量子时空背景下Q泡暗物质的能量分布和辐射研究

余毅, 颜骏*

四川师范大学物理系, 成都 610066

*联系人, E-mail: yanjun5@sina.com

收稿日期: 2017-12-22; 接受日期: 2018-01-23; 网络出版日期: 2018-02-11

四川省教育厅自然科学基金(编号: 11ZA100)资助项目

摘要 本文研究了量子时空背景下Q泡暗物质的能量分布和辐射现象, 在量子引力能标下分别计算了能量和动量修正色散关系下的Q泡能量和能级差, 另外还计算了扰动情况下的Q泡能量和能级差. 分析了Lorentz对称破缺和扰动情况下暗物质泡辐射粒子的规律, 结果发现, 粒子辐射的能量随量子时空效应增大而变大, 同时也随泡势能的增大而变大, 这些物理效应可能在进一步的暗物质实验和观测中加以证实.

关键词 量子时空背景, Lorentz对称性破缺, Q泡暗物质, 能量分布和辐射

PACS: 03.65.Ge, 03.65.Pm, 04.60.Bc, 95.35.+d

1 引言

目前天文学的观测已表明宇宙中除了存在正常物质之外, 还可能存在大量暗物质, 而粒子物理学中的标准模型还不能对这些暗物质给出合理解释. 暗物质是当前粒子物理和天体物理所关注的一个重要研究课题, 由于星系转动曲线出现反常性质, 一种较合理的解释就是引入暗物质假设. 暗物质的主要候选者包括最轻超对称粒子和轴子, 以及超粒子相干形成的Q球等. 为了解释超高能宇宙线的观测结果, Kuzmin等人^[1]和Berezinsky等人^[2]首先提出了重暗物质模型, 这些超重暗粒子的能量可以超过GZK能标, 并接近普朗克能量^[3]. 这些重粒子可以通过衰变或碰撞湮灭两种机制辐射高能宇宙线^[4]. Chung等人^[5,6]认为重暗物质粒子

可能在宇宙暴胀的重加热过程中产生, 而这些粒子构成了星系晕和冷暗物质的主要部分, Berezhinsky等人^[7]研究了重暗物质粒子形成的超密团结构以及所形成的原初黑洞, 这些超密团中的暗物质粒子可以通过湮灭后产生的辐射来进行观测. 另外, Shaposhnikov^[8]指出, 超对称暗物质也可以通过超重Q球形式存在, 其质量可达 $M_Q \sim 10^{21}$ GeV数量级, 由于其宇宙学丰度很低, 所以实验观测非常困难.

1985年, Coleman^[9]提出了一种带荷的非拓扑孤子——Q球, 并引导出了各种Q物质的研究. 在量子场论中带有整体守恒量子数Q, 并且形成非拓扑孤子结构的球对称扩展体称为Q球, Q球可以带有重子数和轻子数. Kusenko等人^[10,11]指出超对称理论中可能存在这类Q球, 这些Q球可出现在最小的超对称标准模型中; 它

引用格式: 余毅, 颜骏. 量子时空背景下Q泡暗物质的能量分布和辐射研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48: 049801
Yu Y, Yan J. Energy distribution and radiation of Q-bubble dark matter on the quantum space-time background (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2018, 48: 049801, doi: [10.1360/SSPMA2017-00364](https://doi.org/10.1360/SSPMA2017-00364)

们可视为超夸克、超轻子和Higgs粒子相干凝聚态,在内部场的作用下这些粒子可以形成能量稳定态,因此它们可看作是暗物质的候选者^[12]. 另外, Q球还可能通过引力效应凝聚成大质量的Q星^[13,14]. Q球可能在宇宙早期剧烈的暴胀过程中形成, 这些早期宇宙中产生的Q球将产生遗迹引力波效应, 并有希望在微波背景辐射的观测中加以验证^[15,16]. Q球作为暗物质的候选者, 将与物质中的核子发生相互作用并产生粒子的辐射效应, 并且可能在地下暗物质的实验观测中得到进一步证实^[17-19].

近年来, 人们从不同角度重新研究了各种物理系统中的Lorentz不变(Lorentz Invariance)的对称性破缺现象, 如粒子物理中的LI对称性破缺^[20]、伽玛射线暴中的LI对称性破缺^[21]、非对易时空中的LI对称性破缺^[22]、圈量子引力中的LI对称性破缺^[23]. 由于粒子物理中的标准模型已获得了无数实验验证, 所以人们将兴趣转向了对超越标准模型物理的研究, 如在高能标上验证超对称粒子和高维时空是否存在, 因此在更高能标下证实狭义相对论中的色散关系以及LI对称性是否成立, 也将是非常意义的研究课题. Blas等人^[24]研究了暗物质中的Lorentz不变性问题, 当暗物质和一种轻的矢量粒子发生耦合作用后, 他们发现Lorentz对称性有可能破缺, 这种耦合效应将影响暗物质晕的惯性质量. 此外, 他们还根据宇宙微波背景辐射和物质幂谱给出了暗物质中LI破缺的约束范围. Berezhiani等人^[25]进一步研究了普通物质与暗物质作用的镜子引力模型, 他们根据此模型重新解释了星系转动曲线和暗物质分布规律^[26], 在这一理论中LI也是自发破缺的.

