 Causal 过程时, Lin 和 Wang^[2] 考虑了 (1.3) 的弱收敛. Liang 等^[3] 考虑了

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^i X_j\right) Y_{i+1} \quad (1.4)$$

的弱收敛, 这里 $\{X_n\}_{n \geq 1}$ 和 $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ 是线性过程或者 α -混合过程.

Ibragimov 和 Phillips^[1] 及 Lin 和 Wang^[2] 的证明方法均为半鞅刻画的鞅收敛方法. Liang 等^[3] 得到了 (1.4) 的一个分解方法, 然后利用 Kurtz 和 Protter^[4] 的经典结果得到了最终的结论. 一般来讲, (1.3) 和 (1.4) 的极限过程是一个随机积分, 关于收敛至随机积分的经典结果, 我们推荐读者参见文献 [5]. 本文将 Liang 等^[3] 的结果推广至非时齐情形. 首先, 我们列出本文需要的假设.

假设 1 $(X_{n,i})_{1 \leq i \leq n}$ 和 $(V_{n,i})_{1 \leq i \leq n}$ 是中心化平方可积的随机变量阵列, 且关于 σ -域 $(\mathfrak{F}_{n,i})_{1 \leq i \leq n}$ 适应, 这里 $\mathfrak{F}_{n,i} \subset \mathfrak{F}_{n,i+1}$ 对于 $1 \leq i \leq n-1$ 成立. 假设 $X_{n,0} = 0$, $V_{n,0} = 0$ 及 $\mathfrak{F}_{n,0} = \{\emptyset, \Omega\}$, $\inf_{n,i} D(X_{n,i}) > 0$, $\inf_{n,i} D(V_{n,i}) > 0$. 我们假定, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 对于正常数 C_n , 有

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq n} |X_{n,i}| &\leq C_n, \quad \text{a.s.}, \\ \max_{1 \leq i \leq n} |V_{n,i}| &\leq C_n \quad \text{a.s.}, \end{aligned}$$

及

$$\rho_{n,1} \rightarrow 0, \quad \frac{C_n(1 + |\log(\lambda_n)|)}{\lambda_n \sigma_n} \rightarrow 0,$$

这里

$$\rho_{n,1} = \sup_{A \in \sigma((\xi_{n,k})_{k \leq i}), B \in \sigma((\xi_{n,k})_{k \geq i+1})} |\text{corr}(A, B)|, \quad \lambda_n = 1 - \rho_{n,1}.$$

假设 2 对于任意的 $1 \leq i \leq n$, 存在 $\Lambda, \Lambda' > 0$, 使得

$$\frac{\Lambda}{n} - \frac{\sum_{k=i+1}^n \mathbb{E}(X_{n,i} X_{n,k})}{\sigma_n^2} = O(n^{-1-\delta}), \quad \frac{\Lambda'}{n} - \frac{\sum_{k=i+1}^n \mathbb{E}(X_{n,i} V_{n,k})}{\sigma_n^2} = O(n^{-1-\delta}),$$

这里 $\delta > 0$.

假设 3 假设 f 是连续函数, 且具有连续导数 f' . 进一步, 我们假定 f 和 f' 局部有界, 且对于 $\max\{|x|, |y|\} \leq K$, 有

$$|f(x) - f(y)| \leq C_{K,1}|x - y|^\beta, \quad |f'(x) - f'(y)| \leq C_{K,2}|x - y|^\beta,$$

这里 $0 < \beta \leq 1$, $K > 0$ 是常数, $C_{K,1}$ 和 $C_{K,2}$ 是与 K 有关的常数.

本文得到以下主要结果:

定理 1 在假设 1-3 下, 有

$$\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j}\right) X_{n,i+1} \xrightarrow{d} \int_0^1 f(W_s) dW_s + \Lambda \int_0^1 f'(W_s) ds, \quad (1.5)$$

这里 W 是标准 Brown 运动.

定理 2 在假设 1-3 下, 有

$$\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j}\right) V_{n,i+1} \xrightarrow{d} \int_0^1 f(W_s) dB_s + \Lambda' \int_0^1 f'(W_s) ds, \quad (1.6)$$

这里 W 和 B 均为标准 Brown 运动.

注 1 Peligrad^[6] 在假设 1 下得到了关于 $\sum_{i=1}^n X_{n,i}$ 的中心极限定理. 我们的结果强烈依赖于 Peligrad^[6] 的结果.

