【研究简报】

K 一致凸空间与 K 一致光滑空间

苏雅拉图^{①*} 吴从炘^②

(①内蒙古师范大学, 呼和浩特 010022; ②哈尔滨工业大学, 哈尔滨 150006)

关键词 K 一致凸性 K 一致光滑性

在 Banach 空间几何研究(特别是凸性与光滑性的研究)中, 相互共轭关系的研究占据着重要地位. 因此, 一旦给定某种凸性 C (或光滑性 S), 并且凸性 C (或光滑性 S)被广泛研究时, 合理引进并研究凸性 C (或光滑性 S)的对偶概念——某种光滑性(或凸性)显得尤为重要.

自从 Sullivan 在文献[1]中引进 K 一致凸空间(KUR)以来, 国内外数学工作者大量研究了 KUR 空间的性质, 得到了许多令人鼓舞的重要结果, 这一空间的理论研究已比较完善. 但是, K 一致凸性概念的对偶概念——所谓的 K 一致光滑性概念至今未给出, 因而, 关于 Banach 空间 K 一致光滑性的研究尚未展开. 虽然 1984 年 Istratescu 在文献[2]中曾引进了一种 K 一致光滑性的概念, 但他所引进的 K 一致光滑性与通常的一致光滑性等价(1988 年被南朝勋^[3]证明).

本文合理地引进了 K 一致光滑性(KUS)的概念, 证明了我们所引进的 K 一致光滑性与 Sullivan 引进的 K 一致凸恰好是一对对偶概念, 并且得到: X 是 KUS 空间, 则 X 是 $(K+1)$ US 空间; X^* 是 KUR 空间当且仅当 X 是 KUS 空间; X^* 是 KUS 空间当且仅当 X 是 KUR 空间, 从而弄清了 K 一致凸空间的共轭空间 X^* 的特征. 在此基础上我们研究了南朝勋在文献[4]中引进的 K 强光滑空间与上述 K 一致光滑空间之间的关系, 证明了 KUS 空间蕴含 K 强光滑空间. 考虑 $k=1$ 时的特殊情况, 我们肯定了 1一致光滑空间是通常的一致光滑空间. 因此, K 一致光滑性是一致光滑性概念的自然推广. 本文的结果完善和推广了文献[1~10]以及有关 KUR 空间的研究. 关于 KUS 空间与局部 K 一致光滑($LKUS$)空间的进一步研究我们拟在另文中展开.

- 4 Møller C, Plesset M S. Note on an approximation treatment for many-electron systems. *Phys Rev*, 1934, 46: 618
- 5 Pople J A, Binkley J S, Seeger R. Theoretical models incorporating electron correlation. *Int J Quantum Chem Symp*, 1976, 10: 1
- 6 Dewar M J S, Zoebisch E G, Healy E F, et al. Development and use of quantum mechanical molecular model 76. AM1 a new general purpose quantum mechanical molecular model. *J Am Chem Soc*, 1985, 107: 3 092
- 7 Frisch M J, Trucks G W, Schlegel H B, et al. Gaussian 92/DFT, Revision F2, Pittsburgh PA: Gaussian Inc, 1993
- 8 Naumenko V N, Koren A O, Gaponik P N. Nitrogen-15NMR study of tetrazoles. *Magn Reson Chem*, 1992, 30(6): 558
- 9 Butler R N, McEvoy T M. A carbon-13NMR study of annular tautomerism in some 5-substituted tetrazoles. *Proc R Ir Acad, Sect B*, 1977, 77B(19-47): 359
- 10 MoEvan W S, Rigg M W. The heats of combustion of compounds containing the tetrazole ring. *J Am Chem Soc*, 1951, 73: 4 725

(1997-09-03 收稿)

* 哈尔滨工业大学访问学者

1 KUS 空间的定义及主要结果

定义 1 Banach 空间 X 说是 K 一致光滑的, 如果对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta(\epsilon) > 0$, 使得当 $x_1^*, \dots, x_{k+1}^* \in S(X^*)$, $\|x_1^* + \dots + x_{k+1}^*\| > (k+1) - \delta$ 时, 有

$$B(x_1^*, \dots, x_{k+1}^*) = \sup \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1^*(x_1) & x_2^*(x_1) & \cdots & x_{k+1}^*(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^*(x_k) & x_2^*(x_k) & \cdots & x_{k+1}^*(x_k) \end{vmatrix} : x_1, \dots, x_k \in S(X) \right\} < \epsilon.$$

定理 1 (a) 若 X^* 是 KUR 空间, 则 X 是 KUS 空间, (b) 若 X^* 是 KUS 空间, 则 X 是 KUR 空间.