最近Fermi-LAT的观测数据表明^[27], 在银河系中心可能存在能发出 γ 射线的泡状结构, 并且泡中物质也会发射高能中微子. 另外, 类星体中也可能存在大尺度的暗物质泡, Svidzinsky^[28]研究了类星体中的轴子泡暗物质能量分布和红移量子化规律, 通过引力束缚形成的大型轴子泡的能量和红移均呈量子化形式, 轴子泡的扩张导致X射线耀斑周期性变化, 这一理论计算的结果与天文观测的数据非常接近, 另外由于量子不稳定性还将造成轴子泡发生衰变并辐射各种粒子.

本文将对一种新型的Q泡暗物质的能量分布和辐射规律进行研究, 在考虑了量子时空效应对色散关系的修正后, 通过引入跑动势能计算了稳定状态下的Q泡能量和半径, 讨论了量子时空效应对Q泡能级跃迁

产生的影响. 另外, 计算了扰动情况下的Q泡能级分布, 并和量子时空效应作用下的Q泡能级进行对比, 还分析了色散关系修正以及对应的LI破缺问题.

2 能量修正色散关系下Q泡的能级分布

由于能量接近量子引力能标时Lorentz对称性破缺效应表现才明显, 而目前观测到的宇宙射线最高能量为 3×10^{11} GeV, 所以由引力Cherenkov效应给出的量子引力能标限度为 $M_{QG} > m_{QG} = 10^{11+15/k}$ GeV, 这里 k 是量子引力效应的放大指数^[29-31], 当 $k=4$ 时, $M_{QG} > 10^{14.75}$ GeV, 当 $k=3$ 时, $M_{QG} > 10^{16}$ GeV.

如果暗物质处于较高能量状态, 其能量色散关系将随背景量子时空效应而改变, 能量修正的色散关系为^[32]

$$E^2 = P^2 + M^2 + \eta_1 E^2, \quad (1)$$

这里采用自然单位制, E 代表能量, P 代表动量, M 代表粒子的质量, η_1 为无量纲耦合常数. 式(1)中能量修正项将导致Lorentz对称性产生破缺. 将 E 和 P 做如下代换:

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad P \rightarrow -i \nabla, \quad (2)$$

那么可得到量子时空背景下的Klein-Gordon方程

$$\nabla^2 \phi^* - (1 - \eta_1) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi^* + M^2 \phi^* = 0, \quad (3)$$

$$\nabla^2 \phi - (1 - \eta_1) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - M^2 \phi = 0, \quad (4)$$

其中, ϕ, ϕ^* 分别表示复标量场及复共轭场. 这一场方程也可以通过拉格朗日量(拉氏量)的变分原理而获得, 能量修正形式的拉氏量可表示为

$$L_1 = \left[-(1 - \eta_1) \frac{\partial \phi^*}{\partial x_0} \frac{\partial \phi}{\partial x_0} + g_{\alpha\beta} \frac{\partial \phi^*}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x_\beta} + U(\phi^*, \phi) \right], \quad (5)$$

其中, $x_0 = t$ 表示时间分量, $g_{\alpha\beta} = (1, 1, 1)$, x_α 表示空间坐标分量, $U(\phi, \phi^*)$ 表示复标量场的势能. 将式(5)代入如下Euler-Lagrange方程组:

$$\frac{\partial L_1}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial L_1}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \right)} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \phi^*} - \frac{\partial}{\partial x^u} \cdot \frac{\partial L_1}{\partial \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x^u} \right)} = 0, \quad (7)$$

那么同样可以得到量子时空背景下的Klein-Gordon方程

$$\nabla^2 \phi^* - (1 - \eta_1) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi^* - \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0, \quad (8)$$

$$\nabla^2 \phi - (1 - \eta_1) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - \frac{\partial U}{\partial \phi^*} = 0. \quad (9)$$

当势能取为 $U(\phi^*, \phi) = M^2 \phi^* \phi$ 时, 式(8)和(9)正好对应于式(3)和(4). 由拉氏量 L_1 可获得如下量子时空背景下的哈密顿量和荷密度:

$$\begin{aligned} H &= \pi \frac{\partial \phi}{\partial t} + \pi^* \frac{\partial \phi^*}{\partial t} - L_1 \\ &= (1 - \eta_1) \phi^* \dot{\phi} + \nabla \phi^* \nabla \phi + U(\phi^*, \phi), \end{aligned} \quad (10)$$

$$j_0 = iq(1 - \eta_1) \left[\frac{\partial \phi^*}{\partial t} \phi - \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} \right], \quad (11)$$