在第 2 节中, 我们将给出定理 1 和 2 的证明. 我们的结果在计量经济中有很大的应用. 第 3 节将考虑单位根检验问题. 第 4 节针对非平稳数据, 考虑了具有内生性变量的非线性协整模型. 利用我们的结果可以得到该复杂模型的参数的最小二乘估计量的渐近分布.

2 主要结果的证明

我们利用 Kurtz 和 Protter^[4] 的经典结果以及鞅逼近的方法证明定理 1 和 2. 首先给出文献 [4] 中经典结果的一个简化形式.

定理 3^[4] 令 $\{x_{n,i}\}$ 是一个 $\{\mathfrak{F}_{n,i}\}$ -半鞅, 且

$$x_{n,i} = M_{n,i} + A_{n,i},$$

这里 $M_{n,i}$ 是鞅, $A_{n,i}$ 是有界变差过程, 且 $\{y_{n,i}\}$ 是 $\{\mathfrak{F}_{n,i}\}$ -适应过程. 若在 $\mathbb{D}[0, 1]^2$ 上, 有

$$\{x_{n,[n\cdot]}, y_{n,[n\cdot]}\} \Rightarrow \{B, G\}$$

且

$$\sup_n \left(E(M_{n,n}^2) + \sum_{i=1}^{n-1} E(|A_{n,i+1} - A_{n,i}|) \right) < \infty,$$

这里 B 是 Brown 运动, G 是关于 $\{\mathfrak{F}_{n,i}\}_{1 \leq i \leq n}$ 的适应过程, 则对连续函数 g_1 和 g_2 , 有

$$\left\{ x_{n,[n\cdot]}, y_{n,[n\cdot]}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[n\cdot]} g_1(y_{n,i}), \sum_{i=1}^{[n\cdot]-1} g_2(y_{n,i})(x_{n,i+1} - x_{n,i}) \right\} \Rightarrow \left\{ B, G, \int_0^\cdot g_1(G_s) ds, \int_0^\cdot g_2(G_s) dB_s \right\}.$$

由定理 3, 若我们能得到 $\sum_{i=1}^n X_{n,i}$ 和 $\sum_{i=1}^n V_{n,i}$ 的弱收敛, 结合鞅逼近方法, 我们将证明定理 1 和 2. 为简单起见, 我们仅证明定理 1.

定理 1 的证明 定义

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{n,i} Y &= E(Y | \mathfrak{F}_{n,i}) - E(Y | \mathfrak{F}_{n,i-1}), \\ d_{n,i} &= E(S_n | \mathfrak{F}_{n,i}) - E(S_n | \mathfrak{F}_{n,i-1}) = \mathcal{P}_{n,i}(S_n - S_{n,i-1}), \\ A_{n,i} &= E(S_n - S_{n,i} | \mathfrak{F}_{n,i}), \quad S_{n,i} = \sum_{j=1}^i X_{n,j}, \quad S_n = \sum_{j=1}^n X_{n,j}. \end{aligned}$$

由 $d_{n,i} = X_{n,i} + A_{n,i} - A_{n,i-1}$, 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j}\right) X_{n,i+1} \\ &= \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j}\right) (X_{n,i+1} - d_{n,i+1}) + \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j}\right) d_{n,i+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j}\right) (A_{n,i} - A_{n,i+1}) + \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j}\right) d_{n,i+1} \\
&= \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j}\right) - f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^{i-1} X_{n,j}\right) \right) A_{n,i} + \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j}\right) d_{n,i+1},
\end{aligned}$$

这里

$$\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j}\right) - f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^{i-1} X_{n,j}\right) \right) A_{n,i}$$

是有界变差部分, $\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j}\right) d_{n,i+1}$ 是鞅.

考虑

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j}\right) - f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^{i-1} X_{n,j}\right) \right) A_{n,i} \\
&= \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^{n-1} f'\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^{i-1} X_{n,j}\right) \mathbb{E}(X_{n,i} A_{n,i}) + R_1(n) + R_2(n),
\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}
R_1(n) &= \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n-1} A_{n,i} \int_{\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^{i-1} X_{n,j}}^{\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j}} \left[f'(x) - f'\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^{i-1} X_{n,j}\right) \right] dx, \\
R_2(n) &= \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^{n-1} f'\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^{i-1} X_{n,j}\right) [X_{n,i} A_{n,i} - \mathbb{E}(X_{n,i} A_{n,i})].
\end{aligned}$$