定理 2 X^* 是 KUR 空间当且仅当 X 是 KUS 空间.

定理 3 X^* 是 KUS 空间当且仅当 X 是 KUR 空间.

定理 4 若 X 是 KUS 空间, 则 X 是 K 强光滑空间.

推论 1 X^* 是一致光滑当且仅当 X 是一致凸^[6].

推论 2 若 X 是一致光滑空间, 则 X 是强光滑空间.

定理 5 若 X 是 KUS 空间, 则 X 是 $(K+1)$ US.

例 存在一个无穷维的 Banach 空间, 它是 KUS 的, 但不是 $(K-1)$ US.

事实上, 当 $k \geq 2$ (k 为整数) 且 $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ 时, 对每一个 $x = (a_1, a_2, \dots) \in l_2$, 令

$$\|x\|_{i_1, \dots, i_k}^2 = \sum_{j=1}^k |a_{ij}|^2 + \sum_{i \neq i_1, \dots, i_k} a_i^2,$$

则 $X_{i_1, \dots, i_k} = (l_2, \|\cdot\|_{i_1, \dots, i_k})$ 是 KUR 空间且它不是 $(K-1)$ UR 空间^[10]. 因此, 由定理 3 知, $X_{i_1, \dots, i_k}^*$ 是 KUS 空间, 再由定理 1 知, $X_{i_1, \dots, i_k}^*$ 不是 $(K-1)$ US 空间.

注 (i) 定理 2 说明: 若 X 是 KUS 空间, 则 X 必自反.

(ii) 当 $k=1$ 时, 1UR 空间是通常的 UR 空间(见文献[1]), 1强光滑空间是通常的强光滑空间(见文献[5]), 1US 空间是通常的 US 空间(事实上, 由定义 1 知, X 是 1US $\Leftrightarrow$ 对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta(\epsilon) > 0$, 当 $x^*, y^* \in S(X^*)$, $\|x^* + y^*\| > 2 - \delta$, 时有 $\sup |x^*(x) - y^*(x)| < \epsilon$, $\forall x \in S(X)$, $\Leftrightarrow X^*$ 是一致凸, 又因为, X 是一致光滑当且仅当 X^* 是一致凸, 于是得到, X 是 1US $\Leftrightarrow X$ 是一致光滑).

2 定理的证明

为了证明定理 1, 我们来回顾 KUR 空间的定义:

Banach 空间 X 说是 K 一致凸的^[1], 如果对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta(\epsilon) > 0$, 使得当 $x_1, \dots, x_{k+1} \in S(X)$, $\|x_1 + \dots + x_{k+1}\| > (k+1) - \delta$ 时, 有

$$A(x_1, \dots, x_{k+1}) = \sup \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1^*(x_1) & x_1^*(x_2) & \cdots & x_1^*(x_{k+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_k^*(x_1) & x_k^*(x_2) & \cdots & x_k^*(x_{k+1}) \end{vmatrix} : x_1^*, \dots, x_k^* \in S(X^*) \right\} < \epsilon.$$

定理 1 的证明 (a) 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta(\epsilon) > 0$, 使得当 $x_1^*, \dots, x_{k+1}^* \in S(X^*)$, $\|x_1^* + \dots + x_{k+1}^*\| > (k+1) - \delta$ 时, 有

$\cdots + x_{k+1}^* \| > (k+1) - \delta$ 时, 由 X^* 是 KUR 空间知, $A(x_1^*, \cdots, x_{k+1}^*) < \epsilon$. 另一方面, 对 $\forall x_1, \cdots, x_k \in S(X)$, 有 $x_1, \cdots, x_k \in S(X^{**})$. 因此, $B(x_1^*, \cdots, x_{k+1}^*) \leq A(x_1^*, \cdots, x_{k+1}^*) < \epsilon$, 故 X 是 KUS 空间.