其中, $\pi = \partial \phi^* / \partial t$, $\pi^* = \partial \phi / \partial t$ 表示复标量场的共轭动量, q 表示标量场内部对称性的 $U(1)$ 荷. 为了获得Q泡暗物质的能量分布, 首先应计算Klein-Gordon方程的解析解. 球坐标下的复标量场方程为

$$\left[\frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - (1 - \eta_1) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \phi - \frac{\partial U}{\partial \phi^*} = 0, \quad (12)$$

这时可以将标量场函数分离变量为

$$\phi(\theta, \varphi, t) = e^{i\omega t} \phi(\theta) e^{im\varphi}, \quad (13)$$

其中, ω 是振动频率, R 是泡半径, m 是磁量子数. 这里将势能函数取为 $U(\phi^*, \phi) = S(R) \phi^* \phi$, $S(R)$ 是泡半径 R 的函数. 由式(12)和(13)可以得到如下Q泡解:

$$\phi_{lm}(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta, \varphi) = P_l^{(m)}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (14)$$

$$(1 - \eta_1) \omega^2 - S(R) = \frac{l(l+1)}{R^2}, \quad (15)$$

其中, l 是角量子数, $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ 是球谐函数, $P_l^{(m)}(\cos \theta)$ 是缔合勒让德函数.

由荷密度式(11)和哈密顿量式(10)可得到如下的Q

泡 $U(1)$ 荷和能量:

$$Q = 2q\omega(1 - \eta_1) \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi R^2 \sin \theta |\phi(\theta, \varphi)|^2, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} E &= \omega^2(1 - \eta_1) \int d\Omega |\phi(\theta, \varphi)|^2 \\ &\quad + \frac{1}{R^2} \int d\Omega \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \\ &\quad + S(R) |\phi(\theta, \varphi)|^2 \int d\Omega U(\phi^*, \phi), \end{aligned} \quad (17)$$

其中, $d\Omega = R^2 \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$ 表示面积元. 如果进一步令

$$f = f_{lm} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi |\phi_{lm}|^2, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} h &= h_{lm} \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (19)$$

那么Q泡能量可以重新表示为

$$E = \frac{Q^2}{4q^2(1 - \eta_1)R^2f} + h + R^2 S(R)f. \quad (20)$$

为了研究Q泡的能量稳定性质, 这里将势能函数取为如下形式:

$$S(R) = 2u^2 \frac{R^{n-1}}{n+1}, \quad (21)$$

其中, u^2 为正耦合常数, $n > 1$ 表示势能强度指数. 由 $\partial E / \partial R = 0$ 可得到泡半径为

$$R_0 = \left(\frac{Q^2}{4q^2(1 - \eta_1)f^2 u^2} \right)^{\frac{1}{n+3}}, \quad (22)$$

其中 $\partial^2 E / \partial R^2 \Big|_{R=R_0} = 2(n+3)R_0^{n-1} f_m u^2 > 0$, 因此能量 E

有极小值, 即Q泡的能量可处于稳定状态. 通常, Q球作为暗物质存在所满足的基本条件为: (1) 能量稳定性质, (2) 能量收敛性质和场的边界条件. 这里的边界条件指的是Q球中心的场和能量不能发散, 在大于半径外的能量发生衰减, 在半径 R 处Q球解保持连续性, 这时Q球处于一种非拓扑孤子态. Q泡暗物质也将满足类似的存在条件, 即能量稳定性质和平衡关系, 但是其边界条件有自己的特点. 一般情况下, Q泡内部和外部的Casimir真空能有所不同, 根据Dirichlet或Robin边界条件计算出的泡表面张力有一定差异^[33]. 除此之外, 由引

力场产生的真空极化将导致泡边界上的压强差, 这两种效应共同作用的结果将对Q泡壳产生一种有效真空压强 $P_e^{[34]}$, 当泡的能量动量张量满足条件 $T_\pi + P_e = 0$ 时, 那么Q泡暗物质将处于一种平衡状态.

根据约束方程式(15)可进一步得到稳定半径对应的Q泡 $U(1)$ 荷和能量, 其表达式分别为

$$Q_{lm} = 2qf_{lm}u(1-\eta_1)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{l(l+1)}{u^2} \left(\frac{n+1}{n-1} \right) \right]^{\frac{n+3}{2(n+1)}}, \quad (23)$$

$$E_{lm} = \left(\frac{n+3}{n-1} \right) l(l+1)(1-\eta_1)^{\frac{1-n}{2(n+3)}} f_{lm} + h_{lm}, \quad (24)$$

