具有源项的等熵气体动力学方程组全局解的存在性

陆云光^{①②*}, 彭跃军^③, KLINGENBERG Christian^④

① 中国科技大学数学系, 合肥 230026;

② Department of Mathematics, National University of Colombia, Bogota, Colombia;

③ Laboratoire de Mathématiques, Université Blaise Pascal, 63177 Aubière Cedex, France;

④ Institut für angewandte Mathematik, Universität Würzburg, Am Hubland, 97074 Würzburg, Germany

E-mail: ylu@unal.edu.co, peng@math.univ-bpclermont.fr, klingenberg@mathematik.uni-wuerzburg.de

收稿日期: 2009-01-17; 接受日期: 2009-04-05; * 通信作者

本文得到了中国科学院“百人计划”项目和德国洪堡基金的支持

摘要 本文我们证明了具有源项的等熵气体动力学方程组 (1.2) 全局解的存在性. 为此, 我们构造正则双曲方程组 (1.1) 去逼近非齐次等熵气体动力学方程组 (1.2). 首先, 对每一个固定的逼近参数 δ 和一般化的 $P(\rho)$ 条件, 我们证明了带有界初始条件 (1.4) 的 Cauchy 问题 (1.1) 的全局熵解的存在性. 其次, 令 $\epsilon = o(\delta)$, 我们得到了方程组 (1.2) 的形如 $\eta(\rho, u) = \rho H(\rho, u)$ (与 Chen 和 LeFloch (2003) 相同) 的弱熵对的 H_{loc}^{-1} 紧性的完整证明. 最后, 将 Chen 和 LeFloch (2003) 给出的关于 $P(\rho)$ 的条件应用到定理 1 和定理 2 的结果中, 我们得到了带有界初值 (1.4) 的 Cauchy 问题 (1.2) 的熵解的全局存在性.

关键词 等熵气体动力学方程组 全局熵解 H_{loc}^{-1} 紧性 补偿列紧方法

MSC (2000) 主题分类 35L65, 35B40

1 引言

在本文中, 我们用一列正则双曲方程组

$$\begin{cases} \rho_t + (-2\delta u + \rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 - \delta u^2 + P_1(\rho, \delta))_x + a(x)\rho + c\rho u|u| = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

来逼近 Eulerian 坐标下非齐次等熵气体动力学方程组

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P(\rho))_x + a(x)\rho + c\rho u|u| = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 ρ 表示气体密度, u 表示气体速度, $P = P(\rho)$ 表示气体压强. 函数 $a(x)$ 在物理上对应地形的坡度, $c\rho|u|$ 为摩擦项. 在方程组 (1.1) 中, $\delta > 0$ 表示正则扰动常数, 下式表示扰动压强

$$P_1(\rho, \delta) = \int_{2\delta}^{\rho} \frac{t - 2\delta}{t} P'(t) dt. \quad (1.3)$$

英文版见: Lu Y G, Peng Y J, Klingenberg C. Existence of global solutions to isentropic gas dynamics equations with a source term. Sci China Math, 2010, 53(1): 115–124, doi: 10.1007/s11425-010-0003-0

对于多方气体 $P(\rho) = d\rho^\gamma$ 的情形, 在文献 [1] 中我们已得到非齐次系统 (1.2) 的 L^∞ 熵解的全局存在性结果, 其中 $\gamma > 1$, d 是任意正常数, 初始值属于 L^∞ 且任意大.

在本文中, 我们研究了更一般压强函数情形. 首先, 对于固定的 $\delta > 0$, 我们建立了 Cauchy 问题 (1.1) 熵解的存在性, 其中 (1.1) 带有有界可测初始值

$$(\rho(x, 0), u(x, 0)) = (\rho_0(x), u_0(x)), \quad \rho_0(x) \geq 2\delta. \quad (1.4)$$

定理 1 设 $|a(x)| \leq M$, c 是非负常数, 初值 $(\rho_0(x), u_0(x))$ 有界可测且 $\rho_0(x) \geq 2\delta$, $P(\rho) \in C^2(0, \infty)$, 满足 $P'(\rho) > 0$,

$$2P'(\rho) + \rho P''(\rho) > 0, \quad \text{当 } \rho > 0, \quad (1.5)$$

且

$$\int_{c_1}^{\infty} \frac{\sqrt{P'(\rho)}}{\rho} d\rho = \infty, \quad \int_0^{c_1} \frac{\sqrt{P'(\rho)}}{\rho} d\rho < \infty, \quad \forall c_1 > 0. \quad (1.6)$$

则 Cauchy 问题 (1.1), (1.4) 存在全局有界熵解 $(\rho(x, t), u(x, t))$ 满足

$$2\delta \leq \rho(x, t) \leq M(t), \quad |u(x, t)| \leq M(t),$$

其中对任意有限时间 t , $M(t) > 0$ 是有界的.

其次, 在扰动参数 δ, ϵ 满足 $\epsilon = o(\delta)$ 的条件下, 我们证明了下面定理中的 H^{-1} 紧性.