(b) 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta(\epsilon) > 0$, 使得当 $x_1, \cdots, x_{k+1} \in S(X)$, $\|x_1 + \cdots + x_{k+1}\| > (k+1) - \delta$ 时, 有 $x_1, \cdots, x_{k+1} \in S(X^{**})$ 且由 X^* 是 KUS 空间知, $B(x_1, \cdots, x_{k+1}) < \epsilon$, 于是 $A(x_1, \cdots, x_{k+1}) = B(x_1, \cdots, x_{k+1}) < \epsilon$. 故 X 是 KUR 空间.

证明定理 2 时用到 James 的一个著名结果, 即用到下面的

引理 1^[9] Banach 空间 X 不是自反的当且仅当对任何 $\theta, 0 < \theta < 1$, 存在 $x_n \in S(X), x_n^* \in S(X^*)$, 使得

$$x_j^*(x_i) = \begin{cases} \theta, & \text{当 } j \leq i \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } j > i \text{ 时.} \end{cases}$$

定理 2 的证明 必要性: 由定理 1 立即得到. 充分性: 先证明 KUS 空间 X 是自反的, 若 X 不是自反的, 则利用引理 1, 对 $\forall \epsilon > 0, (0 < \epsilon < 1)$, 选取 $0 < \theta < 1, \theta > 1 - \frac{\delta(\epsilon)}{k+1}$ 且 $\theta^k > \epsilon, x_1, \cdots, x_{k+1} \in S(X), x_1^*, \cdots, x_{k+1}^* \in S(X^*)$, 使

$$x_j^*(x_i) = \begin{cases} \theta & \text{当 } j \leq i \text{ 时,} \\ 0 & \text{当 } j > i \text{ 时.} \end{cases}$$

这里 $\delta(\epsilon)$ 为 KUS 空间定义中相应的 δ . 这时,

$$\|x_1^* + \cdots + x_{k+1}^*\| \geq x_1^*(x_{k+1}) + \cdots + x_{k+1}^*(x_{k+1}) = (k+1)\theta > (k+1) - \delta(\epsilon).$$

另一方面,

$$\epsilon < \theta^k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1^*(x_2) & x_2^*(x_2) & x_3^*(x_2) & \cdots & x_{k+1}^*(x_2) \\ x_1^*(x_3) & x_2^*(x_3) & x_3^*(x_3) & \cdots & x_{k+1}^*(x_3) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^*(x_{k+1}) & x_2^*(x_{k+1}) & x_3^*(x_{k+1}) & \cdots & x_{k+1}^*(x_{k+1}) \end{vmatrix},$$

这与 X 是 KUS 空间相矛盾, 这一矛盾说明 KUS 空间 X 是自反的, 再由定理 1 知, X^* 是 KUR 空间.

定理 3 的证明 注意到 KUR 空间的自反性^[1], 再利用定理 1 便得到定理 3 的证明.

为了证明定理 4, 我们来回顾 K 强光滑空间的定义:

Banach 空间 X 说是 K 强光滑的, 如果 X 是 K 光滑空间^[4] 且对任意 $x \in S(X)$, 当 $x_n^* \in S(X^*), x_n^*(x) \rightarrow 1$ 时, (x_n^*) 为相对紧集.

证明定理 4 时用到以下几个引理:

引理 2^[5] 对每一个 $x \in X$, 定义 $\hat{x}(x^*) = x^*(x), \forall x^* \in X^*$. 如果

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hat{x}_1(x_1^*) & \hat{x}_1(x_2^*) & \cdots & \hat{x}_1(x_{k+1}^*) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{x}_k(x_1^*) & \hat{x}_k(x_2^*) & \cdots & \hat{x}_k(x_{k+1}^*) \end{vmatrix} = 0, \forall x_1, \cdots, x_k \in S(X),$$

则 $x_1^*, \cdots, x_{k+1}^*$ 线性相关.

