基于能量割的 SAR 图像分割

李小斌

西安电子科技大学数学与统计学院, 西安 710071

E-mail: lixiaobin96@outlook.com

收稿日期: 2016-01-19; 接受日期: 2016-02-26; 网络出版日期: 2016-10-25

摘要 本文基于万有引力定律提出了一个新的图分割模型——能量割模型, 设计了一个基于能量割的 SAR 图像分割算法 (energy cut based SAR image segmentation, ECSIS). 能量割模型的最大特点是优化该模型可以获得类内引力最大, 类间引力最小的图分割. 本文证明可通过求解一个特征向量问题得到能量割的最优连续近似解. 进一步, 本文给出了利用能量割的最优连续近似解得到其离散解的方法, 并证明由此得到的离散解是能量割的最优离散近似解. 合成及真实 SAR 图像上的实验结果表明 ECSIS 是有效的.

关键词 SAR, 图像分割, 图, 能量割, 谱聚类

1 引言

SAR (synthetic aperture radar) 图像分割是 SAR 图像自动分析和解译的前提和基础. 目前, 随着 SAR 图像数据的增加和应用面的扩大, 对 SAR 图像分割的要求也越来越高. 多年来, 在实际应用的驱动下已经提出了许多 SAR 图像分割方法, 例如, 基于阈值的分割方法^[1]、基于边缘提取的分割方法^[2]、基于区域增长的分割方法^[3]、基于 Markov 随机场的分割方法等等^[4~8]. 然而, 由于 SAR 图像的成像特点, 特别是斑点噪声的影响, SAR 图像分割一直是 SAR 图像研究的难点和热点之一.

近年来, 利用谱聚类进行图像分割成为一个研究的热点^[9~13]. 该方法将图像的分割问题转化为图的分割问题, 通过利用与图相关的一个矩阵的特征值和特征向量来实现图的分割, 进而得到图像的分割结果. 由于该方法运行简单, 在对图像进行分割时可以结合多种图像分割特征, 效果好, 出现了很多基于谱聚类的 SAR 图像分割算法^[14~17]. 尽管这些方法在一些实际的 SAR 图像上已获得较好的效果, 但是将谱聚类应用于 SAR 图像时还存在如下两个问题: (1) 在利用谱聚类对图像进行分割时, 往往需要优化一个图分割模型, 例如 Normalized cut 模型^[18]、Ratio cut 模型^[19]、Minmax cut 模型^[20]等. Normalized cut 模型是目前较为常用的一个图分割模型, 该模型的目标是获得类内相似度最大、类间相似度最小的图分割. 但是, Normalized cut 模型倾向于对图进行“平衡割”^[21]——将图的顶点集分成具有等类内相似度的类, 这在实际的图像分割中是不现实的. 其他的图分割模型, 如 Ratio cut 模

引用格式: 李小斌. 基于能量割的 SAR 图像分割. 中国科学: 信息科学, 2017, 47: 86–98, doi: 10.1360/N112016-00016

Li X B. Energy cut based SAR image segmentation (in Chinese). Sci Sin Inform, 2017, 47: 86–98, doi: 10.1360/N112016-00016

型、Minmax cut 模型等也存在类似的问题. (2) 图分割模型的求解往往是 NP 难问题, 所以常用与图相关的某一矩阵的特征向量作为该分割模型的近似解. 这实际上定义了一个非线性映射 (谱映射) — 借助图分割模型将待聚类的数据对象映射到与图相关的一个矩阵的特征向量张成的空间. 由于谱映射的结果一般不是所需的聚类结果, 所以为了得到数据对象的聚类, 就需要在新的特征空间中对数据对象的像进行聚类. k-means 方法^[21~24]是目前谱聚类常用的一个对数据对象的像进行聚类的方法, 显然, 这样得到的聚类结果不仅依赖于谱映射, 同时也依赖于 k-means 的聚类能力. 如果数据对象经过谱映射后在新的特征空间并不是凸分离的, 那么在新的特征空间利用 k-means 对数据对象的像进行聚类就不能得到理想的结果. 文献 [25] 提出了一种迭代方法来对数据对象的像进行聚类, 但是该方法并不能保证一定能找到最优解, 且得到的结果类似于 k-means 方法. 其他方法, 例如阈值方法^[18]、混合模型方法等^[26], 也存在相应的问题.

本文基于万有引力定律提出了一个新的图分割模型 — 能量割模型, 该模型最大的特点是优化该模型可以获得类内引力最大、类间引力最小的图分割. 本文证明可通过求解一个特征向量问题来得到能量割的最优连续近似解. 进一步, 本文给出了利用能量割的最优连续近似解得到其离散解的方法, 并证明由此得到的离散解是能量割的最优离散近似解. 基于此, 结合 SAR 图像的特征, 本文设计了一个基于能量割的 SAR 图像分割算法 (energy cut based SAR image segmentation, ECSIS). 由于利用能量割的近似解对 SAR 图像进行分割时可能存在误差, 所以该算法主要包括两步: 第 1 步, 利用能量割对 SAR 图像进行初分割; 第 2 步, 利用近邻原则对初分割的结果进行修正.

