一类寄生虫模型解的性态研究

张德存*, 王丽英, 纪文强, 李晓宝

海军航空工程学院基础部教研室, 烟台 264001

E-mail: dczhang1967@tom.com, ytliyingwang@163.com, jwqyikeshe@163.com, lixiaobao@163.com

收稿日期: 2012-05-19; 接受日期: 2012-11-19; * 通信作者

海军航空工程学院基础研究基金资助项目

摘要 本文研究了一类寄生虫模型解的性态, 给出了该模型的解具有持久性和振动性的一些充分条件, 回答了 Dynamics of Second Order Difference Equation 一书中的一个公开的研究建议.

关键词 寄生虫模型 持久性 振动性 差分方程

MSC (2010) 主题分类 39A10

1 引言

目前, 非线性差分方程解的性态受到了大量学者的关注, 如 Kocić 和 Ladas^[1] 对具有如下形式的差分方程的所有正解的渐近稳定性进行了研究,

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^2}{1+x_{n-1}^2}, \quad n=0, 1, \dots \quad (1.1)$$

Zhang 和 Shi^[2] 扩展了方程 (1.1) 的研究成果, 对方程

$$x_{n+1} = \frac{bx_n^2}{1+x_{n-1}^2}, \quad n=0, 1, \dots \quad (1.2)$$

的解的性态进行了研究, 并得到了关于平衡解的 $\bar{x}$ 的一些有趣的结论. 文献 [3] 对方程

$$x_{n+1} = \frac{a+bx_n^2}{1+x_{n-1}^2}, \quad n=0, 1, \dots \quad (1.3)$$

的解的全局行为进行了详细的研究. 因此, 我们相信非线性差分方程具有其独特重要的地位, 如在经济领域、生物种群的数量结构规律分析、疾病和病虫害的控制与防治、遗传规律的研究中都起着非常重要的作用. 很多学者对具有生物背景的差分方程进行了研究, 参见文献 [4-6].

在 Dynamics of Second Order Difference Equation 一书中, Kulenovi'c 和 Ladas^[7] 给出了一个公开的研究建议 (may's host parasitoid model): 假设 $\alpha > 1$, 证明由方程

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n^2}{(1+x_n)x_{n-1}}, \quad n=0, 1, \dots \quad (1.4)$$

所表示的寄生虫模型的所有正解是都有界的.

本文主要对方程 (1.4) 的所有正解的全局行为进行研究, 在此基础上回答 Kulenovi'c 和 Ladas^[7] 所提出的关于寄生虫模型的公开问题.

2 引理

引理 2.1 假设 $\alpha > 1$. 则方程 (1.4) 有唯一的正平衡解 $\bar{x} = \alpha - 1$.

引理 2.1 的证明很简单, 因此省略.

引理 2.2 [3, 定理 1.2.2] 设对任意的 $i = 1, 2, \dots, m$, $p_i \in (0, \infty)$, $k_i \in \{0, 1, \dots\}$ 且

$$\sum_{i=1}^m (p_i + k_i) \neq 1.$$

又设 $\{p_i(n)\}$ 是一个满足下述条件的正数数列,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} p_i(n) \geq p_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

假设非线性差分不等式

$$Z_{n+1} - Z_n + \sum_{i=1}^m p_i(n) Z_{n-k_i} \leq 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

存在一个最终正解, 则以下结论成立:

(1) 方程

$$\lambda - 1 + \sum_{i=1}^m p_i \lambda^{-k_i} = 0$$

有一个最终正根;

(2) 方程

$$x_{n+1} - x_n + \sum_{i=1}^m p_i(n) x_{n-k_i} \leq 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

有一个最终正解.

引理 2.3 [3, 定理 1.2.1] 考虑线性同类差分方程

$$x_{n+k} + \sum_{i=1}^k q_i x_{n+k-i} = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.1)$$

其中, k 是非负正整数, 且 $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{R}$, 则下列的两个结论是等价的,

(1) 方程 (2.1) 只有振动解;

(2) 方程 (2.1) 的特征方程

$$\lambda^k + \sum_{i=1}^k q_i \lambda^{k-i} = 0$$

没有正根.

3 主要结论

定理 3.1 假设 $\alpha > 1$, 则方程 (1.4) 的解是持久的.