定理 2 假设 $P(\rho)$ 满足定理 1 中的条件且极限

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{(P'(\rho))^{\frac{3}{2}}}{\rho P''(\rho)} = e, \quad (1.7)$$

其中 $e \geq 0$ 是一个常数. 如果方程组 (1.2) 的弱熵 - 熵流对 $(\eta(\rho, u), q(\rho, u))$ 形如 $\eta(\rho, u) = \rho H(\rho, u)$, 且 $H_u(\rho, u), H_{uu}(\rho, u), H_{uuu}(\rho, u)$ 在 $0 \leq \rho \leq M(t), |u| \leq M(t)$ 上是连续的, 其中 $M(t)$ 是在 (2.14) 给出的正有界函数, 那么, 当 $\epsilon = o(\frac{P'(2\delta)}{2\delta})$, δ 趋向零时, 对于 Cauchy 问题 (2.6) 和 (1.4) 粘性解 $(\rho^{\delta, \epsilon}(x, t), u^{\delta, \epsilon}(x, t))$,

$$\eta_t(\rho^{\delta, \epsilon}(x, t), u^{\delta, \epsilon}(x, t)) + q_x(\rho^{\delta, \epsilon}(x, t), u^{\delta, \epsilon}(x, t)) \quad (1.8)$$

在 $H_{\text{loc}}^{-1}(R \times R^+)$ 中是紧的.

定理 3 若定理 1 和定理 2 中关于 $P(\rho)$ 的所有条件成立. 假定存在指数 $\gamma \in (1, \infty)$, 光滑函数 $p(\rho)$ 和某一实数 $\theta_1 > 1$ 使得

$$P(\rho) = k\rho^\gamma(1 + \rho^{\theta\theta_1}p(\rho)), \quad (1.9)$$

其中 $\theta = \frac{\gamma-1}{2}$, $k = \frac{(\gamma-1)^2}{4\gamma}$, 且当 ρ 趋向零时 $p(\rho)$ 和 $\rho^3 P'''(\rho)$ 是有界的. 那么 Cauchy 问题 (1.2) 和 (1.4) 存在全局熵解.

注 1 在定理 1 中, 我们不需要文献 [1] 中的 $a'(x) \geq 0$ 的条件.

注 2 在定理 2 中, 文献 [2] 中的弱熵形如 $\eta(\rho, u) = \rho H(\rho, u)$. 但文献 [2] 中没有证明 (1.8) 在 H^{-1} 空间的紧性.

本文的思路: 本文中我们利用了补偿列紧方法. 当这一理论用到等熵气体动力学方程组时涉及三个步骤. 第 1 步通过对气体动力学方程组添加粘性项来构造粘性逼近解. 在证明粘性解的存在性时, 主要的困难是证明解 $\rho^\epsilon \geq c(t, \epsilon) > 0$ 的下界估计. 本文我们通过在质量守恒方程中添加扰动项 δ 来克

服这一困难. 第 2 步, 我们需要证明熵 - 熵流对 (1.8) 的 H_{loc}^{-1} 紧性. 对多方气体 $p(\rho) = c\rho^\gamma$, $\gamma > 1$, DiPerna, Lions 和其他学者通过利用凸弱熵 (2.18) 控制弱熵 - 熵流证明了这一紧性. 对一般压强 $p(\rho)$ 来讲, 这个紧性到现在仍是一个公开问题. 本文我们通过扰动项 δ , 选取比 δ 趋于零速度更快的 ϵ 给出了这个紧性的简单证明. 第 3 步, 我们利用弱熵 - 熵流对的 H_{loc}^{-1} 紧性来证明 Young 测度是 Dirac 测度. 对于压强函数 (1.9), 我们引用了文献 [2] 的结果.

2 定理 1 的证明

本节中, 我们将证明定理 1.

经过简单运算, 方程组 (1.1) 两个特征值为

$$\lambda_1 = \frac{m}{\rho} - \frac{\rho - 2\delta}{\rho} \sqrt{P'(\rho)}, \quad \lambda_2 = \frac{m}{\rho} + \frac{\rho - 2\delta}{\rho} \sqrt{P'(\rho)}, \quad (2.1)$$

相应的右特征向量为

$$r_1 = (1, u - \sqrt{P'(\rho)})^T, \quad r_2 = (1, u + \sqrt{P'(\rho)})^T, \quad (2.2)$$

Riemann 不变量为

$$z(u, v) = -\frac{m}{\rho} + \int_{2\delta}^{\rho} \frac{\sqrt{P'(s)}}{s} ds, \quad w(u, v) = \frac{m}{\rho} + \int_{2\delta}^{\rho} \frac{\sqrt{P'(s)}}{s} ds, \quad (2.3)$$

其中 $m = \rho u$. 而且

$$\nabla \lambda_1 \cdot r_1 = -\frac{4\delta}{\rho^2} \sqrt{P'(\rho)} - \frac{\rho - 2\delta}{2\rho^2 \sqrt{P'(\rho)}} (2P'(\rho) + \rho P''(\rho)), \quad (2.4)$$

以及

$$\nabla \lambda_2 \cdot r_2 = \frac{4\delta}{\rho^2} \sqrt{P'(\rho)} + \frac{\rho - 2\delta}{2\rho^2 \sqrt{P'(\rho)}} (2P'(\rho) + \rho P''(\rho)). \quad (2.5)$$