2 能量割

2.1 能量割的定义

设 S 是一幅 SAR 图像, 其全体像素点的集合记作 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, 这里 p_i 表示 S 的第 i 个像素点. 以 P 为顶点集, $E = P \times P$ 为边集, 像素点之间的相似度为边权构造赋权图 $G(P, E)$. 边 (p_i, p_j) 上的权记为 w_{ij} ($w_{ij} \geq 0$), 在本文中 w_{ij} 的大小刻画了像素点 p_i 和 p_j 之间的相似程度. 一般而言, w_{ij} 越大, 像素点 p_i 和 p_j 越相似, 越有可能属于同一类. 本文中特别约定 $w_{ij} = w_{ji}$. 由图 G 的构造可知图 G 的每一个顶点都是图像 S 的一个像素点, 所以, 图像 S 的分割就等价于顶点集 P 的分割:

$$P = \bigcup_{i=1}^k P_i, \quad P_i \cap P_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, k.$$

一般称 P_i 为 P 的第 i 类, $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ 为 P 的一个分割, 以 $\Gamma^{(k)}$ 计之, 这里 k 为分类数.

定义1 (类向量) 设 $\Gamma^{(k)} = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ 是顶点集 P 的一个分割, 定义

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & p_i \in P_j, \\ -1, & p_i \notin P_j, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

称列向量 $\mathbf{x}_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})^T$ 为类 P_j 的类向量.

根据类向量的定义, 称矩阵 $X^{(k)} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k)$ 为分割 $\Gamma^{(k)}$ 的分割矩阵. 显然, 顶点集 P 的分割 $\Gamma^{(k)}$ 与它的分割矩阵 $X^{(k)}$ 是一一对应的.

定义2 (点的能量) 设点 $p_i \in P$, 称 $(\sum_{j=1}^n w_{ij})^{\frac{1}{2}}$ 为 p_i 的能量, 记为 $E(p_i)$.

显然, $E(p_i)$ 反映了点 p_i 对其他点的吸引力, $E(p_i)$ 越大, p_i 对其他点的吸引力越大.

定义3 (能量割) 设 $\Gamma^{(k)} = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ 是顶点集 P 的一个分割, 称

$$\sum_{l=1}^k \sum_{\substack{p_i \in P_l \\ p_j \notin P_l}} E(p_i)w_{ij}E(p_j) \quad (1)$$

为图 $G(P, E)$ 的能量割 (energy cut, EC), 记为 $\text{Ecut}(\Gamma^{(k)})$.

注 (i) 若将像素点看作质点, $E(p_i)$ 和 $E(p_j)$ 分别看作 p_i 和 p_j 的质量, 并令 $w_{ij} = (r_{ij}^2)^{-1}$, 这里 r_{ij} 表示像素点 p_i 和 p_j 在特征空间的欧氏距离, 则

$$G_0 \frac{E(p_i)E(p_j)}{r_{ij}^2} = G_0 E(p_i)w_{ij}E(p_j)$$

表示两个点 p_i 和 p_j 之间的引力 (只考虑力的大小, 不考虑力的方向, 下同), 这里 G_0 为引力常数. 由于 G_0 是常数, 所以可以简单地称 $E(p_i)w_{ij}E(p_j)$ 为点 p_i 和 p_j 之间的引力. 更一般地, 当 p_i 和 p_j 之间的相似度 w_{ij} 以其他方式定义时, 也可以认为 $E(p_i)w_{ij}E(p_j)$ 刻画了两个点 p_i 和 p_j 之间的“引力”. 从而,

$$\sum_{\substack{p_i \in P_l \\ p_j \notin P_l}} E(p_i)w_{ij}E(p_j)$$

刻画了分割 $\Gamma^{(k)}$ 中类 P_l 与其他类之间的引力, 而 $\text{Ecut}(\Gamma^{(k)})$ 则刻画了分割 $\Gamma^{(k)}$ 中类与类之间的引力.

(ii) 因为

$$\sum_{\substack{p_i \in P_l \\ p_j \notin P_l}} E(p_i)w_{ij}E(p_j) + \sum_{\substack{p_i \in P_l \\ p_j \in P_l}} E(p_i)w_{ij}E(p_j) = \sum_{p_i \in P_l} \sum_{p_j \in P} E(p_i)w_{ij}E(p_j),$$

所以

$$\sum_{l=1}^k \left[\sum_{\substack{p_i \in P_l \\ p_j \notin P_l}} E(p_i)w_{ij}E(p_j) + \sum_{\substack{p_i \in P_l \\ p_j \in P_l}} E(p_i)w_{ij}E(p_j) \right] = \sum_{i,j=1}^n E(p_i)w_{ij}E(p_j).$$

即

$$\text{Ecut}(\Gamma^{(k)}) + \sum_{l=1}^k \sum_{\substack{p_i \in P_l \\ p_j \in P_l}} E(p_i)w_{ij}E(p_j) = \sum_{i,j=1}^n E(p_i)w_{ij}E(p_j).$$

根据注 (i), $\sum_{l=1}^k \sum_{p_i \in P_l, p_j \in P_l} E(p_i)w_{ij}E(p_j)$ 刻画了类内的引力, $\sum_{i,j=1}^n E(p_i)w_{ij}E(p_j)$ 刻画了所有点之间的引力. 由于 $\sum_{i,j=1}^n E(p_i)w_{ij}E(p_j)$ 为常数, 所以最小化 $\text{Ecut}(\Gamma^{(k)})$ 的同时将最大化 $\sum_{l=1}^k \sum_{p_i \in P_l, p_j \in P_l} E(p_i)w_{ij}E(p_j)$. 这表明最小化 $\text{Ecut}(\Gamma^{(k)})$ 可以获得类内引力最大、类间引力最小的分割. 因此, 图像 S 的分割 (或顶点集 P 的分割) 就可以通过能量割的最小化, 即求解最小值问题

$$\min_{\Gamma^{(k)} \in \Delta^{(k)}} \text{Ecut}(\Gamma^{(k)}) \quad (2)$$

来得到, 这里 $\Delta^{(k)}$ 表示像素集 P 的 k 类分割的全体.