当 $n > 1$, $q > 0$ 时, Q泡的 $U(1)$ 荷和能量均为正值, 并且其数量级大小主要取决于正耦合常数 u^2 、参量 f_{lm} 和 h_{lm} ; 另外, 势能强度指数 n 和修正因子 η_1 也将对 $U(1)$ 荷和能量分布产生一定影响. 通过具体的数值计算可分析Q泡物质的能级差. 这时能量分布对应于 s, p, d, f 共16种态, 其中, 1个 s 态, 3个 p 态, 5个 d 态, 7个 f 态. 因此, 只需计算出如下几个典型态的能级差, 即 $\Delta E_1 = E_{2\pm 2} - E_{10}$, $\Delta E_2 = E_{3\pm 2} - E_{10}$, $\Delta E_4 = E_{3\pm 3} - E_{10}$. 数值计算结果如表1和2所示, 这里量子时空修正因子分别取为 $\eta_1 = 0.1$ 和 $\eta_2 = 0.9$ 两种情况. 由于 s 态的能量为零, 所以最低能量态为 p 态. 这里, p 态和 d 态能量完全简并, f 态能量部分简并. 对于Q泡物质, 当耦合系数 u 取为 $\text{GeV}^{(n+1)/2}$ 量级, R_0 正比于 $(u^2)^{-1/(n+1)}$, 则半径大小约为 $R_0 \sim 10^{-13} \text{ cm}$, 这时 f_{lm} 和 h_{lm} 的数量级取为 m_{QG} , 当 $k = 3$ 时, $E_{lm} > 10^{16} \text{ GeV}$, 另外 $U(1)$ 荷 Q_{lm}/q 正比于 $f_{lm} \cdot u \cdot u^{-(n+3)/n+1} = 10^{11+15/k}$, 当 $k = 3$ 时, $Q_{lm}/q > 10^{16}$, 上述计算结果与文献[17]中超对称破缺时得到的Q球半径、能量和 $U(1)$ 荷的量级很吻合, 因此这种聚集大量 $U(1)$ 荷的Q泡也是一种较重的暗物质.

从表1和2的计算结果可以得出如下结论: d 态和 p 态的能量差最小, f_1 态和 p 态能量差次之, 而 f_2 态和 p 态能量差最大, 因此Q泡中存在两个低能态跃迁和一个高能态跃迁. 随着势能强度指数 n 的增大, 各种态的能量差却逐步减小. 另外, 量子时空效应对Q泡能量差也有较明显的影响, 当 $\eta_1 = 0.1$ 时, 各个态的能量差相对较小, 而 $\eta_1 = 0.9$ 时, 各个态的能量差相对变大; Q泡的能量差随着量子时空效应增强而变大, 因此, Lorentz对称性破缺可能在较高能量标度状态下呈现. 所以, Q泡

表 1 修正因子 $\eta_1 = 0.1$ 对应的Q泡能级差(m_{QG})

Table 1 The modifying factor $\eta_1 = 0.1$ corresponding energy level difference of Q-bubble (m_{QG})

n	ΔE_1	ΔE_2	ΔE_3
2	24.21	60.53	5430.01
4	13.55	33.87	3046.30
6	11.41	28.54	2569.66
8	10.5	26.25	2365.42
10	9.99	24.98	2251.97

表 2 修正因子 $\eta_1 = 0.9$ 对应的Q泡能级差(m_{QG})

Table 2 The modifying factor $\eta_1 = 0.9$ corresponding energy level difference of Q-bubble (m_{QG})

n	ΔE_1	ΔE_2	ΔE_3
2	29.18	72.95	6540.06
4	19.29	48.22	4329.31
6	17.65	44.12	3963.28
8	17.08	42.70	3835.57
10	16.82	42.05	3778.11

暗物质中由于能级的跃迁将导致各种粒子的释放, 如电子、光子或中微子等微观粒子, 其中既有相对较低能量的粒子, 也可能有更高能量的粒子. 另外, 量子时空效应将提高辐射粒子的能量, 这些潜在的物理效应可能在进一步的宇宙线探测和暗物质实验中加以证实.

3 动量修正色散关系下Q泡的能级分布

本节将研究动量修正情况下的Q泡能级分布, 分析量子时空效应对其所产生的物理影响. 动量修正的色散关系为

$$E^2 = P^2 + M^2 + \eta_2 P^2, \quad (25)$$

其中, η_2 为无量纲耦合常数. 根据第2节中的类似方法可得到量子时空背景下的Klein-Gordon方程

$$(1 + \eta_2) \nabla^2 \phi^* - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi^* - \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0, \quad (26)$$

$$(1 + \eta_2) \nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t^2} \phi - \frac{\partial U}{\partial \phi^*} = 0, \quad (27)$$

这时, 复标量场对应的哈密顿量和荷密度分别为

$$H = \dot{\phi}^* \dot{\phi} + (1 + \eta_2) \nabla \phi^* \nabla \phi + U(\phi^*, \phi), \quad (28)$$

$$j_0 = iq \left[\frac{\partial \phi^*}{\partial t} \phi - \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]. \quad (29)$$