我们首先证明

$$R_i(n) \xrightarrow{P} 0, \quad i = 1, 2.$$

令 $\Omega_K^n = \{\omega : \frac{1}{\sigma_n} \max_{1 \leq i \leq n} |\sum_{j=1}^i X_{n,j}| \leq K\}$. 对于 $R_1(n)$, 有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|R_1(n)| | 1_{\Omega_K^n}) &\leq \frac{C_K}{(\sigma_n)^{1+\beta}} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(|X_{n,i}|^{\beta+1} | A_{n,i}|) \leq C_K \frac{C_n^\beta}{(\sigma_n)^{1+\beta}} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(|X_{n,i} A_{n,i}|) \\
&\leq C_K \frac{C_n^\beta}{(\sigma_n)^{1+\beta}} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n-i} (\rho_{n,1})^k \leq C_K \frac{C_n^\beta \rho_{n,1}}{(\sigma_n)^\beta \lambda_n} \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

由于 $k \rightarrow \infty$, $P(\Omega_K^n) \rightarrow 1$, 所以有

$$R_1(n) \xrightarrow{P} 0.$$

对于 $R_2(n)$, 由 Markov 性, 有

$$\mathbb{E}(|R_2(n)| | 1_{\Omega_K^n}) \leq \frac{C_K}{n\sigma_n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(\left|\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^{i-1} X_{n,j}\right| |X_{n,i} A_{n,i} - \mathbb{E}(X_{n,i} A_{n,i})|\right) \leq \frac{C_K \rho_{n,1}}{\sigma_n^2}.$$

类似地, 由于 $k \rightarrow \infty$, $P(\Omega_K^n) \rightarrow 1$, 所以有

$$R_2(n) \xrightarrow{P} 0.$$

对于鞅部分,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j}\right) d_{n,i+1} &= \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j}\right) - f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^{i-1} X_{n,j}\right) \right) d_{n,i+1} \\ &\quad + \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^{i-1} X_{n,j}\right) d_{n,i+1}, \end{aligned}$$

类似于 $R_1(n)$,

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j}\right) - f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^{i-1} X_{n,j}\right)\right) d_{n,i+1}\right| 1_{\Omega_K^n}\right) \leq C_K \frac{C_n^\beta}{(\sigma_n)^{1+\beta}} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n-i} (\rho_{n,1})^k,$$

由于 $k \rightarrow \infty$, $P(\Omega_K^n) \rightarrow 1$, 所以有

$$\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j}\right) - f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^{i-1} X_{n,j}\right) \right) d_{n,i+1} \xrightarrow{P} 0.$$

由引理 3, 有

$$\frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^{n-1} f'\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^{i-1} X_{n,j}\right) \mathbb{E}(X_{n,i} A_{n,i}) - \frac{\Lambda}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f'\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^{i-1} X_{n,j}\right) \xrightarrow{P} 0.$$

于是, $\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j}\right) X_{n,i+1}$ 的渐近分布为

$$\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^{i-1} X_{n,j}\right) d_{n,i+1} + \frac{\Lambda}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f'\left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^{i-1} X_{n,j}\right).$$

由定理 3, 我们仅需证明在 $\mathbb{D}[0, 1]$ 上, 有

$$\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{[n\cdot]} d_{n,i+1} \Rightarrow W, \quad (2.1)$$

这里 W 是标准 Brown 运动. 由于对于任意 $\eta > 0$, 有

$$P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |d_i| \geq \eta \sigma_n\right) \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

因此利用文献 [6, 定理 1], 我们将得到 (2.1) 的弱收敛.

事实上,

$$P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |d_{n,i}| \geq \eta \sigma_n\right) \leq P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |X_{n,i}| \geq \frac{\eta \sigma_n}{3}\right) + 2P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |A_{n,i}| \geq \frac{\eta \sigma_n}{3}\right),$$

且当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |X_{n,i}| \geq \frac{\eta \sigma_n}{3}\right) \leq \sum_{i=1}^n P\left(|X_{n,i}| \geq \frac{\eta \sigma_n}{3}\right) \leq \frac{3^4}{(\eta \sigma_n)^4} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_{n,i}^4) \leq K \frac{C_n^2}{\lambda_n \sigma_n} \rightarrow 0.$$

由文献 [6, 定理 1 和引理 17], 有

$$P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |A_{n,i}| \geq \frac{\eta \sigma_n}{3}\right) \leq \left(1 + \frac{b_n}{3C_n}\right)^2 \exp\left(-\frac{\eta \lambda_n \sigma_n}{18C_n}\right) \rightarrow 0.$$