证明 设 $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ 是方程 (1.4) 的一个正解. 首先断言下列两个不等式是成立的,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} < +\infty, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} > 0.$$

注意到, 方程 (1.4) 可变为下述形式:

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{(1+x_n)x_{n-1}} \frac{\alpha x_{n-1}^2}{(1+x_{n-1})x_{n-2}} = \alpha^2 \frac{x_n}{1+x_n} \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}} \frac{1}{x_{n-2}}. \quad (3.1)$$

从而由 (3.1) 可知,

$$x_{n+1}x_{n-2} < \alpha^2, \quad n \geq 1.$$

同时, 由 (3.1), 我们还有

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{\alpha^2 x_n}{1+x_n} \frac{\alpha x_{n-2}^2}{(1+x_{n-1})(1+x_{n-2})x_{n-3}} \\ &= \frac{\alpha^3 x_n}{1+x_n} \frac{1}{1+x_{n-1}} \frac{x_{n-2}}{1+x_{n-2}} \frac{1}{x_{n-3}}, \end{aligned}$$

即

$$x_{n+1}x_{n-3} < \alpha^3, \quad n \geq 2.$$

于是, 由归纳法得

$$\begin{cases} x_{n+1}x_{n-2} < \alpha^2, \\ x_{n+1}x_{n-3} < \alpha^3, \\ x_{n+1}x_{n-4} < \alpha^4, \\ \vdots \\ x_{n+1}x_{n-k} < \alpha^k, \quad \forall n \geq 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_n\} = +\infty$, 则存在正数序列 $\{x_{n_i+1}\}$, 使得 $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i+1} = +\infty$. 由极限的性质可知, 存在正数 $N \in \mathbb{N}^+$ 和 100, 使得对任意的 $i > N$, 有 $x_{n_i+1} > 100$ 成立.

另一方面, 由 (3.2) 可得

$$\begin{cases} \lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i-2} = 0, \\ \lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i-3} = 0, \\ \vdots \\ \lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i-k} = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

而 (3.3) 意味着存在一个 $i^* > N$, 使得 $x_{n_{i^*}+1} < 100$ 成立. 这与对任意的 $i > N$, $x_{n_i+1} > 100$ 相矛盾, 因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_n\} < +\infty.$$

接下来证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{x_n\} > 0$ 成立. 若不然, 不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{x_n\} = 0$, 于是存在数列 $\{x_{n_j}\}$, 使得 $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = 0$ 成立.

由 (1.4) 得

$$x_{n_j+2} = \frac{\alpha x_{n_j+1}^2}{(1+x_{n_j+1})x_{n_j}}, \quad (3.4)$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_n\} < +\infty$, 因此, (3.4) 意味着 $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j+1} = 0$.

同样, 由归纳法知,

$$\begin{cases} \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = 0, \\ \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j+1} = 0, \\ \vdots \\ \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j+k} = 0, \\ \vdots \end{cases}$$

因此, 我们有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

注意到, 方程 (1.4) 可改写为如下形式:

$$\frac{\frac{x_n}{x_{n-1}}}{\frac{x_{n+1}}{x_n}} = \frac{1+x_n}{\alpha}. \quad (3.5)$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 可知, 存在一个 $n_0 \in N^+$ 使得下式成立:

$$1+x_n < \alpha, \quad \forall n > n_0.$$

于是, 由方程 (3.5) 有

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{x_n}{x_{n-1}}, \quad \forall n > n_0.$$

由归纳法可得

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} > \dots > \frac{x_{n-k+1}}{x_{n-k}}, \quad n > k + n_0. \quad (3.6)$$

现在将证明存在一个 $N_1 \in N^+$, 使得

$$x_{N_1} < x_{N_1-1}, \quad \forall N_1 > n_0$$

成立. 否则, 对任意的 $N_1 > n_0$, 有 $x_{N_1} > x_{N_1-1}$. 这意味着当 $n > N_1$ 时, $x_{n+1} > x_n$, 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 矛盾. 因此, 当 $n > N_1$ 时, $x_{n+1} < x_n$, 即 $\{x_n\}_{n=N_1}^\infty$ 单调递减. 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{x_n\} > 0.$$

证毕. □

定理 3.2 方程 (1.4) 的每一个非振动解都收敛于唯一的平衡解 $\bar{x} = \alpha - 1$.

证明 设 $\{x_n\}_{n=-1}^\infty$ 是方程 (1.4) 的一个非振动解, 不失一般性, 假设对任意的 $n \geq n_0$, 有 $x_n \geq \bar{x}$, 其中 $n_0 \in N^+$.