考虑相应带有初始值 (1.4) 的抛物方程组的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \rho_t + ((\rho - 2\delta)u)_x = \epsilon \rho_{xx}, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 - \delta u^2 + P_1(\rho, \delta))_x + a(x)\rho + c\rho u|u| = \epsilon(\rho u)_{xx}. \end{cases} \quad (2.6)$$

将方程组 (2.6) 分别乘以 (w_ρ, w_m) 和 (z_ρ, z_m) , 可得

$$\begin{aligned} & w_t + \lambda_2 w_x + a(x) + \frac{c|u|}{2}(w - z) \\ &= \epsilon w_{xx} + \frac{2\epsilon}{\rho} \rho_x w_x - \frac{\epsilon}{2\rho^2 \sqrt{P'(\rho)}} (2P' + \rho P'') \rho_x^2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

和

$$\begin{aligned} & z_t + \lambda_1 z_x - a(x) + \frac{c|u|}{2}(z - w) \\ &= \epsilon z_{xx} + \frac{2\epsilon}{\rho} \rho_x z_x - \frac{\epsilon}{2\rho^2 \sqrt{P'(\rho)}} (2P' + \rho P'') \rho_x^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

则由定理 1 中 $P(\rho)$ 的条件, 我们得到

$$w_t + \lambda_2 w_x + a(x) + \frac{c|u|}{2}(w - z) \leq \epsilon w_{xx} + \frac{2\epsilon}{\rho} \rho_x w_x, \quad (2.9)$$

和

$$z_t + \lambda_1 z_x - a(x) + \frac{c|u|}{2}(z - w) \leq \epsilon z_{xx} + \frac{2\epsilon}{\rho} \rho_x z_x. \quad (2.10)$$

作变换

$$w = X + Mt, \quad z = Y + Mt, \quad (2.11)$$

其中 M 是 $a(x)$ 的界. 由 (2.9) 和 (2.10) 式可得

$$\begin{cases} X_t + \lambda_2 X_x + \frac{c|u|}{2}(X - Y) \leq \epsilon X_{xx}, \\ Y_t + \lambda_1 Y_x + \frac{c|u|}{2}(Y - X) \leq \epsilon Y_{xx}, \end{cases} \quad (2.12)$$

满足

$$X|_{t=0} = w|_{t=0} \leq M_1, \quad Y|_{t=0} = z|_{t=0} \leq M_1. \quad (2.13)$$

对方程组 (2.11) 和 (2.12) 应用最大值原理 (参见文献 [3] 中的引理 2.4) 可得估计式 $w(\rho^{\epsilon, \delta}, m^{\epsilon, \delta}) \leq M_1 + tM$, $z(\rho^{\epsilon, \delta}, m^{\epsilon, \delta}) \leq M_1 + tM$. 进而由 (2.6) 中的第一个方程得到 $\rho^{\epsilon, \delta} \geq 2\delta$. 因为对任意的 $c_1 > 0$ 有 $\int_{c_1}^{\infty} \frac{\sqrt{P'(\rho)}}{\rho} d\rho = \infty$ 和 $\int_0^{c_1} \frac{\sqrt{P'(\rho)}}{\rho} d\rho < \infty$. 因此对适当的正函数 $M(t)$, 我们得到估计式

$$2\delta \leq \rho^{\epsilon, \delta}(x, t) \leq M(t), \quad |u^{\epsilon, \delta}(x, t)| \leq M(t), \quad (2.14)$$

其中 $M(t)$ 不依赖于 ϵ, δ .

由 (2.1) 可知当 $\rho = 2\delta$ 时 $\lambda_1 = \lambda_2$. 因此对固定的 $\delta > 0$, 方程组 (1.1) 在区域 $\{(x, t) : \rho > 2\delta\}$ 上是严格双曲的, 而在区域 $\{(x, t) : \rho = 2\delta\}$ 上是非严格双曲的. 然而由 (2.4) 和 (2.5) 式可知在 $\rho \geq 2\delta$ 范围内, 系统 (1.1) 的特征域都是真正非线性的.

对于光滑解, 方程组 (1.1) 的齐次情形等价于如下齐次方程组

$$\begin{cases} \rho_t + (-2\delta u + \rho u)_x = 0, \\ u_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + \int_{2\delta}^{\rho} \frac{(t - 2\delta)P'(t)}{t^2} dt \right)_x = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

特别地, 这两个方程组有相同的熵 - 熵流对. 因此方程组 (1.1) 的熵流 - 熵流对 $(\eta(\rho, m), q(\rho, m))$ 满足方程组

$$q_\rho = u\eta_\rho + \frac{(\rho - 2\delta)P'(\rho)}{\rho^2}\eta_u, \quad q_u = (\rho - 2\delta)\eta_\rho + u\eta_u. \quad (2.16)$$

从 (2.16) 式中消去 q 可得

$$\eta_{\rho\rho} = \frac{P'(\rho)}{\rho^2}\eta_{uu}. \quad (2.17)$$

因此方程组 (1.1) 和方程组 (1.2) 有相同的熵.

