关于最近无穷维随机泛函微分方程研究的一些看法

刘凯

Department of Mathematical Sciences, School of Physical Sciences, The University of Liverpool, Liverpool L69 7ZL, UK
E-mail: k.liu@liv.ac.uk

收稿日期: 2015-01-28; 接受日期: 2015-04-13

摘要 抽象或无穷维随机泛函微分方程是一个相当年幼的学科. 本文基于作者近几年对该学科在学习和研究时所获得的一些经验和体会, 对问题、方法、技巧、难点和将来工作中要注意的诸多方面提出自己的看法. 本文的着眼点主要集中在分析和比较此学科的特点、问题的难点和在处理这些难点时经常使用的方法和工具, 同时指出在使用这些方法时应该特别注意的方面. 主要的目的是希望通过本文能吸引更多的人进入这个领域, 抛砖引玉, 从而推动这门学科的发展.

关键词 无穷维随机泛函微分方程 Green 算子 稳定性 有界和无界时间延迟 有界和无界时滞算子
MSC (2010) 主题分类 60H10, 93D15

1 前言

随机泛函微分方程从本质上讲是一个无穷维的课题. 为什么这么说呢? 我们不妨看一个简单的例子.

考虑一个取值于 Banach 空间 X 中的线性时滞随机微分方程

$$\begin{cases} dy(t) = Ay(t)dt + A_1y(t-r)dt + \int_{-r}^0 A_2(\theta)y(t+\theta)d\theta dt + By(t)dW(t), & t \geq 0, \\ y(0) = \phi_0 \in X, \quad y(\theta) = \phi_1(\theta) \in X, & \theta \in [-r, 0], \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $A, A_1, A_2(\cdot)$ 和 B 都是某些线性算子, $r > 0$ 是个常数, $W(\cdot)$ 是一个无穷维 Q -Wiener 过程, 时间延迟项 $A_1y(t-r)$ 和 $\int_{-r}^0 A_2(\theta)y(t+\theta)d\theta$ 分别称为离散 (点) 和连续 (分布) 时滞项.

如果我们定义算子

$$F\varphi := A_1\varphi(-r) + \int_{-r}^0 A_2(\theta)\varphi(\theta)d\theta, \quad \forall \varphi \in C([-r, 0], X),$$

则可以将方程 (1.1) 写得更加简洁一些,

$$\begin{cases} dy(t) = Ay(t) + Fy_t dt + By(t)dW(t), & t \geq 0, \\ y(0) = \phi_0, \quad y_0 = \phi_1, \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 $y_t(\cdot) := y(t + \cdot) \in C([-r, 0], X)$, $t \geq 0$, 称为过程 $y(t)$ 的一个“片段 (segment) 过程”.

现在假设 $X = \mathbb{R}^1$. 换句话说, 我们考虑一个一维随机时滞微分方程 (1.1), 这时候出现在 (1.2) 中的片段过程 y_t 仍然是一个取值于函数空间 $C([-r, 0], \mathbb{R}^1)$ 的过程, 也就是说, 我们还是在处理一个取值于无穷维空间的方程.

泛函微分方程是一个老课题. 这方面的工作最早可追溯到 20 世纪一二十年代, 如文献 [1, 2]. 这类方程的一个共同特点是模型中涉及了时间延迟 (time delay). 因为这个原因, 确定性系统中常出现的半群性没有了, 而对应的随机系统 Markov 性也不见了. 虽然我们不能说研究此类系统的困难皆源于此, 但至少这是一个主要原因.