引理3^[4] X 是 K 光滑当且仅当对任意 $x \in X$, $\dim S_x \leq k$ (其中 $S_x \equiv \{x^* : x^* \in S(X^*), x^*(x) = 1 = \|x\|\}$).

引理4^[7] 设 (x_n) 是 X 中的有界序列且 $\epsilon > 0$. 若 (x_n) 没有有限 ϵ -网, 则对任何正整数 n_0, k 及任何 $x \in X$, 存在 $n_1, \dots, n_k > n_0$, 使 $d(x_{n_1}, \text{span}\{x\}) > \frac{\epsilon}{2}$ 且 $d(x_{n_{i+1}}, \text{span}\{x, x_{n_1}, \dots, x_{n_i}\}) > \frac{\epsilon}{2}, i = 1, 2, \dots, k-1$.

定理4的证明 分两步来完成定理4的证明. 首先, 将证明 KUS 空间蕴含 K 光滑空间, 对任何 $x \in S(X)$ 以及任意 $(k+1)$ 个元素 $x_0^*, x_1^*, \dots, x_k^* \in S_x$, 有

$$k+1 = \sum_{i=0}^k x_i^*(x) \leq \|x\| \left\| \sum_{i=0}^k x_i^* \right\| \leq \sum_{i=0}^k \|x_i^*\| = k+1,$$

于是得到 $\left\| \sum_{i=0}^k x_i^* \right\| = k+1$. 因此, 对 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, 使

$$\|x_0^* + x_1^* + \dots + x_k^*\| > (k+1) - \delta.$$

再由 X 是 KUS 空间知,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0^*(x_1) & x_1^*(x_1) & \dots & x_k^*(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^*(x_k) & x_1^*(x_k) & \dots & x_k^*(x_k) \end{vmatrix} < \epsilon, \forall x_1, \dots, x_k \in S(X).$$

由引理2知, $x_0^*, x_1^*, \dots, x_k^*$ 线性相关, 利用引理3便知, X 是 K 光滑空间.

其次, 将证明: 若 $x \in S(X)$, $x_n^* \in S(X^*)$, $x_n^*(x) \rightarrow 1$, 则 (x_n^*) 是相对紧集. 若 (x_n^*) 不是相对紧集, 则对某个 $\epsilon_0 > 0$, (x_n^*) 没有有限 ϵ_0 -网. 由引理4, 对任意正整数 n_0 和 $x^* \in X^*$, 存在 $n_1, \dots, n_k > n_0$, 使 $d(x_{n_1}^*, \text{span}\{x^*\}) > \frac{\epsilon_0}{2}$ 且 $d(x_{n_{i+1}}^*, \text{span}\{x^*, x_{n_1}^*, \dots, x_{n_i}^*\}) > \frac{\epsilon_0}{2}, i = 1, 2, \dots, k-1$.

因此, 存在 $n_1^{(m)}, n_2^{(m)}, \dots, n_k^{(m)}$ 使 $n_i^{(m)} \rightarrow \infty (i = 1, 2, \dots, k)$ 且对 $\forall n_1^{(m)}, n_2^{(m)}, \dots, n_k^{(m)}$, 有

$$d(x_{n_1}^{*(m)}, \text{span}\{x^*\}) > \frac{\epsilon_0}{2},$$

且

$$d(x_{n_{i+1}}^{*(m)}, \text{span}\{x^*, x_{n_1}^{*(m)}, \dots, x_{n_i}^{*(m)}\}) > \frac{\epsilon_0}{2}, i = 1, 2, \dots, k-1, m = 1, 2, \dots.$$