容易验证方程组 (1.1) 有一个凸熵

$$\eta^* = \frac{\rho u^2}{2} + \int_{2\delta}^{\rho} \frac{(\rho - t)P'(t)}{t} dt \quad (2.18)$$

和相应的熵流

$$q^* = \frac{\rho u^3}{2} - \frac{\delta u^3}{3} + u(\rho - 2\delta) \int_{2\delta}^{\rho} \frac{P'(t)}{t} dt. \quad (2.19)$$

将方程组 (2.6) 乘以 (η_ρ^*, η_m^*) 可知

$$\epsilon(\rho_x, m_x) \cdot \nabla^2 \eta^*(\rho, m) \cdot (\rho_x, m_x)^T \quad (2.20)$$

或

$$\epsilon \frac{P'(\rho)}{\rho} \rho_x^2 + \epsilon \frac{1}{\rho} \left[\frac{m}{\rho} \rho_x - m_x \right]^2 = \epsilon \frac{P'(\rho)}{\rho} \rho_x^2 + \epsilon \rho u_x^2 \quad (2.21)$$

在 $L_{\text{loc}}^1(R \times R^+)$ 空间是有界的.

因为 $\rho \geq 2\delta$, 由 (2.21) 式可知对固定的 $\delta > 0$,

$$\epsilon \rho_x^2, \epsilon u_x^2 \text{ 在 } L_{\text{loc}}^1(R \times R^+) \text{ 中有界.} \quad (2.22)$$

因此方程组 (1.1) 的光滑熵 - 熵流对 $(\eta_i(\delta, \rho, u), q_i(\delta, \rho, u)), i = 1, 2$ 满足下面测度方程或交换关系方程

$$\begin{aligned} & \langle \nu_{(x,t)}^\delta, \eta_1(\delta) q_2(\delta) - \eta_2(\delta) q_1(\delta) \rangle \\ &= \langle \nu_{(x,t)}^\delta, \eta_1(\delta) \rangle \langle \nu_{(x,t)}^\delta, q_2(\delta) \rangle - \langle \nu_{(x,t)}^\delta, \eta_2(\delta) \rangle \langle \nu_{(x,t)}^\delta, q_1(\delta) \rangle, \end{aligned} \quad (2.23)$$

其中 $\nu_{(x,t)}^\delta$ 是关于 Cauchy 问题 (2.6) 和 (1.4) 粘性解的正概率测度族.

为了应用 DiPerna 在文献 [4] 中所建立的证明 Young 测度是 Dirac 测度的理论框架, 我们构造如下四族特殊形式的 Lax 型熵 - 熵流对:

$$\eta_k^1 = e^{kw} \left(a_1(\rho) + \frac{b_1(\rho, k)}{k} \right), \quad q_k^1 = \eta_k^1 \left(\lambda_2 + \frac{c_1(\rho, k)}{k} + \frac{d_1(\rho, k)}{k^2} \right); \quad (2.24)$$

$$\eta_{-k}^2 = e^{-kw} \left(a_2(\rho) + \frac{b_2(\rho, k)}{k} \right), \quad q_{-k}^2 = \eta_{-k}^2 \left(\lambda_2 + \frac{c_2(\rho, k)}{k} + \frac{d_2(\rho, k)}{k^2} \right); \quad (2.25)$$

$$\eta_k^2 = e^{kz} \left(a_3(\rho) + \frac{b_3(\rho, k)}{k} \right), \quad q_k^2 = \eta_k^2 \left(\lambda_1 + \frac{c_3(\rho, k)}{k} + \frac{d_3(\rho, k)}{k^2} \right); \quad (2.26)$$

$$\eta_{-k}^1 = e^{-kz} \left(a_4(\rho) + \frac{b_4(\rho, k)}{k} \right), \quad q_{-k}^1 = \eta_{-k}^1 \left(\lambda_1 + \frac{c_4(\rho, k)}{k} + \frac{d_4(\rho, k)}{k^2} \right), \quad (2.27)$$

其中 w, z 是由 (2.3) 式给出的方程组 (1.1) 的 Riemann 不变量, 另外所有未知函数 $a_i, b_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 均为 ρ 的单变量函数. 这种特殊的简单的构造可得一个二阶常微分方程, 其中二阶导数的系数为奇异常数 $1/k$. 因此由常微分方程的奇性扰动理论, 对 $2\delta \leq \rho \leq M_1$, 可得函数 $a_i(\rho), b_i(\rho, k)$ 的一致估计

$$0 < a_i(\rho) \leq M, \quad |b_i(\rho, k)| \leq M, \quad (2.28)$$

$$0 < c_i(\rho) \leq M, \quad (\text{或 } -M \leq c_i(\rho) < 0), \quad |d_i(\rho, k)| \leq M, \quad (2.29)$$

其中 M 为一个不依赖于 k 的正常数, $i = 1, 2, 3, 4$.