2.2 EC 的求解

下面讨论式 (2) 的求解. 为了讨论的方便, 以 $\Gamma_0^{(k)}$ 表示 (2) 的理想解, 以 $X_0^{(k)}$ 表示 $\Gamma_0^{(k)}$ 对应的分割矩阵.

定理1 记矩阵 $W = (w_{ij})_{n \times n}$, $E(P) = \text{diag}(E(p_1), E(p_2), \dots, E(p_n))$, $W_e = E(P)WE(P)$, $\mathbf{e}$ 为元素均为 1 的 n 维列向量, 即 $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T$, $D_e = \text{diag}(W_e \mathbf{e})$. 若 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ 是矩阵 $D_e - W_e$ 的特征值, 则

$$\text{Ecut}(\Gamma^{(k)}) \geq \frac{n}{4} \sum_{i=2}^{k+1} \lambda_i.$$

证明 若 $\mathbf{x}_l$ 是类 P_l 的类向量, 则

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p_i \in P_l \\ p_j \notin P_l}} E(p_i) w_{ij} E(p_j) &= \left[E(P) \cdot \frac{\mathbf{e} + \mathbf{x}_l}{2} \right]^T W \left[E(P) \cdot \frac{\mathbf{e} - \mathbf{x}_l}{2} \right]^T \\ &= \frac{1}{4} (\mathbf{e} + \mathbf{x}_l)^T E(P) W E(P) (\mathbf{e} - \mathbf{x}_l) \\ &= \frac{1}{4} (\mathbf{e} + \mathbf{x}_l)^T W_e (\mathbf{e} - \mathbf{x}_l) \\ &= \frac{1}{4} \mathbf{x}_l^T (D_e - W_e) \mathbf{x}_l. \end{aligned}$$

所以

$$\text{Ecut}(\Gamma^{(k)}) = \sum_{l=1}^k \frac{1}{4} \mathbf{x}_l^T (D_e - W_e) \mathbf{x}_l. \quad (3)$$

注意到, $\mathbf{x}_l^T \mathbf{x}_l = n$, 所以

$$\text{Ecut}(\Gamma^{(k)}) = \frac{n}{4} \sum_{l=1}^k \frac{\mathbf{x}_l^T (D_e - W_e) \mathbf{x}_l}{\mathbf{x}_l^T \mathbf{x}_l}.$$

若令 $\mathbf{y}_l = \mathbf{x}_l \|\mathbf{x}_l\|_2^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{x}_l / \sqrt{n}$, 则 $\mathbf{y}_l^T \mathbf{y}_l = 1$, 且 $\mathbf{y}_l$ 中的元素有正有负. 于是

$$\text{Ecut}(\Gamma^{(k)}) = \frac{n}{4} \sum_{l=1}^k \mathbf{y}_l^T (D_e - W_e) \mathbf{y}_l.$$

容易验证 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ 线性无关, 所以 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k$ 也线性无关. 现放松对 $\mathbf{y}_l$ 的离散性约束, 则由式 (2) 可得如下的优化问题:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k \in R^n} \sum_{l=1}^k \mathbf{y}_l^T (D_e - W_e) \mathbf{y}_l, \\ \mathbf{y}_l^T \mathbf{y}_l = 1, \text{ 且 } \mathbf{y}_l \text{ 中的元素有正有负}, \quad l = 1, 2, \dots, k, \\ \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k \text{ 线性无关}. \end{cases} \quad (4)$$

下面求解上式. 为此构造 Lagrange 函数

$$L(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k) = \sum_{l=1}^k \mathbf{y}_l^T (D_e - W_e) \mathbf{y}_l - \sum_{l=1}^k \mu_l (\mathbf{y}_l^T \mathbf{y}_l - 1).$$

上式两边对 $\mathbf{y}_l$ 求偏导数, 并令其为 0 得 $(D_e - W_e)\mathbf{y}_l = \mu_l \mathbf{y}_l$, $l = 1, 2, \dots, k$. 因为 $\mathbf{y}_l^T \mathbf{y}_l = 1$, 所以上式表明 μ_l 是矩阵 $D_e - W_e$ 的特征值, $\mathbf{y}_l$ 则是对应的特征向量. 注意到 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k$ 线性无关, 且 $\mathbf{y}_l$ 中的元素有正有负. 又由 $D_e - W_e$ 的半正定性可知, $\mathbf{e}$ 是 $D_e - W_e$ 第一个最小特征值 0 对应的特征向量, 所以若设 $\mathbf{e}/\sqrt{n}, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n$ 是 $D_e - W_e$ 对应于特征值 $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ 的单位正交特征向量, 则式 (4) 的解可以取为 $D_e - W_e$ 的前第 2 个到第 $k+1$ 个最小特征值对应的单位正交特征向量: $\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \dots, \mathbf{z}_{k+1}$. 由此可得

$$\text{Ecut}(I^{(k)}) \geq \frac{n}{4} \sum_{i=2}^{k+1} \lambda_i.$$

定理 1 得证.

由定理 1 的证明过程可见, 若令 $Y^* = (\mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{k+1})$, 则 $Z^* = \sqrt{n}Y^*$ 是分割矩阵 $X_0^{(k)}$ 的连续最优近似解.

下面讨论如何离散化 Z^* 得到 $X_0^{(k)}$ 的一个较好的离散近似解.