无穷维或者抽象泛函微分方程的研究最早出现于 20 世纪 60 年代, 如文献 [3], 而相应的随机系统的研究则是近二三十年的事情, 例如, 我所知道这方面最早的工作是 Real [4]. 因此, 如果我说这个课题目前还处于它的婴儿期, 大概是没有什么问题的. 另外, 这个课题的名字暗示我们, 这是由泛函微分方程 (时滞系统) 和概率论 (随机过程) 交叉而形成的一门学科. 这意味着该理论会在解决诸如随机偏泛函微分方程的问题时得到应用. 因为这样一个特点, 这类方程考虑的问题很自然地来自于这两个数学分支. 例如, 我们可以考虑方程解的存在性、唯一性 [3, 5–11]、正则性 [8, 9, 12–15]、稳定性 [16–23] 和其他大时间行为 [5, 7, 10, 24–28] 这样一些源自于常微分方程的问题; 我们也可以考虑如解的平稳性 [9, 29, 30]、不变测度的存在和唯一性 [31–33]、大偏差理论 [6, 34, 35] 或者解的常返性等这样一些概率论的问题. 当然我们也可以考虑如随机最优控制 [36] 这样一些具有很强应用背景的问题. 因为涉及多学科性质, 它的理论和方法是丰富的, 也正因为如此, 在这个领域工作的研究者必须对诸如偏微分方程、泛函分析、随机分析和随机微分方程等学科有相当程度的了解, 才有可能作出有价值的工作, 否则只能是隔靴挠痒, 收效甚微.

下面就一些具体课题作更详细的说明.

2 解的存在性与唯一性

这当然是研究任何方程首先要回答的问题. 若方程的解不存在或者存在但不唯一, 则后面的很多问题均无从谈起.

对于没有时间延迟的方程, 它的解的存在和唯一性问题可能会很复杂, 但对应的时滞系统有时反而变得简单了. 例如, 考虑下面的方程:

$$\begin{cases} dy(t) = A(y(t-r))dt + B(y(t-r))dW(t), & t \geq 0, \\ y(0) = \phi_0, \quad y(\theta) = \phi_1(\theta), & \theta \in [-r, 0]. \end{cases}$$

显然, 在 A 和 B 满足很弱的条件下 (如局部可积), 此方程的解可以在区间 $[0, r], [r, 2r], \dots$, 上逐段构造出来. 不过, 这个方法在处理含有连续时间延迟的系统时就不是太有效了.

对于一般的情形, 迄今为止最常见的办法是使用 Banach 空间中“不动点 (fixed-point theorem)”方法. 标准的步骤是先在 X 上定义一个 Banach 空间 $S(X)$, 然后再根据研究的方程定义一个适当的映射 F . 如果我们能证明 $F(S(X)) \subset S(X)$, 并且说明 F 有压缩性质, 根据不动点原理, 则在 $S(X)$ 中存在着一个唯一的元 y 使得

$$F(y) = y.$$

这样得到的 y 不仅是此方程唯一的解, 并且它还满足空间 $S(X)$ 中的所有性质. 很显然, 这里的关键

是根据感兴趣的问题构造适当的空间 $S(X)$. 例如, 如果你还希望所得到的解 y 具有稳定性, 则需要 $S(X)$ 中的元满足这个性质, 这是最近利用不动点原理研究稳定性问题的基本思想 (参见文献 [22]), 为了使映射 F 在 $S(X)$ 中有一个不动点, 你的方程需要满足某些特殊条件. 在最近的一些文献中, 有很多关于这个方面的工作, 方法基本上都是沿着这个套路. 特别是有些工作对方程加上很强的限制, 让人很难相信这就是应该得到的最好结果. 在这些工作中往往研究的都是非常一般的方程, 例如, 考虑非线性中立型方程; 时间延迟是无限的; 方程中时滞算子是无界的; 甚至还带有脉冲现象等等. 方法还是旧的, 最后的结果也是大同小异, 没见新的思想和工具对问题作本质的推进, 只是让条件变得更加繁琐而难以验证. 我的意见是, 若不能引进新的思想和工具来克服这些方程固有的困难, 还是尽量避免这种浅尝辄止的工作.

3 提升方法

随机系统的 Markov 性在确定性系统中对应着半群性. 前面说过, 由于时间延迟的关系, 我们所考虑的解过程已不再是一个 Markov 过程. 那么是否可能通过某种方式, 将原来的方程变成一个“等价”非时滞方程 (进而利用已有的 Markov 过程理论)? 回答是可能的, 但是要付出一些代价, 这便是我们通常说的提升方法.