由 Hahn-Banach 定理, 选取 $x_{n_1}^{*(\#)}, \dots, x_{n_k}^{*(\#)} \in S(X^{**})$ 使

$$x_{n_1}^{*(\#)}(x_{n_1}^{*(m)}) > \frac{\epsilon_0}{2}, x_{n_1}^{*(\#)}(y^*) = 0, y^* \in \text{span}\{x^*\},$$

$$x_{n_i}^{*(\#)}(x_{n_i}^{*(m)}) > \frac{\epsilon_0}{2}, x_{n_i}^{*(\#)}(y^*) = 0, y^* \in \text{span}\{x^*, x_{n_1}^{*(m)}, \dots, x_{n_{i-1}}^{*(m)}\}, i = 2, \dots, k.$$

于是

$$A(x^*, x_{n_1}^{*(m)}, \dots, x_{n_k}^{*(m)}) > \left(\frac{\epsilon_0}{2}\right)^k > 0. \quad (*)$$

特别地,可取式(*)中的 x^* 为满足 $x^*(x) = 1 = \|x^*\|$ 的 x^* .

另一方面,由于 $x_n^*(x) \rightarrow 1 = x^*(x)$, 所以

$$\|x^* + x_{n_1}^{*(m)} + \dots + x_{n_k}^{*(m)}\| \rightarrow k+1, m \rightarrow \infty,$$

因为 X 是 KUS 空间, 所以 $A(x^*, x_{n_1}^{*(m)}, \dots, x_{n_k}^{*(m)}) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$, 这与式(*)产生矛盾, 这一矛盾说明 (x_n^*) 是相对紧集, 由上述两个步骤便知, X 是 K 强光滑空间.

定理5的证明 设存在范数为1的序列 $(f_n^{(1)}), (f_n^{(2)}), \dots, (f_n^{(k+2)})$ 使

$$\|f_n^{(1)} + f_n^{(2)} + \dots + f_n^{(k+2)}\| \rightarrow k+2.$$

则利用三角不等式, 对每一个 j 有

$$\|f_n^{(1)} + \dots + f_n^{(j-1)} + f_n^{(j+1)} + \dots + f_n^{(k+2)}\| \rightarrow k+1. \quad (**)$$

设 $x_1, x_2, \dots, x_{k+1} \in S(X)$, 并考虑行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ f_n^{(1)}(x_1) & f_n^{(1)}(x_1) & \dots & f_n^{(1)}(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n^{(1)}(x_{k+1}) & f_n^{(2)}(x_{k+1}) & \dots & f_n^{(k+2)}(x_{k+1}) \end{vmatrix},$$

按第二行展开上面行列式, 并利用式(**)和假设条件 X 是 KUS 便得到 X 是 $(K+1)US$ 空间.

致谢 本工作为数学天元基金和内蒙古教育厅自然科学基金资助项目.

参 考 文 献

- 1 Sullivan F. A generalization of uniformly rounded spaces. *Canad J Math*, 1979, 31: 628~636
- 2 Istratescu V I. *Strict Convexity and Complex Strict Convexity*, New York, Basel: Marcel Dekker Inc, 1984
- 3 Nan Chaoxun. Some remarks on the k -uniformly convexity and k -uniformly smoothness. *Journal of Mathematical Research and Exposition*, 1990, 10(1): 47~50
- 4 Nan Chaoxun, Wang Jianhua. k -strict convexity and k -smoothness. *Chinese Ann Math*, 1990, A 11 (3): 321~324
- 5 Cao Wenchun. Various k -smoothness of norms on Banach space. *Journal of Mathematical Research and Exposition*, 1995, 15 (2): 244~248
- 6 Yu Xintai. *Geometric Theory of Banach Spaces*. Shanghai: East China Normal University Press, 1986
- 7 Nan Chaoxun, Wang Jianhua. On the LK-UR and L-KR spaces. *Math Proc Camb Phil Soc*, 1988, 104: 521~526
- 8 Suyalatu, Wu Congxin. k -strong convexity and k -strong smoothness, *Chinese Ann Math*, A (accepted for publication)
- 9 James R C. Weak* compactness and reflexivity. *Israel J Math*, 1964, 2: 101~119
- 10 Lin Borluh, Yu Xintai. On the k -uniformly rotund and fully convex Banach spaces. *J Math Anal Appl*, 1985, 110: 407~410

(1997-05-21 收稿)