为此将式 (3) 改写为

$$\text{Ecut}(I^{(k)}) = \frac{1}{4} \text{tr}(X^{(k)T} (D_e - W_e) X^{(k)}). \quad (5)$$

根据式 (5), 若 Z 是通过离散化 Z^* 得到的 $X_0^{(k)}$ 的离散近似解, 则显然使得

$$\text{Ecut}(I^{(k)}) = \frac{1}{4} \text{tr}(Z^T (D_e - W_e) Z)$$

越小的离散近似解 Z 越好. 进一步, 因为 Z^* 是 $X_0^{(k)}$ 的连续最优近似解, 所以使得上式越小的离散近似解 Z 也必然使得

$$\text{tr}(Z^T (D_e - W_e) Z) - \text{tr}(Z^{*T} (D_e - W_e) Z^*)$$

越小, 反之亦然. 基于此, 下面讨论 Z^* 的离散化方法, 为此先证明下述结论.

定理 2 设 X_1 和 X_2 是 $X_0^{(k)}$ 的两个近似解, 则

$$\begin{aligned} & |\text{tr}(X_2^T (D_e - W_e) X_2) - \text{tr}(X_1^T (D_e - W_e) X_1)| \\ & \leq \|D_e - W_e\|_F [2 \min(\|X_1\|_F, \|X_2\|_F) + \|C\|_F] \|C\|_F, \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $C = X_2 - X_1$, $\|\cdot\|_F$ 表示矩阵的 Frobenius 范数.

证明 因为

$$\text{tr}(C^T (D_e - W_e) C) = \text{tr}(X_2^T (D_e - W_e) X_2) + \text{tr}(X_1^T (D_e - W_e) X_1) - 2\text{tr}(X_2^T (D_e - W_e) X_1),$$

又因为

$$2\text{tr}(X_2^T (D_e - W_e) X_1) = 2\text{tr}(C^T (D_e - W_e) X_1) + 2\text{tr}(X_1^T (D_e - W_e) X_1),$$

所以

$$\text{tr}(C^T (D_e - W_e) C) = \text{tr}(X_2^T (D_e - W_e) X_2) - \text{tr}(X_1^T (D_e - W_e) X_1) - 2\text{tr}(C^T (D_e - W_e) X_1).$$

所以

$$\text{tr}(X_2^T (D_e - W_e) X_2) - \text{tr}(X_1^T (D_e - W_e) X_1) = \text{tr}(C^T (D_e - W_e) C) + 2\text{tr}(C^T (D_e - W_e) X_1).$$

所以

$$|\operatorname{tr}(X_2^T(D_e - W_e)X_2) - \operatorname{tr}(X_1^T(D_e - W_e)X_1)| \leq |\operatorname{tr}(C^T(D_e - W_e)C)| + 2|\operatorname{tr}(C^T(D_e - W_e)X_1)|.$$

又因为^[27]

$$\begin{aligned} |\operatorname{tr}(C^T(D_e - W_e)C)| &\leq \|D_e - W_e\|_F \|CC^T\|_F \leq \|D_e - W_e\|_F \|C\|_F^2, \\ |\operatorname{tr}(C^T(D_e - W_e)X_1)| &\leq \|D_e - W_e\|_F \|X_1 C^T\|_F \leq \|D_e - W_e\|_F \|X_1\|_F \|C\|_F, \end{aligned}$$

所以

$$|\operatorname{tr}(X_2^T(D_e - W_e)X_2) - \operatorname{tr}(X_1^T(D_e - W_e)X_1)| \leq \|D_e - W_e\|_F (2\|X_1\|_F + \|C\|_F) \|C\|_F.$$

同理可得

$$|\operatorname{tr}(X_2^T(D_e - W_e)X_2) - \operatorname{tr}(X_1^T(D_e - W_e)X_1)| \leq \|D_e - W_e\|_F (2\|X_2\|_F + \|C\|_F) \|C\|_F.$$

所以

$$|\operatorname{tr}(X_2^T(D_e - W_e)X_2) - \operatorname{tr}(X_1^T(D_e - W_e)X_1)| \leq \|D_e - W_e\|_F [2\min(\|X_1\|_F, \|X_2\|_F) + \|C\|_F] \|C\|_F.$$

即定理 2 结论成立.

由定理 2 可见, 若令 $X_1 = Z^*$, 则 $\|X_1\|_F = \|Z^*\|_F = \sqrt{kn}$, 于是

$$|\operatorname{tr}(X_2^T(D_e - W_e)X_2) - \operatorname{tr}(Z^{*T}(D_e - W_e)Z^*)| \leq \|D_e - W_e\|_F (\sqrt{kn} + \|C\|_F) \|C\|_F.$$

由此可见 $\|C\|_F$ 越小, 即 $\|X_2 - Z^*\|_F$ 越小, $\operatorname{tr}(X_2^T(D_e - W_e)X_2)$ 就越接近于 $\operatorname{tr}(Z^{*T}(D_e - W_e)Z^*)$, 从而 $\operatorname{tr}(X_2^T(D_e - W_e)X_2)$ 就越小. 因此, 为了得到分割矩阵 $X_0^{(k)}$ 的一个较好的离散近似解, 可以考虑使得 $\|Z - Z^*\|_F$ 达到最小的离散近似解 Z .