将势能同样取为 $U(\phi^*, \phi) = S(R)\phi^*\phi$, 这时的Q泡场方程变为

$$\frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \phi(\theta) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} (-m^2) \phi(\theta) + \left(\frac{\omega^2 - S(R)}{1 + \eta_2} \right) \phi(\theta) = 0, \quad (30)$$

同时Q泡的 $U(1)$ 荷和能量可以分别表示为

$$Q = 2q\omega \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi R^2 \sin \theta |\phi(\theta, \varphi)|^2, \quad (31)$$

$$E = \frac{1 + \eta_2}{R^2} \int d\Omega \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + S(R) \int d\Omega |\phi(\theta, \varphi)|^2 + \omega^2 \int d\Omega |\phi(\theta, \varphi)|^2. \quad (32)$$

场方程(30)的Q泡解为

$$\phi_{lm}(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (33)$$

$$\omega^2 - S(R) = \frac{l(l+1)}{R^2} (1 + \eta_2), \quad (34)$$

这时Q泡能量可重新表示为

$$E = \frac{Q^2}{4q^2 R^2 f} + (1 + \eta_2) h + R^2 S(R) f. \quad (35)$$

将势能 ϕ 函数 $S(R)$ 取为式(21)其中形式, 那么由 $\partial E / \partial R = 0$ 可导出泡临界半径

$$R_0 = \left(\frac{Q^2}{4q^2 f^2 u^2} \right)^{\frac{1}{n+3}}, \quad (36)$$

这时 $\partial^2 E / \partial R^2 \Big|_{R=R_0} > 0$, 所以Q泡能量仍处于稳定状态.

由约束方程(34)可进一步导出如下稳定态时的Q泡 $U(1)$ 荷和能量:

$$Q_{lm} = 2qfu \left[\frac{l(l+1)}{u^2} \cdot \left(\frac{n+1}{n-1} \right) (1 + \eta_2) \right]^{\frac{n+3}{2(n+1)}}, \quad (37)$$

$$E_{lm} = \left(\frac{n+3}{n-1} \right) f_{lm} l(l+1) \cdot (1 + \eta_2) + (1 + \eta_2) h_{lm}, \quad (38)$$

当 $n > 1$, $q > 0$ 时, 取正值的Q泡 $U(1)$ 荷和能量的数量级大小主要取决于正耦合常数 u^2 、参量 f_{lm} 和 h_{lm} ; 另外,

势能强度指数 n 和修正因子 η_2 也将对 $U(1)$ 荷和能量分布产生一定影响. 通过具体的数值计算同样可以计算出 s , p , d , f 态的能量差. 当修正因子分别取为 $\eta_2 = 0.1$ 和 $\eta_2 = 0.9$ 两种情况时, 数值计算结果如表3和4所示.

计算结果表明, Q泡的能级差随势能指数 n 的增大而减小, 随时空修正因子 η_2 的增大而变大. 这与能量修正情况下的Q泡能级差的变化是类似的, 不同之处在于取相同势能指数和修正因子的情况下, 动量修正的Q泡能级差大于能量修正的能级差, 所以对于具有LI对称性破缺的Q泡物质, 动量修正的Q泡所辐射的能量强度比能量修正的Q泡辐射的能量强度更大.

为了进一步分析能量修正参量 η_1 和动量修正参量 η_2 连续变化时对Q泡能量辐射的影响规律, 当Q泡势能强度指数 n 取定为2时, 可选择一组 p 态到 s 态的能级差 $\Delta E = E_{1\pm 1} - E_{00}$ 进行计算, 其他高能级态能级差的计算可以此类推. 图1的计算结果表明, 随着 η_i ($i = 1, 2$) 的增加, Q泡辐射的能量都单调增大, 动量修正的辐射能大于能量修正的辐射能. 当 η_1 和 η_2 非常接近于1时, 能量修正的辐射能将超过动量修正的辐射能, 这时Q泡物质的LI对称性破缺效应最明显; 同时, 由于粒子的辐

表 3 修正因子 $\eta_2 = 0.1$ 对应的Q泡能级差 (m_{QG})

Table 3 The modifying factor $\eta_2 = 0.1$ corresponding energy level difference of Q-bubble (m_{QG})

n	ΔE_1	ΔE_2	ΔE_3
2	26.40	66.00	5920.93
4	14.67	36.67	3298.53
6	12.32	30.80	2774.05
8	11.31	28.29	2549.28
10	10.76	26.89	2424.40

表 4 修正因子 $\eta_2 = 0.9$ 对应的Q泡能级差 (m_{QG})

Table 4 The modifying factor $\eta_2 = 0.9$ corresponding energy level difference of Q-bubble (m_{QG})

n	ΔE_1	ΔE_2	ΔE_3
2	45.60	114.0	10227.10
4	25.33	63.33	5697.47
6	21.28	53.20	4791.55
8	19.54	48.86	4403.30
10	18.58	46.44	4187.60

图 1 Q泡辐射能量和量子时空参量 η_i 的关系
Figure 1 The relationship between the energy radiation of Q-bubble and quantum space-time parameters η_i .