事实上将熵 $\eta_k^1 = e^{kw} (a_1(\rho) + b_1(\rho, k)/k)$ 代入 (2.17) 式可得

$$k[2f(\rho)a_1' + f'(\rho)a_1] + a_1'' + 2f(\rho)b_1' + f'(\rho)b_1 + \frac{b_1''}{k} = 0, \quad (2.30)$$

其中 $f(\rho) = \frac{\sqrt{P'(\rho)}}{\rho}$. 令

$$2f(\rho)a_1' + f'(\rho)a_1 = 0 \quad (2.31)$$

和

$$a_1'' + 2f(\rho)b_1' + f'(\rho)b_1 + \frac{b_1''}{k} = 0, \quad (2.32)$$

则

$$a_1 = f(\rho)^{-\frac{1}{2}} > 0, \quad \text{当 } \rho \geq 2\delta. \quad (2.33)$$

$b_1(\rho, k)$ 的存在性及其在 $2\delta \leq \rho \leq M_1$ 上关于 k 的一致界 $|b_1(\rho, k)| \leq M$ 可以由如下引理 (参见文献 [5], 也可见 [6] 中的引理 10.2.1) 得到:

引理 4 设 $Y(x) \in C^2[0, h]$ 是方程

$$F(x, Y, Y') = 0$$

的解, 并且对于某些正函数 $l(x), m(x)$ 和 $\lambda_0 > \lambda > 0$, 函数 $f(x, y, z, \lambda), F(x, y, z)$ 在区域 $0 \leq x \leq h, |y - Y(x)| \leq l(x), |z - Y'(x)| \leq m(x)$ 上是连续的. 另外, 对于某些正常数 ϵ, M 和 L ,

$$\begin{aligned} |f(x, y, z, \lambda) - F(x, y, z)| &\leq \epsilon, \\ |F(x, y_2, z) - F(x, y_1, z)| &\leq M|y_2 - y_1|, \\ \frac{F(x, y, z_2) - F(x, y, z_1)}{z_2 - z_1} &\geq L. \end{aligned}$$

如果 $y(x) = y(x, \lambda)$ 是如下二阶常微分方程的一个解:

$$\lambda y'' + f(x, y, y', \lambda) = 0,$$

这里 $y(0) = Y(0)$ 并且 $y'(0)$ 是任意的, 那么对于充分小的 $\lambda > 0, \epsilon > 0$ 和 $P = |y'(0) - Y'(0)|$, 对所有的 $0 \leq x \leq h, y(x)$ 存在并且满足

$$|y(x, \lambda) - Y(x)| < \left[\frac{\epsilon}{M} + \lambda \left(\frac{P}{L} + \frac{N}{M} \right) \right] \exp\left(\frac{Mx}{L}\right),$$

这里 $N = \max_{0 \leq x \leq h} |Y(x)|$.

进一步, 如果对方程 (2.32) 关于 ρ 微分, 我们可以再次利用引理 4 得到 b_1' 关于 k 的界. 根据方程组 (2.16) 的第二个方程可得 η_k^1 对应的熵流 q_k^1 ,

$$q_k^1 = \lambda_2 \eta_k^1 + e^{kw} \left(\frac{(\rho - 2\delta)a_1' - a_1}{k} + \frac{(\rho - 2\delta)b_1' - b_1}{k^2} \right), \quad (2.34)$$

其中

$$(\rho - 2\delta)a_1' - a_1 = -\frac{(\rho P'' + 2P')(\rho - 2\delta) + 8\delta P'}{4\rho P'' f(\rho)^{\frac{1}{2}}} < 0, \quad (2.35)$$

和 $(\rho - 2\delta)b_1' - b_1$ 在 $\rho \in [2\delta, M_1]$ 上均一致有界.

利用相似的方法, 我们可以得到另外的 Lax 型的熵 - 熵流对

$$\begin{cases} \eta_{-k}^2 = e^{-kw} \left(a_2(\rho) + \frac{b_2(\rho, k)}{k} \right), \\ q_{-k}^2 = \lambda_2 \eta_{-k}^2 + e^{-kw} \left(\frac{a_2 - (\rho - 2\delta)a_2'}{k} + \frac{b_2 - (\rho - 2\delta)b_2'}{k^2} \right), \end{cases} \quad (2.36)$$

其中 $a_2(\rho) = a_1(\rho)$ 和 $b_2(\rho, k)$ 满足

$$a_1'' - 2f(\rho)b_2' - f'(\rho)b_2 + \frac{b_2''}{k} = 0; \quad (2.37)$$

$$\begin{cases} \eta_k^2 = e^{kz} \left(a_3(\rho) + \frac{b_3(\rho, k)}{k} \right), \\ q_k^2 = \lambda_1 \eta_k^2 + e^{kz} \left(\frac{(\rho - 2\delta)a_3' - a_3}{k} + \frac{(\rho - 2\delta)b_3' - b_3}{k^2} \right), \end{cases} \quad (2.38)$$

其中 $a_3(\rho) = a_1(\rho)$ 和 $b_3(\rho, k)$ 满足

$$a_1'' - 2f(\rho)b_3' - f'(\rho)b_3 + \frac{b_3''}{k} = 0; \quad (2.39)$$

$$\begin{cases} \eta_{-k}^1 = e^{-kz} \left(a_4(\rho) + \frac{b_4(\rho, k)}{k} \right), \\ q_{-k}^1 = \lambda_1 \eta_{-k}^1 + e^{-kz} \left(\frac{a_4 - (\rho - 2\delta)a_4'}{k} + \frac{b_4 - (\rho - 2\delta)b_4'}{k^2} \right), \end{cases} \quad (2.40)$$

其中 $a_4(\rho) = a_1(\rho)$ 和 $b_4(\rho, k)$ 满足

$$a_1'' + 2f(\rho)b_4' + f'(\rho)b_4 + \frac{b_4''}{k} = 0. \quad (2.41)$$

对方程 (2.41) 应用引理 4 中的讨论可以得到 b_4 的存在性以及 b_4, b_4' 关于 k 的一致界估计. 如果对方程 (2.37) 和 (2.39) 做独立的变换 $\rho_1 = \rho - M_1$ (这里 M_1 是 ρ 的上界), 再由引理 4 我们同样可以得到 b_2, b_3 的存在性及 b_2, b_3, b_2' 和 b_3' 的一致界估计.