定理3 记 $Z^* = (z_{ij}^*)_{n \times k}$, 若矩阵 $Z^{(d)} = (z_{ij}^{(d)})_{n \times k}$ 的元素按下式取值

$$z_{ij}^{(d)} = \begin{cases} 1, & j = \arg \max_{1 \leq l \leq k} z_{il}^*, \\ -1, & \text{其他}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

(这里若 Z^* 的第 i 行的元素中有多个元素的值等于该行的最大值, 则任取其中一个元素的列标为 j), 则对分割矩阵 $X_0^{(k)}$ 的任意一个离散近似解 Z , 恒有

$$\|Z^{(d)} - Z^*\|_F \leq \|Z - Z^*\|_F.$$

证明 设 $Z = (z_{ij})_{n \times k}$ 为分割矩阵 $X_0^{(k)}$ 的一个离散近似解, 则

$$\begin{aligned} \|Z - Z^*\|_F^2 - \|Z^{(d)} - Z^*\|_F^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (z_{ij} - z_{ij}^*)^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (z_{ij}^{(d)} - z_{ij}^*)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^k (z_{ij} - z_{ij}^*)^2 - \sum_{j=1}^k (z_{ij}^{(d)} - z_{ij}^*)^2 \right). \end{aligned}$$

根据 $Z^{(d)}$ 的定义, 不妨假设 $t = \arg \max_{1 \leq j \leq k} z_{ij}^*$, 则 $Z^{(d)}$ 的第 i 行元素为

$$z_{ij}^{(d)} = \begin{cases} 1, & j = t, \\ -1, & j \neq t. \end{cases}$$

又因为 Z 是分割矩阵 $X_0^{(k)}$ 的一个离散近似解, 所以 Z 的第 i 行的元素为

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & j = l, \\ -1, & j \neq l. \end{cases}$$

这里 l 可能等于 t , 也可能不等于 t . 于是

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k (z_{ij} - z_{ij}^*)^2 - \sum_{j=1}^k (z_{ij}^{(d)} - z_{ij}^*)^2 &= \sum_{j=1, j \neq l}^k (1 + z_{ij}^*)^2 + (1 - z_{il}^*)^2 - \sum_{j=1, j \neq t}^k (1 + z_{ij}^*)^2 - (1 - z_{it}^*)^2 \\ &= (1 + z_{it}^*)^2 + (1 - z_{il}^*)^2 - (1 + z_{il}^*)^2 - (1 - z_{it}^*)^2 = 4(z_{it}^* - z_{il}^*) \geq 0. \end{aligned}$$

所以

$$\|Z - Z^*\|_F^2 - \|Z^{(d)} - Z^*\|_F^2 \geq 0,$$

即

$$\|Z^{(d)} - Z^*\|_F \leq \|Z - Z^*\|_F.$$

由 Z 的任意性可知定理的结论成立.

由定理 3 可见, 式 (7) 给出的离散近似解 $Z^{(d)}$ 是在 Frobenius 范数意义下距离 Z^* 最近的 $X_0^{(k)}$ 的最优离散近似解.

3 基于能量割的 SAR 图像分割算法

本节讨论如何将 EC 应用于 SAR 图像分割. 显然, 若将 EC 直接应用于 SAR 图像分割, 那么当 SAR 图像较大时将面临矩阵的特征值、特征向量难以计算的问题. 为了解决这个问题, 本文考虑利用采样方法^[12, 23]: 从 SAR 图像的像素点中选取有代表性的点作为采样像素点, 并利用 EC 对采样像素点进行聚类, 然后根据采样像素点的聚类结果对未采样的像素点进行归类以得到 SAR 图像的分割结果.

在对 SAR 图像的像素点进行采样时, 采样点数可参考文献 [12] 确定. 考虑到 SAR 图像中斑点噪声的影响, 为了选取有代表性的采样像素点, 本文将按如下步骤对 SAR 图像的像素点进行采样.

采样步骤:

第 1 步. 从 SAR 图像中随机采样 N_1 个像素点;

第 2 步. 对每一个采样像素点, 在 SAR 图像上计算该像素点与周围相邻像素点的相似度的中值, 并称该值为采样像素点的特征值;

第 3 步. 将所有采样像素点的特征值按从大到小的顺序排列, 取前 $N(N < N_1)$ 个采样像素点即为所需的采样像素点.

基于上述采样方法, 得到了如下的基于 EC 的 SAR 图像分割算法 (energy cut based SAR image

segmentation, ECSIS):

第 1 步. **采样**, 按上述采样方法从 SAR 图像中抽取 N 个像素点作为采样像素点集 S_p ;

第 2 步. **聚类**, 首先以采样像素点集 S_p 为顶点集, 以 $S_p \times S_p$ 为边集构造赋权图 G_s , 然后利用 EC 对 G_s 进行分割得到采样像素点的聚类: 利用式 (7) 计算式 (2) 的最优离散近似解, 根据该离散解对图 G_s 进行分割, 由此得到采样像素点的聚类;

第 3 步. **分割**, 接近邻原则归类 SAR 图像中未采样的像素点: 对任意一个未采样的像素点, 首先计算它与采样像素点的相似度, 然后将最大相似度值对应的采样像素点的类标签赋予该像素点;

第 4 步. **调整**, 考虑到利用 EC 对采样像素点进行聚类时可能会产生误差以及 SAR 图像中斑点噪声的影响, 对上述分割结果进行如下调整: 对每一个像素点, 首先统计其相邻像素点的类标签, 然后按多数原则将出现次数最多的类标签赋予该像素点.

在上述算法的第 3 步中, 对一个未采样像素点, 若与其相似度最大的采样像素点不唯一, 那么从与其相似度最大的采样像素点中任取其中一个采样像素点的类标签作为该未采样像素点的类标签即可. 在第 4 步中, 对一个像素点, 若其相邻像素点的类标签中出现次数最多的类标签不唯一, 则从出现次数最多的类标签中任选其中一个类标签赋予该像素点.