射效应将导致Q泡完全湮灭.

4 扰动情况下的Q泡的能级分布

在天体物理环境中存在着物质的各种扰动现象, 这些扰动包括标量、矢量和张量场的各种扰动, 扰动对Q球能量和能级的改变有重要影响^[35], 扰动后的Q球也会释放出一些微观粒子, 其辐射的能量强度与扰动大小有关. 本文将进一步计算扰动情况下的Q泡能级, 并比较能量修正、动量修正和扰动情况下能级跃迁和粒子辐射规律. 在研究Q泡的能量扰动之前需要先计算其 $U(1)$ 荷的扰动, 复标量场满足的扰动形式为

$$\tilde{\phi}(\theta) = \phi(\theta) + \delta(\phi) = Y_{lm}(\theta) + \alpha Y_{lm}(\theta), \quad (39)$$

其中, $\alpha \ll 1$ 是扰动系数, 同时Q泡半径和振动频率也存在微小扰动, 由场方程可以得到

$$\delta\omega = \frac{\delta R}{\omega R^2} \left[\frac{\mu^2(n-1)}{n+1} R^n - \frac{l(l+1)}{R} \right], \quad (40)$$

当 $R = R_0$ 时稳定状态下的 $U(1)$ 荷扰动变化为

$$\delta Q_{lm} = 4q(1+\alpha)^2 f_{lm} R_0 \omega_0 \delta R, \quad (41)$$

其中, 泡的振动频率为

$$\omega_0 = \frac{1}{R_0} \sqrt{l(l+1) \left(\frac{n+1}{n-1} \right)}, \quad (42)$$

所以扰动后的总 $U(1)$ 荷为

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{lm} = & 2q f_{lm} \mu \left[\frac{l(l+1)}{\mu^2} \left(\frac{n+1}{n-1} \right) \right]^{\frac{n+3}{2(n+1)}} \\ & + 4q f_{lm} \sqrt{l(l+1) \left(\frac{n+1}{n-1} \right)} \delta R \\ & + 8q f_{lm} \sqrt{l(l+1) \left(\frac{n+1}{n-1} \right)} \alpha \delta R, \end{aligned} \quad (43)$$

扰动后Q泡的能量变为

$$\tilde{E} = \frac{\tilde{Q}^2}{4q^2 R_0^2 \tilde{f}_{lm}} + \frac{2\mu^2}{n+1} R_0^{n+1} \tilde{f}_{lm} + \tilde{h}_{lm}, \quad (44)$$

其中, $\tilde{f}_{lm} = (1+\alpha)^2 f_{lm}$, 以及 $\tilde{h}_{lm} = (1+\alpha)^2 h_{lm}$. 只取一阶扰动, 扰动后的Q泡能量为

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{lm} = & \left[\left(\frac{n+3}{n-1} \right) l(l+1) f_{lm} + h_{lm} \right] \\ & + [2h_{lm} - 2l(l+1)f_{lm}] \alpha \\ & + 4f_{lm} \mu^2 R_0 \left[\frac{l(l+1)}{\mu^2} \left(\frac{n+1}{n-1} \right) \right]^{\frac{n}{n+1}} \beta, \end{aligned} \quad (45)$$

其中, $\beta = \delta R / R \ll 1$ 为半径扰动参数. 计算结果表明, 标量场扰动不影响 p 态、 d 态和 f 态中 $E_{3\pm 2}$ 的能量, 仅影响 $E_{3\pm 3}$ 态能量. 而半径扰动对各个态能量却有影响, 对于不同的指数 n , 能量简并性质将解除. 现在只计算出如下几个态的能量差, 即 $\Delta\tilde{E}_1 = E_{2\pm 2} - E_{10}$, $\Delta\tilde{E}_2 = E_{3\pm 2} - E_{10}$, $\Delta\tilde{E}_3 = E_{3\pm 3} - E_{10}$, 如取 $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$, 数值计算结果如表5所示.

从式(45)和表5可以看出, 标量场扰动和半径扰动对Q泡能量都有一定的修正, 在稳定状态下势能通过半径扰动项对能量产生影响. 当标量场扰动和半径扰动取较小值时, Q泡的能级差接近于能量修正下的Q泡能级差, 而小于动量修正下的Q泡能级差, 同时Q泡的能级差也随势能指数的增大而变小.