于是我们得到 (2.2), 定理 1 得证. □

3 单位根检验

在我们研究宏观经济数据时, 从图像上看, 许多金融时间序列会呈现出一定的时间趋势, 即时间序列的均值是时间 n 的函数. 在这种情形下, 我们往往假设时间序列是由以下线性模型产生:

$$U_n = \alpha + \beta n + \varepsilon_n, \quad (3.1)$$

这里的 U_n 是带趋势 βn 的平稳过程. 然而, 对于两个明显不存在回归关系的非平稳的变量 (例如, 一个国家的人均 GDP 和人均二氧化碳的排放量), 如果按照回归分析的方法对两个变量进行回归关系检验, 那么会发现二者之间存在显著的回归关系, 即所谓的伪回归现象的存在, 会导致上述模型 (3.1) 与如下单位根过程:

$$U_n = U_{n-1} + \varepsilon_n \quad (3.2)$$

无法区分. 显然, 这两个模型有着非常不同的统计性质, 因此需要区分两种过程. 大多数的单位根检验都是建立在平稳过程的假设之下, 如 Dickey-Fuller 方法和 Phillips-Perron 方法, 读者可参见文献 [7–11] 作为单位根的重要文献. 在非平稳情形下, 可以将我们的理论应用在单位根检验中.

我们考虑非时齐情形:

$$U_{n,i} = \kappa U_{n,i-1} + X_{n,i}.$$

检验 $\kappa = 1$ 是否成立.

令

$$\hat{\kappa} = \frac{\sum_{i=1}^n U_{n,i-1} U_{n,i}}{\sum_{i=1}^n U_{n,i-1}^2},$$

在假定 $\kappa = 1$ 时, 考虑 t -统计量

$$t_\kappa = \frac{(\sum_{i=1}^n U_{n,i-1}^2)^{\frac{1}{2}} (\hat{\kappa} - 1)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (U_{n,i} - \hat{\kappa} U_{n,i-1})^2}}.$$

令 $f(x) = x$, 由定理 1, 我们下面的定理:

定理 4 在假设 1 和 2 下, 有

$$n(\hat{\kappa} - 1) \xrightarrow{d} \frac{\Lambda + \int_0^1 W_s dW_s}{\int_0^1 W_s^2 ds}, \quad t_\kappa \xrightarrow{d} \frac{\Lambda + \int_0^1 W_s dW_s}{(\int_0^1 W_s^2 ds)^{\frac{1}{2}}},$$

这里 W 是标准 Brown 运动.

4 非线性协整回归模型

过去几十年来, 比单位根模型更加复杂的协整模型吸引了很多学者的关注. 特别地, 由于计量经济模型中出现了很多非线性的内生性变量, 使得该领域研究变得很复杂. 最近, 在含有内生性变量的前提下, Wang 和 Phillips^[12,13] 考虑了非线性协整模型的核估计

$$Y_n = f(X_n) + \varepsilon_n, \quad (4.1)$$

这里 $\{X_n\}$ 与 $\{\varepsilon_n\}$ 相依.

本节考虑

$$Y_n = \alpha + \beta S_n^2 + V_n, \quad (4.2)$$

这里 $S_n = \sum_{i=1}^n X_{n,i}$, $\{X_{n,i}\}$ 与 $\{V_n\}$ 相依, 且非平稳. 我们关心最小二乘估计量 α 和 β 的渐近分布, 注意到

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \frac{\hat{\beta}}{n} \sum_{i=1}^n S_i^2, \quad \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i S_i^2 - n^{-1} \sum_{i=1}^n S_i^2 \sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n S_i^4 - n^{-1} (\sum_{i=1}^n S_i^2)^2},$$

不难判断, 上式的渐近分布与随机积分有关. 这不同于 Wang 和 Phillips^[12, 13] 的结果, 这是我们研究的出发点.

事实上, 模型 (4.2) 只是非线性协整模型的特例, 这个模型是

$$Y_n = \alpha + \beta f(S_n) + V_n \quad (4.3)$$

的特例, $\hat{\alpha} - \alpha$ 和 $\hat{\beta} - \beta$ 的渐近性质将随着 f 的出现变得复杂. 本节的目的在于提供本文主要结果的应用, 为简单起见, 我们仅考虑模型 (4.2).

由定理 2, 我们有下面的定理:

定理 5 在假设 1 和 2 下, 有

$$\sigma_n^{3/2}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} Y_1, \quad \sigma_n(\hat{\alpha} - \alpha) \xrightarrow{d} Y_2,$$

我们有

$$Y_1 = \frac{\int_0^1 W_s^2 dB_s + 2\Lambda' \int_0^1 W_s ds - B_1 \int_0^1 W_s ds}{\int_0^1 W_s^4 ds - (\int_0^1 W_s^2 ds)^2}, \quad Y_2 = B_1 - Y_1 \int_0^1 W_s^2 ds,$$

这里 W 和 B 均为标准 Brown 运动.