这样我们得到了 (2.28)–(2.29) 中的估计. 当我们结合相关的补偿列紧理论对形式 (2.24)–(2.27) 中的熵 - 熵流对应应用 DiPerna 的理论框架 [4], 定理 1 就得到了证明.

3 定理 2 和定理 3 的证明

本节中, 我们将证明定理 2 和定理 3.

首先, 我们回顾对于多方气体和齐次系统情形的定理 2 的证明. 在那里任一弱熵都可以由如下显示公式表示:

$$\eta_0(\rho, u) = \rho \int_0^1 [\tau(1 - \tau)]^\lambda g(u + \rho^\theta - 2\rho^\theta \tau) d\tau, \quad (3.1)$$

其中 $\theta = \frac{\gamma-1}{2}, \lambda = \frac{3-\gamma}{2(\gamma-1)}$ 且 g 是一光滑函数. 用 $(\eta_{0\rho}, q_{0\rho})$ 去乘如下抛物方程组

$$\begin{cases} \rho_t + m_x = \epsilon \rho_{xx}, \\ m_t + \left(\frac{m^2}{\rho} + \rho^\gamma \right)_x = \epsilon m_{xx}, \end{cases} \quad (3.2)$$

得到

$$\eta_{0t} + q_{0x} = \epsilon \eta_{0xx} - \epsilon (\rho_x^\epsilon, m_x^\epsilon) \cdot \nabla^2 \eta_0(\rho^\epsilon, m^\epsilon) \cdot (\rho_x^\epsilon, m_x^\epsilon)^T, \quad (3.3)$$

这里 q_0 是对应 η_0 的熵流. 由

$$\eta_c = \frac{m^2}{2\rho} + \frac{1}{\gamma-1} \rho^\gamma \quad (3.4)$$

的严格凸性及 η_0 显示公式 (3.1) 可知 η_0 的 Hessian 矩阵可由 η_c 的 Hessian 矩阵控制. 因此

$$\epsilon (\rho_x^\epsilon, m_x^\epsilon) \cdot \nabla^2 \eta_0(\rho^\epsilon, m^\epsilon) \cdot (\rho_x^\epsilon, m_x^\epsilon)^T \quad (3.5)$$

在 $L^1_{\text{loc}}(R \times R^+)$ 中有界. 由 Sobolev 嵌入定理可知, 当 $\alpha \in (1, 2)$ 时, (3.5) 在 $W^{-1,\alpha}_{\text{loc}}(R \times R^+)$ 中紧. 其次在 $1 < \gamma < 2$ 的情况下, 由于 η_c 是严格凸的并且 $\eta_{0\rho}, \eta_{0m}$ 是一致有界的, 可以证明 $\epsilon\eta_{0xx}(\rho^\epsilon, m^\epsilon)$ 在 $H^{-1}_{\text{loc}}(R \times R^+)$ 中紧. 注意到 (3.3) 式的左边在 $W^{-1,\infty}(R \times R^+)$ 中关于 ϵ 一致有界, 应用 Murat 定理 [7], 对于 $1 < \gamma < 2$ 情形可得定理 2 的证明. 然而对于 $\gamma > 2$ 的情形, 熵 η_c 不是严格凸的, 因此 $\epsilon\eta_{0xx}(\rho^\epsilon, m^\epsilon)$ 在 $H^{-1}_{\text{loc}}(R \times R^+)$ 中的紧性并不明显. 为了解决这个技术难点, [8] 的作者利用空间变量 x 的周期粘性解得到一个辅助估计 (见文献 [8] 中的 (I.53)):

$$\int_0^T dt \int_0^L dx \epsilon^2 (\rho_x^\epsilon)^2 \rightarrow 0 \quad \text{当 } \epsilon \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

本节中, 我们利用近似参数 δ 的技巧, 可容易得到 $\epsilon\eta_{0xx}(\rho^\epsilon, m^\epsilon)$ 在 $H^{-1}_{\text{loc}}(R \times R^+)$ 中的紧性. 下面, 我们对于更一般压力函数的非齐次方程组 (1.2) 证明定理 2.