4 实验与分析

本节将 ECSIS 应用于真实的 SAR 图像以检验其性能.

考虑到 SAR 图像的特点, 在实验中像素点之间的相似度按如下方式^[23]进行度量: 设 p_i 和 p_j 是图像 S 中的两个像素点, 则 p_i 和 p_j 之间的相似度为

$$w_{ij} = \exp \left(-\frac{\chi_{ij}^2}{\sigma} \right),$$

这里 σ 为尺度参数,

$$\chi_{ij}^2 = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^L \frac{(F_i(t) - F_j(t))^2}{F_i(t) + F_j(t)}.$$

上式中 $(F_i(1), F_i(2), \dots, F_i(L))$ 表示像素点 p_i 处提取的图像特征. 若对某一个 t 有 $F_i(t) = 0$, 则令 $F_i(t) = F_i(t) + \epsilon$, 其中 ϵ 为一小正数. 本文中像素点 p_i 处图像的分割特征按如下方式得到: 首先, 对 SAR 图像的灰度级进行量化, 量化为 L 级; 然后, 在图像中以 p_i 为中心提取大小为 $w \times w$ 的图像块; 最后, 计算以 p_i 为中心的 $w \times w$ 图像块的灰度直方图, 并将其归一化作为像素点 p_i 的分割特征 $F_i = (F_i(1), F_i(2), \dots, F_i(L))$.

在从图像中进行采样时, 初始采样数一般为 $N_1 = 500$, 用于图像分割的采样数一般为 $N = 300$. 在计算采样像素点的特征值和调整像素点的分割结果时, 像素点的邻域一般取为以该像素点为中心的 3×3 像素块. 提取 SAR 图像的分割特征时, 一般将 SAR 图像的灰度量化为 16 级. 在进行图像分割时实验中类数 k 是预先指定的.

4.1 验证实验

本文首先将 ECSIS 应用于一幅 SAR 图像以验证其性能. 图 1 显示了本文算法的分割结果, 其中图 1(a) 所示为实验中选用的一幅 SAR 图像, 观察该图像可见图中包含两类目标. 图 1(b) 所示为实验中随机抽取的采样像素点, 其中每一个 “*” 代表一个采样像素点. 图 1(c) 所示为利用 ECSIS 对采样

图 1 (网络版彩图) ECSIS 应用于一幅 SAR 图像上的分割结果

Figure 1 (Color online) The experimental results of ECSIS on one SAR image. (a) Shows the SAR image; (b) the sampled pixels, one * corresponding to one sampled pixel; (c) the clustering result of the sampled pixels; (d) the rough segmental result; (e) the adjusted segmental result, and (f) the edges between the objects

像素点进行聚类得到的结果, 这里类数取为 2. 在提取像素点的分割特征时 $w = 1$, 在计算像素点之间的相似度时 $\sigma = 0.07$. 图 1(d) 和 (e) 分别显示了根据采样像素点的聚类结果对未采样像素点按近邻原则进行聚类得到的初分割结果和调整后的图像分割结果. 图 1(f) 显示了分割出来的目标边界. 观察图 1(c) 可见, 在利用 ECSIS 对采样像素点进行聚类时, 除了一个采样像素点被误分以外, 其余的采样像素点都得到了正确的类标签, 分类正确率达到 99.7%. 分析采样像素点被误分的原因, 本文将其归为计算误差. 观察图 1(d) 可见, 在按近邻原则对未采样像素点进行聚类时出现了许多误分的像素点. 分析其原因, 本文将其归为图像的分割特征及噪声的影响. 实际上, 比较图 1(a) 和 (d) 可见误分的像素点主要出现在图像中比较“粗糙”的地方——图像中灰度变化比较剧烈的地方. 观察图 1(e) 可见, 根据多数原则对图像初分割的结果进行调整后, 大部分被误分的像素点的类标签已经得到了校正, 特别是孤立的误分像素点得到了抑制. 由图 1(f) 可见经过调整后图像分割的结果的确有了较大的改善.

另一方面, 由图 1(e) 还可以看到仍有部分误分像素点的类标签保持不变, 比较图 1(d) 和 (e) 可见, 如果对调整后的结果进行多次调整, 那么这些误分的像素点将会逐渐减少. 显然, 对图像初分割的结果进行调整会对目标的边缘和小目标的检测有影响. 对于这两种情况可以考虑如下的解决方案: (1) 为了保证目标边缘的准确性, 可以在对像素点的类标签进行调整时对像素点进行判定, 仅对非边缘点进行类标签的调整; (2) 为了对小目标进行检测, 可以在对像素点的类标签进行调整时对像素点附近具有相同类标签的像素点进行计数, 如果具有相同类标签的像素点个数超过指定的阈值, 则该像素点的类标签不予调整. 由于本实验的目的在于验证 ECSIS 的效果, 所以本文的实验结果都是对图像初分割调整一次的结果, 且在调整中未考虑边缘像素点的保持和小目标的检测.

图 2 显示了 ECSIS 应用于一幅合成图像和两幅 SAR 图像上的分割结果.

图 2 (网络版彩图) ECSIS 应用于一幅合成图像和两幅 SAR 图像上的分割结果

Figure 2 (Color online) The experimental results of ECSIS on one synthesized image and two SAR images

4.2 比较实验

为进一步验证本文方法的有效性,将 ECSIS 应用于多幅 SAR 图像,图 3 显示了部分结果,其中图 3 的第 1 行显示了 3 幅 SAR 图像,图 3 的第 2 行是本文方法应用于这 3 幅 SAR 图像上的分割结果.