让我们再看下方程 (1.1). 首先, 我们引入一些新的空间和算子:

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &:= X \times L^2([-r, 0], X), \\ \mathcal{A}\phi &:= \left(A\phi_0 + A_1\phi_1(-r) + \int_{-r}^0 A_2(\theta)\phi_1(\theta)d\theta, \frac{d\phi_1(\theta)}{d\theta} \right), \quad \forall \phi = (\phi_0, \phi_1) \in \mathcal{X}, \\ \mathcal{B}\phi &:= (B\phi_0, 0).\end{aligned}$$

这样一来, 我们可以将 (1.1) 重新写成一个不含时滞的随机方程

$$\begin{cases} dY(t) = \mathcal{A}Y(t)dt + \mathcal{B}Y(t)dW(t), & t \geq 0, \\ Y(0) = \phi \in \mathcal{X}, \end{cases} \quad (3.1)$$

这样的 $Y(t) = (y(t), y_t), t \geq 0$ 称为 $y(t)$ 的提升过程.

经过这样的变化后, 原来的时滞方程 (1.1) 变成了一个非时滞的方程, 原来的非 Markov 解过程 $y(t)$, 现在成了一个具有 Markov 性的解过程 $Y(t)$, 而我们为此付出的代价则是无论原来的方程怎样, 我们现在都需要处理一个取值无穷维空间 $\mathcal{X}$ 里的方程. 很多情形下, 我们能证明 $\mathcal{A}$ 产生一个 C_0 -半群, 这样我们仍然能利用半群理论来研究方程 (3.1).

我们也可以选择别的空间来达到同样的目的. 例如, 由于方程 (1.1) 的解具有连续轨道, 我们可以考虑空间 $C([-r, 0], X)$ 中的提升过程 $y_t(\theta) := y(t + \theta), \theta \in [-r, 0], t \geq 0$ (有关此方法最初的叙述参见文献 [37]). 一般来说, 这两个提升空间各有利弊, 选择哪一个空间主要取决于你所讨论的问题和使用的工具. 例如, 空间 $\mathcal{X}$ 在某些时候可以是一个 Hilbert 空间 (当 $X = \mathbb{R}^n$ 时就是如此), 这一点在研究随机最优控制问题时特别有用, 而空间 $C([-r, 0], X)$ 永远只能是一个 Banach 空间. 再例如, 当研究由跳过程驱动的随机微分方程时, 它的解一般都没有连续轨道, 这时考虑空间 $C([-r, 0], X)$ 中的提升过程显然就不合适了. 但是, 空间 $C([-r, 0], X)$ 也有它的优势, 这个空间在结构上比起 $\mathcal{X}$ 来要简单一些, 当我们应用分析中的一些标准工具, 如 Stone-Weierstrass 定理、Ascoli-Arzelà 定理、Doob 不等式或者 Birkholder-Davis-Gundy 不等式的时候, 这个空间也会方便一些.

提升方法最大的优点是把时滞方程的问题转变成一个非时滞系统的问题, 因而能充分地利用现有的有关非时滞系统的结果. 但它主要的困难是, 反过来如何将所得到的关于提升过程的结果去解决原来时滞系统的问题. 对于有些问题, 如稳定性, 这个方法是有效的, 而对有些问题, 这个方法有可能失灵了.

下面结合随机稳定性问题作一些更详细的说明.

例如, 考虑方程 (1.1) 解的均方指数稳定性问题, 也就是确定解 y 是否满足

$$E\|y(t, \phi)\|_X^2 \leq Me^{-\mu t} \|\phi\|_X^2, \quad t \geq t_0,$$

其中 $M \geq 1$, $\mu > 0$ 和 $t_0 \geq 0$ 是正常数.

为了研究这个问题, 我们想转而考虑它的提升方程 (3.1) 的均方指数稳定性. 这个想法是可行的, 因为根据定义, 如果 (3.1) 的解 $Y(t)$ 是均方指数稳定的, 则存在常数 $M \geq 1$, $\mu > 0$ 和 $t_0 \geq 0$, 使得

$$E\|y(t, \phi)\|_X^2 \leq E\|y(t, \phi)\|_X^2 + E \int_{-r}^0 \|y(t + \theta, \phi)\|_X^2 d\theta = E\|Y(t, \phi)\|_X^2 \leq Me^{-\mu t} \|\phi\|_X^2, \quad t \geq t_0.$$

反过来, 如果方程 (1.1) 的解是均方指数稳定的. 因为方程 (1.1) 的解是均方连续 (实际上, 很多情形下有连续轨道), 因此存在常数 $C \geq 1$, $\nu > 0$, 使得当 $t > r$ 时,

$$\begin{aligned} E\|Y(t, \phi)\|_X^2 &\leq E\|y(t, \phi)\|_X^2 + r \cdot \max_{-r \leq \theta \leq 0} E\|y(t + \theta, \phi)\|_X^2 \\ &\leq (C + rCe^{\nu r})e^{-\nu t} \|\phi\|_X^2. \end{aligned}$$

换句话说, 就均方稳定性问题而言, 考虑方程 (1.1) 还是它的提升方程 (3.1) 结果是等价的.