由方程 (1.4) 知,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n^2}{(1+x_n)x_{n-1}} < \frac{x_n^2}{x_{n-1}},$$

即

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{x_n}{x_{n-1}}.$$

进一步, 由归纳法得

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{x_n}{x_{n-1}} < \dots < \frac{x_{n_1+1}}{x_{n_1}}.$$

注意到, 若存在一个 $n_2 \in N^+$, 使得 $x_{n_2+1} < x_{n_2}$ 成立, 则 $\{x_n\}_{n=n_2}^\infty$ 单调递减且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$. 否则, $\{x_n\}_{n=n_2}^\infty$ 单调增加, 与定理 3.1 矛盾. 证毕. $\square$

定理 3.3 设 $\alpha > \frac{4}{3}$, 则方程 (1.4) 的每一个正解关于平衡解 $\bar{x}$ 是振动的.

证明 下面采用反证法来证明. 设 $\{x_n\}_{n=-1}^\infty$ 是方程 (1.4) 的一个不关于平衡解 $\bar{x} = \alpha - 1$ 振动的正解.

令 $x_n = \bar{x} + y_n$, $n = -1, 0, 1, 2, \dots$, 则 $\{y_n\}_{n=-1}^\infty$ 是方程

$$y_{n+1} + \alpha - 1 = \frac{\alpha[y_n + \alpha - 1]^2}{(\alpha + y_n)(y_{n-1} + \alpha - 1)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.7)$$

的一个非振动解.

接下来将假设 $\{y_n\}$ 是一个最终正解 ($\{y_n\}$ 是最终负解的情形是类似的, 故省略).

首先, 由定理 3.2 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0.$$

其次, 方程 (3.7) 可改写为如下的形式:

$$y_{n+1} - y_n + p(n)y_{n-1} = 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

其中

$$p(n) = \frac{(y_n + \alpha - 1)(\alpha + y_n)(y_{n-1} + \alpha - 1) - \alpha(y_n + \alpha - 1)^2}{(\alpha + y_n)(y_n + \alpha - 1)y_{n-1}}.$$

注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{p(n)\} \geq \frac{\alpha - 1}{\alpha}.$$

于是, 满足引理 2.2 的条件, 故线性方程

$$y_{n+1} - y_n + \frac{\alpha - 1}{\alpha} y_{n-1} = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.8)$$

有一个最终正解.

而方程 (3.7) 的特征方程为

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{\alpha - 1}{\alpha} = 0. \quad (3.9)$$

显而易见, 当 $\alpha > \frac{4}{3}$ 时, 方程 (3.8) 无正根. 于是通过引理 2.3 知, 方程 (3.7) 不存在最终正解, 矛盾. 证毕. $\square$

致谢 感谢审稿专家对本文提出了宝贵意见, 并指出了引用文献的错误.

参考文献

- 1 Kocic V L S, Ladas G. Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order and Applications. Dordrecht: Kluwer Academic, 1993
- 2 Zhang D C, Shi B, Gai M J. On the rational recursive sequence $x_{n+1} = \frac{bx_n^2}{1+x_{n-1}^2}$. Indian J Pure Appl Math, 2001, 32: 809-812
- 3 Zhang D C, Shi B, Gai M J. On the rational recursive sequence. Comput Math Appl, 2001, 41: 21-24
- 4 El Morshey H A, Liz A. Convergence to equilibrium in discrete population models. J Difference Equ Appl, 2005, 2: 117-131

- 5 Zhang D C, Wang L Y, Huang J, et al. On a population model of systems $\begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n e^{-y_n} + \beta, \\ y_{n+1} = \alpha x_n (1 - e^{-y_n}). \end{cases}$ Appl Math, 2012, 3: 185–187
- 6 Qian C X. Global attractivity of periodic solutions in a higher order difference equation. Appl Math Lett, 2013, 26: 579–583
- 7 Kulenović M R S, Ladas G. Dynamics of second order rational difference equations with open problems and conjectures. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2002

Study on the may's host parasitoid model

ZHANG DeCun, WANG LiYing, JI WenQiang & LI XiaoBao

Abstract In this note, we investigate the global behavior of every positive solution of the may's host parasitoid model and answer an open problem which was proposed by Kulenović in the monograph of Dynamics of Second Order Difference Equation. The properties of permanence and oscillation for all positive solutions are obtained.

Keywords may's host parasitoid model, permanence, oscillation, difference equation

MSC(2010) 39A10

doi: 10.1360/012013-168