将方程组 (2.6) 改写为如下等价方程组

$$\begin{cases} \rho_t + ((\rho - 2\delta)u)_x = \epsilon\rho_{xx}, \\ u_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + \int_{2\delta}^{\rho} \frac{(t - 2\delta)P'(t)}{t^2} dt \right)_x + a(x) + cu|u| = \epsilon u_{xx} + \frac{2\epsilon}{\rho} \rho_x u_x. \end{cases} \quad (3.7)$$

假定 $(\eta(\rho, u), q(\rho, u)), (\eta(\rho, u), q_1(\rho, u, \delta))$ 是相应方程组 (1.1), (1.2) 的熵 - 熵流对. 它们有相同的熵, 但不相同的熵流. 用 (η_ρ, η_u) 乘方程组 (3.7), 我们得到

$$\begin{aligned} & \eta(\rho^\epsilon, m^\epsilon)_t + q(\rho^\epsilon, m^\epsilon)_x + (a(x) + cu^\epsilon|u^\epsilon|)\eta_u \\ &= \epsilon\eta(\rho^\epsilon, m^\epsilon)_{xx} - (q_1(\rho^\epsilon, m^\epsilon, \delta) - q(\rho^\epsilon, m^\epsilon))_x + \frac{2\epsilon}{\rho^\epsilon} \eta_u \rho_x u_x \\ & \quad - \epsilon(\eta_{\rho\rho}\rho_x^2 + 2\eta_{\rho u}\rho_x u_x + \eta_{uu}u_x^2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

由于 $\eta(\rho, u) = \rho H(\rho, u)$, 利用熵方程 (2.14) 得到

$$\begin{aligned} \eta_\rho &= \int_0^\rho \frac{P'(\tau)}{\tau^2} \eta_{uu}(\tau, u) d\tau + g(u) \\ &= \int_0^\rho \frac{P'(\tau)}{\tau} H_{uu}(\tau, u) d\tau + g(u), \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中 $g(u)$ 是任一光滑函数. 利用 $\eta(0, u) = 0$ 和对 (3.9) 积分我们得到

$$\eta = \int_0^\rho \int_0^t \frac{P'(\tau)}{\tau} H_{uu}(\tau, u) d\tau dt + g(u)\rho. \quad (3.10)$$

那么

$$\eta_u = \int_0^\rho \int_0^t \frac{P'(\tau)}{\tau} H_{uuu}(\tau, u) d\tau dt + g'(u)\rho, \quad (3.11)$$

$$\eta_{\rho u} = \int_0^\rho \frac{P'(\tau)}{\tau} H_{uuu}(\tau, u) d\tau + g'(u). \quad (3.12)$$

把 (3.11), (3.12) 代入 (3.8), 利用熵方程 (2.14) 我们得到如下等式

$$\eta(\rho^\epsilon, m^\epsilon)_t + q(\rho^\epsilon, m^\epsilon)_x = I_1 + I_2 + I_3, \quad (3.13)$$

其中

$$I_1 = \epsilon \eta(\rho^\epsilon, m^\epsilon)_{xx} - (q_1(\rho^\epsilon, m^\epsilon, \delta) - q(\rho^\epsilon, m^\epsilon))_x, \quad (3.14)$$

$$I_2 = -\epsilon \left(\frac{P'(\rho^\epsilon)}{\rho^\epsilon} H_{uu}(\rho^\epsilon, u^\epsilon) \rho_x^2 + \rho^\epsilon H_{uu} u_x^2 \right) - \rho^\epsilon H_u(a(x) + cu^\epsilon |u^\epsilon|), \quad (3.15)$$

$$I_3 = -2\epsilon \left(\int_0^\rho \frac{P'(\tau)}{\tau} H_{uuu}(\tau, u^\epsilon) d\tau - \frac{1}{\rho^\epsilon} \int_0^\rho \int_0^t \frac{P'(\tau)}{\tau} H_{uuu}(\tau, u^\epsilon) d\tau dt \right) \rho_x u_x. \quad (3.16)$$

对于任意 $\phi \in C_0^1(R \times R^+)$, 其中 $S = \text{supp } \phi$, 由于 $\epsilon = o(\frac{P'(2\delta)}{2\delta})$ 或者当 $\epsilon, \delta \rightarrow 0$ 时 $\frac{\epsilon \rho^\epsilon}{P'(\rho^\epsilon)} \rightarrow 0$, 有

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \epsilon \eta(\rho^\epsilon, m^\epsilon)_{xx} \phi dx dt \right| \\ & \leq \epsilon \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |(\eta_\rho \rho_x^\epsilon + H_u \rho^\epsilon u_x^\epsilon) \phi_x| dx dt \\ & \leq M \left[\left(\int \int_S \epsilon \frac{P'(\rho^\epsilon)}{\rho^\epsilon} (\rho_x^\epsilon)^2 \frac{\epsilon \rho^\epsilon}{P'(\rho^\epsilon)} dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int \int_S \epsilon^2 (\rho^\epsilon)^2 (u_x^\epsilon)^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left(\int \int_S (\phi_x)^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