4 稳定性

第 3 节提到在研究时滞系统的稳定性时, 人们可以通过提升办法考虑一个非时滞系统的稳定性. 另一方面, 我们知道对于一个有限维线性系统

$$\begin{cases} dy(t) = Ay(t)dt, & t \geq 0, \\ y(0) = \phi_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

它的稳定性本质上由矩阵 A 的特征值 (或者谱) 完全确定. 提升方法的优越性之一就是在方程 (1.1) 和 (3.1) 的谱集之间存在着一个一一对应的关系. 准确地说, 对方程 (1.1) 和 (3.1), 我们定义算子

$$\Delta(\lambda, A, A_1, A_2) := \lambda I - A - A_1 e^{-\lambda r} - \int_{-r}^0 A_2(\theta) e^{\lambda \theta} d\theta, \quad (4.1)$$

$$\Delta(\lambda, \mathcal{A}) := \lambda I - \mathcal{A}, \quad (4.2)$$

则 $\Delta(\lambda, A, A_1, A_2)$ 和 $\Delta(\lambda, \mathcal{A})$ 有着完全同样的谱集. 这意味着, 为了确定 (4.2) 的谱, 我们只需确定 (4.1) 的谱. 如果算子 $\mathcal{A}$ 有着较好的性质, 例如, $\mathcal{A}$ 产生一个范数连续 C_0 -半群 ($X = \mathbb{R}^n$ 时的情形就是这样), 则 $\Delta(\lambda, \mathcal{A})$ 的谱集本质上只含有点谱, 而相应的稳定性问题当然就容易处理了. 对于一般的算子 $\mathcal{A}$, 这个问题就变得复杂多了, 但不管怎么说, 在随机稳定性问题的研究中, 我认为谱方法应该说是一个很有效的方法.

有限维系统稳定性研究中一个重要的方法是所谓的 Lyapunov 函数方法. 将此方法应用到无穷维随机时滞系统的稳定性问题是一个很自然的考虑, 只不过此时我们需要构造的往往是一个非线性的 Lyapunov 泛函, 这比起有限维时的 Lyapunov 函数, 就复杂多了, 但这个思想肯定是有效的. 很多研究者在他们的的工作中虽然没有明确指出这点, 但实际上都在自觉或不自觉地使用着这个方法. 我相信在将来稳定性问题的研究中, 这个方法在很多时候仍然在暗地里引导着我们的思路. 值得指出的是, 这个方法通常只能得到一些稳定性的充分条件, 因而对不同充分条件的比较就非常重要了. 在最近的工作中, 我们看到一些利用不动点原理得到的稳定性准则, 这些结果若能与已有的结果进行仔细的比较, 当能更显示出此方法的威力. 但令人遗憾的是, 这方面的努力似乎欠缺一些.

5 时滞 Green 算子

第 3 节曾经说过提升办法并非总是可行的, 这迫使我们必须回到原来的空间 X 上去研究问题. 时滞 Green 算子的引入在某种程度上能帮助我们实现这个愿望.

让我们来看一下方程 (1.1) 在不含随机项时候的情形 (即 $B = 0$). 这时我们可以证明, 在延迟算子满足某些自然的条件 (例如, A_1 和 $A_2(\cdot)$ 都是有界算子), 该方程有一个唯一的解 $y(t)$, $t \geq 0$. 对任意的 $x \in X$, 我们可以通过解 y 定义一个算子族 $G(t)$, $t \geq 0$,

$$G(t)x := y(t, \phi) \in X, \quad \phi = (x, 0) \in \mathcal{X},$$

可以证明 $G(t)$, $t \geq 0$ 是空间 X 上的一个强连续有界线性算子族.