5 结果与讨论

(1) 研究了量子时空背景下Q泡暗物质的激发态性质, 分别计算了能量修正和动量修正下的Q泡能级和 $U(1)$ 荷, 结果发现能量分布于 s, p, d, f 16个能态, 其中部分能级处于简并态. f_2 态和 p 态的能量差最大, d 态和 p 态能量差最小, f_1 态和 p 态能量差居中. 两种修正情

表 5 标量场扰动和半径扰动对应的Q泡能级差(m_{QG})**Table 5** The scalar field perturbation and radii perturbation corresponding energy level difference of Q-bubble (m_{QG})

n	ΔE_1	ΔE_2	ΔE_3
2	25.43	63.04	5710.71
4	14.81	36.68	3329.46
6	12.71	31.52	2859.95
8	11.82	29.34	2660.33
10	11.32	28.14	2549.99

况下, Q泡能级差都随势能指数 n 增大而减小, 随时空修正因子增大而变大, 因此, Lorentz对称性破缺明显时Q泡辐射能量更大. 另外, 在势能指数和时空修正因子同等的取值下, 动量修正下的Q泡能级跃迁和粒子辐射效应都强于能量修正下的类似情况.

(2) 讨论了修正参量 η_i 连续变化时对Q泡 p 态到 s 态辐射的影响, 结果发现, 两种情况下Q泡辐射的能量都会增大, 动量修正的辐射能一般都大于能量修正的辐射能, 仅当 η_i 趋近于1时, 能量修正的辐射能将反超动

量修正的辐射能, 这时暗物质粒子的辐射还将造成Q泡的完全湮灭. 另外, 当Q泡的粒子数或能量达到一定临界值时, 其能量、动量、张量将大于Casimir真空能所产生的有效压强, 这时泡壳的平衡状态将被破坏, 那么Q泡暗物质有可能形成微观黑洞并进一步蒸发.

(3) 分析了扰动情况下Q泡暗物质的激发态性质, 计算了标量场扰动和半径扰动下的Q泡能级和 $U(1)$ 荷. 结果表明, 能量分布规律和量子时空效应下的分布形式有一定的差别, 但变化规律比较相似. 当扰动取为定值时, Q泡的能级差随能量指数增大而减小, 其数值和能量修正下的Q泡能级差比较接近.

(4) 研究了3种情况下的Q泡能级跃迁和粒子辐射效应, 其中量子时空效应和扰动都会改变辐射强度, 辐射能量都接近量子引力能标 m_{QG} . 不同于一般的暗物质衰变和湮灭过程所产生的辐射, 本文研究的Q泡辐射是一种大量玻色子聚集的孤子态所产生的重暗物质集体辐射, 这一新的辐射物理现象以及伴随的Lorentz对称性破缺效应, 有可能在进一步的暗物质实验和观测中加以证实.

参考文献

- 1 Kuzmin V, Rubakov V. Ultra-high energy cosmic rays: A window to post-inflationary reheating epoch of the universe? *Phys Atomic Nucl*, 1997, 61: 1028–1030
- 2 Berezhinsky V, Vilenkin A. Cosmic necklaces and ultrahigh energy cosmic rays. *Phys Rev Lett*, 1997, 79: 5202–5205
- 3 Giudice G F, Riotto A, Tkachev I, et al. Production of massive fermions at preheating and leptogenesis. *J High Energy Phys*, 1999, 1999: 014
- 4 Dick R, Hopp K M, Wunderle K E. Superheavy dark matter and ultrahigh-energy cosmic rays. *Can J Phys*, 2005, 84: 537–543
- 5 Chung D J H, Kolb E W, Riotto A. Nonthermal supermassive dark matter. *Phys Rev Lett*, 1998, 81: 4048–4051
- 6 Chung D J H, Kolb E W, Riotto A. Production of massive particles during reheating. *Phys Rev D*, 1999, 60: 063504
- 7 Berezhinsky V, Dokuchaev V, Eroshenko Y, et al. Superdense cosmological dark matter clumps. *Phys Rev D*, 2010, 81: 103529, arXiv: 1002.3444
- 8 Shaposhnikov M. Superheavy dark matter and supersymmetry. *New Astron Rev*, 2005, 49: 175–179
- 9 Coleman S. Q-balls. *Nucl Phys B*, 1985, 262: 263–283
- 10 Kusenko A, Kuzmin V, Shaposhnikov M, et al. Experimental signatures of supersymmetric dark-matter Q-balls. *Phys Rev Lett*, 1998, 80: 3185–3188
- 11 Kusenko A, Shaposhnikov M. Supersymmetric Q-balls as dark matter. *Phys Lett B*, 1998, 418: 46–54
- 12 Kasuya S, Kawasaki M. Baryogenesis from the gauge-mediation type Q-ball and the new type of Q-ball as the dark matter. *Phys Rev D*, 2014, 89: 103534, arXiv: 1402.4546
- 13 Verbin Y. Sigma model Q-balls and Q-stars. *Phys Rev D*, 2007, 76: 085018, arXiv: 0708.3283
- 14 Prikas A. Domain walls on the surface of Q-stars. *J Math Phys*, 2006, 47: 112503
- 15 Kusenko A, Mazumdar A, Multamäki T. Gravitational waves from the fragmentation of a supersymmetric condensate. *Phys Rev D*, 2009, 79: 124034, arXiv: 0902.2197
- 16 Chiba T, Kamada K, Yamaguchi M. Gravitational waves from Q-ball formation. *Phys Rev D*, 2010, 81: 083503, arXiv: 0912.3585
- 17 Bakari D, Dekhissi H, Derkaoui J, et al. Energy losses of Q-balls. *Astroparticle Phys*, 2001, 15: 137–147