注 2 $\hat{\beta}$ 的收敛速度取决于 S_n 及随机积分的形式, 这一点与单位根检验中的情形类似.

注 3 一般来讲, $X_{n,i}$ 和 $V_{n,i}$ 的内生性将产生偏差, 在我们的结果中, $\Lambda' \int_0^1 W_s ds$ 即为渐近偏差. 这个问题在文献 [3] 中考虑过, 由于我们的问题涉及非平稳性, 所以我们将在今后的研究中讨论这个问题.

定理 5 的证明 事实上, $\hat{\alpha} - \alpha$ 和 $\hat{\beta} - \beta$ 具有以下形式:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} - \beta &= \frac{\sum_{i=1}^n V_{n,i} (X_{n,i}^2 - n^{-1} \sum_{i=1}^n X_{n,i}^2)}{\sum_{i=1}^n X_{n,i}^4 - n^{-1} (\sum_{i=1}^n X_{n,i}^2)^2} \\ &= \sigma_n^{-3/2} \frac{\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^n (\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j})^2 V_{n,i} - \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^n (\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j})^2 \frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^n V_{n,i}}{\frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^n (\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j})^4 - (\frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^n (\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j})^2)^2}, \\ \hat{\alpha} - \alpha &= \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^n V_{n,i} - \frac{\hat{\beta} - \beta}{n} \sum_{i=1}^n X_{n,i}^2. \end{aligned}$$

考虑 $\hat{\beta} - \beta$ 可写作

$$\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^i X_{n,j} \right)^2 V_{n,i+1}, \quad (4.4)$$

由定理 2, 只需考虑 $f(x) = x^2$, 我们将得到定理 5. □

致谢 作者对审稿人提出的宝贵意见表示感谢.

参考文献

- 1 Ibragimov R, Phillips P. Regression asymptotics using martingale convergence methods. *Econometric Theory*, 2008, 24: 888–947
- 2 Lin Z, Wang H. On convergence to stochastic integrals. *J Theoret Probab*, 2016, 29: 717–736
- 3 Liang H, Phillips P, Wang H, et al. Weak convergence to stochastic integrals for econometric applications. *Econometric Theory*, 2016, 32: 1349–1375
- 4 Kurtz T, Protter P. Weak limit theorems for stochastic integrals and stochastic differential equations. *Ann Probab*, 1991, 19: 1035–1070
- 5 Jacod J, Shiryaev A. *Limit Theorems for Stochastic Processes*, 2nd ed. New York: Springer, 2003
- 6 Peligrad M. Central limit theorem for triangular arrays of non-homogeneous Markov chains. *Probab Theory Related Fields*, 2012, 154: 409–428
- 7 Phillips P. Time-series regression with a unit root. *Econometrica*, 1987, 55: 277–301
- 8 Phillips P. Towards a unified asymptotic theory for autoregression. *Biometrika*, 1987, 74: 535–547
- 9 Phillips P, Perron P. Testing for a unit root in time series regression. *Biometrika*, 1988, 75: 335–346
- 10 De Jong R, Davidson J. The functional central limit theorem and weak convergence to stochastic integral, I: Weak dependent processes. *Econometric Theory*, 2000, 16: 621–642
- 11 De Jong R, Davidson J. The functional central limit theorem and weak convergence to stochastic integral, II: Fractionally integrated processes. *Econometric Theory*, 2000, 16: 643–666
- 12 Wang Q, Phillips P. Asymptotic theory for local time density estimation and nonparametric cointegrating regression. *Econometric Theory*, 2009, 25: 710–738
- 13 Wang Q, Phillips P. Structural nonparametric cointegrating regression. *Econometrica*, 2009, 77: 1901–1948

Weak convergence of functionals of non-homogeneous Markov chain

ZHOU LiKai & WANG HanChao

Abstract In this paper, we obtain the weak convergence of functionals of non-homogeneous Markov chain. Our limiting processes are stochastic integrals. As applications, we first consider the unit root testing problem, which involves the weak convergence to stochastic integrals. Furthermore, we study the asymptotic distribution of least squares estimator in cointegrating regression model which involves endogeneity, nonstationary and nonlinearity, which depends heavily on weak convergence to stochastic integral.

Keywords weak convergence, stochastic integral, cointegrating regression, unit root testing

MSC(2010) 60F17, 60H05

doi: 10.1360/SCM-2016-0479