和本文方法不同,许多谱聚类方法,例如文献 [21],在利用谱聚类进行聚类时,在得到相应的特征向量后,为了得到最终的聚类结果往往利用 k-means 方法对特征向量的分量进行聚类以得到谱聚类的离散解.为了验证本文离散解计算方法的有效性,本文在 ECSIS 的第 2 步中采用 k-means 方法对得到的特征向量的分量进行聚类以得到采样像素点的聚类,进而得到图像的分割结果(为了行文的方便,本文将上述图像分割方法简称为 KEC).图 3 中第 3 行就是本文将 KEC 方法应用于 3 幅 SAR 图像上的结果.将图 3 中第 2 行的 3 幅图像与第 3 行的 3 幅图像进行比较可见,本文的离散化方法较 k-means 方法好.

文献 [24] 提出的谱聚类方法是一种较为常用的谱聚类方法(为了行文的方便,本文将这种谱聚类方法简称为 NJW).为了说明本文方法的有效性,本文也将 NJW 应用于图 3 中 3 幅 SAR 图像的分割.由于直接将 NJW 应用于 SAR 图像分割同样会遇到图的谱难以计算的问题,在应用 NJW 进行 SAR 图像分割时本文直接将 ECSIS 的第 2 步换为利用 NJW 对采样像素点进行聚类(为了行文的方便,本文将上述图像分割方法仍简称为 NJW),图 3 的第 4 行是相应的分割结果.将图 3 第 2 行的 3 幅图像与图 3 第 4 行的 3 幅图像进行对比可见,本文提出的能量割要优于文献 [24] 提出的谱聚类方法.

文献 [23] 提出了一个基于 Normalized cut 的谱聚类方法,该方法同样采用采样的方法来解决谱聚类应用于图像分割时图谱难以计算的问题(为了行文的方便,本文将该方法简称为 NYS).为了验证本文方法的有效性,本文将 NYS 直接应用于图 3 中的 3 幅 SAR 图像.图 3 中第 5 行列出了相应的实验结果.根据文献 [23] 和计算的需要,在利用 NYS 进行 SAR 图像分割时,采样像素点数取为 100.将图 3 第 2 行 3 幅图像与图 3 第 5 行的 3 幅图像进行比较可见,本文方法优于文献 [23] 提出的方法.

在上述比较实验中,除了特别提出的以外,对不同分割方法的实验都是在同样的实验条件下完成的.综合比较上述实验结果可见,ECSIS 的确是有效的.为进一步对 ECSIS 的性能进行评价,本文将 ECSIS,KEC,NJW 和 NYS 分别应用于图 2 中的合成图像(即图 2 中左边的图像),得到相应的聚类准确率分别为 0.0195,0.1782,0.0206 和 0.51.比较可见,ECSIS 的聚类错误率远远小于 KEC 和 NYS 的聚类错误率.注意到这里 NJW 的聚类错误率也比较小,但是考虑到 NJW 在进行聚类时需要利用 k-means 方法来获得最终的聚类结果,由于 k-means 方法对初始值的选择较为敏感,需要进行多次重复运行以获得最优的结果,相反,ECSIS 则只需要进行一次简单的离散化就可得到最终的聚类结果.相比可见,无论是聚类精度上还是运算效率上,ECSIS 都优于 NJW.这进一步说明了 ECSIS 的有效性.

图 3 (网络版彩图) ECSIS, KEC, NJW 和 NYS 应用于 3 幅 SAR 图像上的分割结果. 第 1 行为 3 幅 SAR 图像, 第 2~5 行分别是应用 ECSIS, KEC, NJW 和 NYS 得到的分割结果

Figure 3 (Color online) The experimental results of ECSIS, KEC, NJW and NYS on three SAR images. The three SAR images are shown in the first row. The segmental results of ECSIS, KEC, NJW and NYS are shown from the second row to the fifth row, respectively

5 结论

本文将 SAR 图像分割建模为一个图分割问题, 基于万有引力定律提出了一个新的图分割模型, 能

量割模型. 该模型最大的特点是优化该模型可以获得类间引力最小, 类内引力最大的聚类. 本文证明可通过求解一个特征向量问题得到能量割的最优连续近似解. 进一步, 本文给出了利用能量割模型的连续近似解得到其离散解的离散化方法, 并证明由此得到的离散解是能量割的最优离散近似解. 基于此, 本文设计了一个基于能量割的 SAR 图像分割方法, ECSIS, 该方法最大的特点是在对图像的像素点进行采样时, 通过计算采样像素点的特征值对采样像素点进行取舍.

为了验证 ECSIS 的有效性, 本文将 ECSIS 应用于一些合成图像和真实的 SAR 图像. 实验结果表明, 本文方法的确可以有效地分割 SAR 图像, 得到较好的 SAR 图像分割结果.

在利用 ECSIS 方法进行 SAR 图像分割时, 采样像素点的选择对 ECSIS 的效果有明显的影响, 本文仅从实验的角度给出了采样像素点的选择方法, 能否结合 SAR 图像的特征从理论上对采样像素点的选择进行分析, 并设计相应的采样像素点的选择方法是本文的后续工作之一.

致谢 作者感谢田铮教授.