因为当 δ 趋于 0 时 $q_1(\rho^\epsilon, m^\epsilon, \delta) - q(\rho^\epsilon, m^\epsilon)$ 趋于 0, 我们得到 I_1 在 $H_{\text{loc}}^{-1}(R \times R^+)$ 中的紧性. 由 (2.19) 和 (2.11) 我们知道 I_2 在 $L_{\text{loc}}^1(R \times R^+)$ 中有界. 因此对于 $\alpha \in (1, 2)$, I_2 在 $W_{\text{loc}}^{-1, \alpha}(R \times R^+)$ 中紧. 由 Volpert 定理和 (1.7) 给出的极限, 我们有如下的估计

$$\begin{cases} \left| \int_0^\rho \frac{P'(\tau)}{\tau} H_{uuu}(\tau, u) d\tau \right| \leq M \left| \int_0^\rho \frac{P'(\tau)}{\tau} d\tau \right| \leq M_1 \sqrt{P'(\rho)}, \\ \left| \int_0^\rho \int_0^t \frac{P'(\tau)}{\tau} H_{uuu}(\tau, u) d\tau dt \right| \leq M \left| \int_0^\rho \int_0^t \frac{P'(\tau)}{\tau} d\tau dt \right| \leq M_1 \rho \sqrt{P'(\rho)}. \end{cases} \quad (3.18)$$

利用上述估计以及 (2.19) 可得 I_3 在 $L_{\text{loc}}^1(R \times R^+)$ 中有界. 因此由 Sobolev 嵌入定理, 也就得到了对于 $\alpha \in (1, 2)$, I_3 在 $W_{\text{loc}}^{-1, \alpha}(R \times R^+)$ 中的紧性.

因此对于 $\alpha \in (1, 2)$, (3.13) 的右边在 $W_{\text{loc}}^{-1, \alpha}(R \times R^+)$ 中紧. 但 (3.13) 的左边也在 $W^{-1, \infty}(R \times R^+)$ 中有界, 利用 Murat 定理 (参见文献 [7]) 我们得到 $\eta(\rho^\epsilon, m^\epsilon)_t + q(\rho^\epsilon, m^\epsilon)_x$ 在 $H_{\text{loc}}^{-1}(R \times R^+)$ 中的紧性和定理 2 的证明.

定理 3 的证明 在定理 2 关于压力函数 $P(\rho)$ 的假设和 $\eta(\rho^\epsilon, m^\epsilon)_t + q(\rho^\epsilon, m^\epsilon)_x$ 在 $H_{\text{loc}}^{-1}(R \times R^+)$ 的紧性条件下, 文 [2] 中作者已经建立了关于粘性解 $(\rho^\epsilon, m^\epsilon)$ 的紧性理论框架. 基于这个框架和定理 2 给出的结果, 我们可以简单地得到定理 3 的证明.

参考文献

- 1 Klingenberg C, Lu Y G. Existence of solutions to hyperbolic conservation laws with a source. Commun Math Phys, 1997, 187: 327–340
- 2 Chen G Q, LeFloch P. Existence theory for the isentropic Euler equations. Arch Rat Mech Anal, 2003, 166: 81–98
- 3 Lu Y G. Global Hölder continuous solution of isentropic gas dynamics. Proc Royal Soc Edinburgh Ser A, 1993, 123: 231–238
- 4 DiPerna R J. Convergence of approximate solutions to conservation laws. Arch Rat Mech Anal, 1983, 82: 27–70

- 5 Kamke E. Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen: 1. Gewöhnliche Differentialgleichungen. Sixth ed. Leipzig: Akademische Verlagsanstalt, 1959
- 6 Lu Y G. Hyperbolic Conservation Laws and the Compensated Compactness Method. New York: Chapman & Hall/CRC Press, 2003
- 7 Murat F. Compacité par compensation. Ann Scuola Norm Sup Pisa, 1978, 5: 489–507
- 8 Lions P L, Perthame B, Souganidis P E. Existence and stability of entropy solutions for the hyperbolic systems of isentropic gas dynamics in Eulerian and Lagrangian coordinates. Comm Pure Appl Math, 1996, 49: 599–638
- 9 Ding X X, Chen G Q, Luo P Z, Convergence of the fractional step Lax-Friedrichs scheme and Godunov scheme for the isentropic system of gas dynamics. Comm Math Phys, 1989, 121: 63–84
- 10 DiPerna R J. Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics. Comm Math Phys, 1983, 91: 1–30
- 11 Glimm J. Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations. Comm Pure Appl Math, 1965, 18: 95–105
- 12 Huang F M, Wang Z. Convergence of viscosity solutions for isentropic gas dynamics. SIAM J Math Anal, 2003, 34: 595–610
- 13 Lax P D. Shock waves and entropy. In: Contributions to Nonlinear Functional Analysis, Zarantonello E, ed. New York: Academia Press, 1971
- 14 Lax P D. Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves. Philadelphia: SIAM, 1973
- 15 Lions P L, Perthame B, Tadmor E. Kinetic formulation of the isentropic gas dynamics and p -system. Comm Math Phys, 1994, 163: 15–431
- 16 Lu Y G. Convergence of the viscosity method for nonstrictly hyperbolic conservation laws. Comm Math Phys, 1992, 150: 59–64
- 17 Lu Y G. Existence of global entropy solutions to a nonstrictly hyperbolic system. Arch Rat Mech Anal, 2005, 178: 287–299
- 18 Lu Y G. Some results on general system of isentropic gas dynamics. Differential Equations, 2007, 43: 130–138
- 19 Tartar T. Compensated compactness and applications to partial differential equations. In: Research Notes in Mathematics, Nonlinear Analysis and Mechanics, Heriot-Watt symposium, Vol. 4, Knops R J, ed. London: Pitman Press, 1979