- 18 Clark S S. Particle creation from Q-balls. *Nucl Phys B*, 2006, 756: 38–70
- 19 Ouchrif M. Q-balls in underground experiments. *Nucl Phys B-Proc Suppl*, 2000, 85: 231–237
- 20 Coleman S, Glashow S L. High-energy tests of Lorentz invariance. *Phys Rev D*, 1999, 59: 116008
- 21 Amelino-Camelia G, Majid S. Waves on noncommutative space-time and gamma-ray bursts. *Int J Mod Phys A*, 2000, 15: 4301–4323
- 22 Kersting N, Yan J. Elimination of IR/UV via gravity in noncommutative field theory. *Mod Phys Lett A*, 2008, 23: 3341–3348, arXiv: 0901.0459
- 23 Rovelli C. Quantum Gravity. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 315–319
- 24 Blas D, Ivanov M M, Sibiryakov S. Testing Lorentz invariance of dark matter. *J Cosmol Astropart Phys*, 2012, 2012: 057, arXiv: 1209.0464
- 25 Berezhiani Z, Nesti F, Pilo L, et al. Gravity modification with Yukawa-type potential: Dark matter and mirror gravity. *J High Energy Phys*, 2009, 2009: 083, arXiv: 0902.0144
- 26 Berezhiani Z, Pilo L, Rossi N. Mirror matter, mirror gravity and galactic rotational curves. *Eur Phys J C*, 2010, 70: 305–316, arXiv: 0902.0146
- 27 Lunardini C, Razzaque S. High energy neutrinos from the Fermi bubbles. *Phys Rev Lett*, 2012, 108: 221102, arXiv: 1112.4799
- 28 Svidzinsky A A. Oscillating axion bubbles as an alternative to supermassive black holes at galactic centers. *J Cosmol Astropart Phys*, 2007, 2007: 018
- 29 Moore G D, Nelson A E. Lower bound on the propagation speed of gravity from gravitational Cherenkov radiation. *J High Energy Phys*, 2001, 2001: 023
- 30 Ellis J, Mavromatos N E, Nanopoulos D V. Noncritical Liouville string escapes constraints on generic models of quantum gravity. *Phys Rev D*, 2002, 65: 064007
- 31 Ellis J, Mavromatos N E, Nanopoulos D V, et al. Quantum-gravity analysis of gamma-ray bursts using wavelets. *Astron Astrophys*, 2003, 402: 409–424
- 32 Amelino-Camelia G. Quantum-spacetime phenomenology. *Living Rev Relativ*, 2013, 16: 5, arXiv: 0806.0339
- 33 Cognola G, Elizalde E, Kirsten K. Casimir energies for spherically symmetric cavities. *J Phys A-Math Gen*, 2001, 34: 7311–7327
- 34 Setare M R, Mansouri R. Casimir effect for a spherical shell in de Sitter space. *Class Quantum Grav*, 2001, 18: 2331–2338
- 35 Yan J. Study of energy stability and perturbation in the Q-ball solutions of Klein-Gordon equation (in Chinese). *Acta Phys Sin*, 2013, 62: 230301
[颜骏. Klein-Gordon方程Q-球解中的能量稳定性与扰动研究. 物理学报, 2013, 62: 230301]

Energy distribution and radiation of Q-bubble dark matter on the quantum space-time background

YU Yi & YAN Jun^{*}

Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China

Energy distribution and radiation phenomena of Q-bubble dark matter on the quantum space-time background are studied in this paper. Under the quantum gravitational energy scale, the energy and energy level difference of Q-bubble are calculated respectively for energy and momentum correction dispersion relations. Moreover, the energy and energy level difference in the perturbation case are also calculated. We analysed radiation particles' law of dark matter bubbles under the Lorentz symmetry breaking and the perturbation situation, and found that the radiated energy increases with quantum space-time effect increases, and it also increases with the bubble potential energy increases. These physical effects may be confirmed in the further dark matter observations and experiments.

quantum space-time background, Lorentz symmetry breaking, Q-bubble dark matter, energy distribution and radiation

PACS: 03.65.Ge, 03.65.Pm, 04.60.Bc, 95.35.+d

doi: 10.1360/SSPMA2017-00364