参考文献

- 1 Smith D M. Speckle reduction and segmentation of synthetic aperture radar images. *Int J Remote Sens*, 1996, 17: 2043–2057
- 2 Roger F, Armand L, Philippe M, et al. An optimal multiedge detector for SAR image segmentation. *IEEE Trans Geosci Remote Sens*, 1998, 36: 793–802
- 3 Carvalho E A, Ushizima D M, Medeiros F N S, et al. SAR imagery segmentation by statistical region growing and hierarchical merging. *Digital Signal Process*, 2010, 20: 1365–1378
- 4 Huawu D, Clausi D A. Unsupervised segmentation of synthetic aperture radar sea ice imagery using a novel markov random field model. *IEEE Trans Geosci Remote Sens*, 2005, 43: 528–538
- 5 Yu P, Qin A K, Clausi D A. Unsupervised polarimetric SAR image segmentation and classification using region growing with edge penalty. *IEEE Trans Geosci Sens*, 2012, 50: 1302–1317
- 6 Marques R C P, Medeiros F N, Nobre J S. SAR image segmentation based on level set approach and model. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell*, 2012, 34: 2046–2057
- 7 Oliver C, Quegan S. *Understanding Synthetic Aperture Radar Images*. Raleigh: SciTech Publishing Inc, 2004. 195–257
- 8 Caves R, Quegan S, White R. Quantitative comparison of the performance of SAR segmentation algorithms. *IEEE Trans Image Process*, 1998, 7: 1534–1546
- 9 Tung F, Wong A, Clausi D. Enabling scalable spectral clustering for image segmentation. *Pattern Recogn*, 2010, 43: 4069–4076
- 10 García J F G, Venegas-Andraca S E. Region-based approach for the spectral clustering Nyström approximation with an application to burn depth assessment. *Mach Vision Appl*, 2015, 26: 353–368
- 11 Jiang M, Li C, Feng J, et al. Segmentation via ncuts and lossy minimum description length: a unified approach. In: *Proceedings of the 10th Asian Conference on Computer Vision*. Berlin: Springer, 2011. 213–224
- 12 Li X, Tian Z. Multiscale stochastic hierarchical image segmentation by spectral clustering. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2007, 50: 198–211
- 13 Kuo C T, Walker P B, Carmichael O, et al. Spectral Clustering for Medical Imaging. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Data Mining*, Shenzhen, 2014. 887–892
- 14 Rezvanifar A, Khosravifard M. Including the size of regions in image segmentation by region-based graph. *IEEE Trans Image Process*, 2014, 23: 635–644
- 15 Gou S P, Zhuang X, Jiao L C. Quantum immune fast spectral clustering for SAR image segmentation. *IEEE Geosci Remote Sens Lett*, 2012, 9: 8–7
- 16 Ersahin K, Cumming I G, Ward R K. Segmentation and classification of polarimetric SAR data using spectral graph partitioning. *IEEE Trans Geosci Remote Sens*, 2010, 48: 164–174

- 17 Rahmani M, Akbarizadeh G. Unsupervised feature learning based on sparse coding and spectral clustering for segmentation of synthetic aperture radar images. *IET Comput Vision*, 2015, 9: 629–638
- 18 Shi J, Malik J. Normalized cuts and image segmentation. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell*, 2000, 22: 888–905
- 19 Hagen L, Kahng A B. New spectral methods for ratio cut partitioning and clustering. *IEEE Trans Comput Aided Design*, 1992, 11: 1074–1085
- 20 Ding C H Q, He X, Zha H, et al. A min-max cut algorithm for graph partitioning and data clustering. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Data Mining*, San Jose, 2001. 107–114
- 21 von Luxburg U. A Tutorial on Spectral Clustering. Max Planck Institute for Biological Cybernetics. Technical Report TR-149. 2006
- 22 Nascimento M C V, de Carvalho A C P L F. Spectral methods for graph clustering—a survey. *Eur J Oper Res*, 2011, 211: 221–231
- 23 Fowlkes C, Belongie S, Chung F, et al. Spectral grouping using the Nyström method. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell*, 2004, 26: 214–225
- 24 Ng A Y, Jordan M I, Weiss Y. On spectral clustering: analysis and an algorithm. In: Dietterich T G, Becker S, Ghahramani Z, eds. *Advances in Neural Information Processing Systems 14*. Cambridge: MIT Press, 2002. 849–856
- 25 Yu S X, Shi J. Multiclass spectral clustering. In: *Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Computer Vision*, Nice, 2003. 313–319
- 26 Xiang T, Gong S. Spectral clustering with eigenvector selection. *Pattern Recogn*, 2008, 41: 1012–1029
- 27 Sun J G. *Matrix Perturbation Analysis*. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2001. 60–71 [孙继广. 矩阵的扰动分析. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2001. 60–71]

Energy cut based SAR image segmentation

Xiaobin LI

School of mathematics and statistics, Xidian University, Xi'an 710071, China

E-mail: lixiaobin96@outlook.com

Abstract This paper presents a novel graph partitioning criterion, energy cut, for SAR image segmentation, based on the law of universal gravitation. The main characteristic of the energy cut is that its optimization can produce graph partitioning with minimal inter-cluster and maximal intra-cluster gravitation. We show that the optimal continuous approximation solution to the energy cut can be obtained by solving an eigenvector problem. Furthermore, we also present a simple discretization method to derive the optimal discrete approximation solution. The experimental results on the synthesized and real-world SAR images are very encouraging, demonstrating the effectiveness of the new criterion.

Keywords SAR, image segmentation, graph, energy cut, spectral clustering

Xiaobin LI obtained a Ph.D. degree from Northwestern Polytechnical University, Xi'an in 2007. Currently, he is an associate professor with the Xidian University. His main research interests include image segmentation, pattern recognition, and computer vision.