时滞 Green 算子是非时滞强连续半群的推广. 它的好处是, 允许人们直接在空间 X 上研究方程 (1.1) 的解 $y(t)$, $t \geq -r$, 而不是先在空间 $\mathcal{X}$ 上考虑提升过程 $Y(t)$, $t \geq 0$, 再利用所得到的结果间接地研究方程 (1.1) 的解 $y(t)$, $t \geq -r$. 例如, 通过时滞 Green 算子 $G(t)$, 我们可以得到方程 (1.1) 解的常数变化公式 (variation of constants formula),

$$y(t) = G(t)\phi_0 + \int_{-r}^0 V(t, \theta)\phi_1(\theta)d\theta + \int_0^t G(t-s)By(s)dW(s), \quad t \geq 0,$$

其中

$$V(t, \theta) = G(t - \theta - r)A_1 + \int_{-r}^{\theta} G(t - \theta + s)A_2(s)ds, \quad t \geq 0, \quad \theta \in [-r, 0].$$

对于可加噪音 (additive noise) 驱动的方程, 我们则可以得到方程的显式解, 这方便我们研究此类方程的各种性质.

因为含有时间延迟, 时滞 Green 算子 $G(t)$ 也失去了一些好的性质, 如半群性. 实际上, 我们可以证明 $G(t)$, $t \geq 0$ 满足某种类类似于半群性的“拟半群性质”: 对任意 $s, t \geq 0$,

$$G(t+s) = G(t)G(s) + \int_{-r}^0 G(t+\theta)[SG(s+\cdot)]d\theta,$$

其中 S 是空间 $L^2([-r, 0], X)$ 上的一个有界线性算子, 通常称为结构算子. 显然, 当 $S = 0$ 时, 也就是没有时间延迟, 则 $G(t)$ 又回到原来的强连续半群 e^{tA} , $t \geq 0$.

虽然时滞 Green 算子 $G(t)$, $t \geq 0$ 的性质有时不如人意, 例如, 它没有半群性, 但我的看法是, 它仍然是研究无穷维随机泛函微分方程的一个重要工具, 对于线性系统的研究尤其如此. 有关经典 C_0 -半群的很多理论结果都能推广到时滞 Green 算子, 这对研究诸如 (1.1) 的系统方程提供了强有力的工具.

6 无限时间延迟

现在看到的大部分工作都考虑有限时滞的情形, 即 $0 < r < \infty$. 从有限时滞到无限时滞的跨跃所带来的困难有时候是非常本质的.

例如, 我们再回头看方程 (1.1) 这个例子. 假设 A 产生一个紧 C_0 - 半群 e^{tA} , $t > 0$, 如果再对时滞算子 A_1 和 $A_2(\cdot)$ 加上适当的限制后, 我们可以进一步证明 (3.1) 中的算子 $\mathcal{A}$ 在区间 $(r, +\infty)$ 上产生一个紧 C_0 - 半群 $e^{t\mathcal{A}}$, $t > r$. 但是, 如果 $r = +\infty$, 则无论如何 $\mathcal{A}$ 都不会产生紧半群.

目前带有无限时间延迟的抽象随机泛函微分方程的工作还不多见, 当然有价值的工作就更少了. 现阶段要在这方面进行工作, 我的意见是不宜考虑太一般的方程模型, 如中立型方程、由分数 Brown 运动或者 Lévy 过程驱动的时滞随机微分方程. 我觉得可以先把精力集中在一些比较特殊的方程, 如线性标量型 (scalar type) 无穷维随机 Volterra 微积分方程

$$dy(t) = Ay(t)dt + \int_0^t a(t-s)A_1y(s)dsdt + By(t)dW(t), \quad t \geq 0,$$

其中 A, A_1 和 B 是与方程 (1.1) 中一样的算子, $a \in L^2_{\text{loc}}(0, \infty)$. 因为确定性抽象 Volterra 型方程已有很长的研究历史和相对成熟的理论, 等我们对一些比较特殊的模型有深入的了解后, 再来考虑更一般的情形, 工作就会顺利很多. 我相信沿着这个方向努力, 一定能挖掘出很多有价值的东西.

7 无界延迟算子

与无限时滞一样, 无界延迟算子情形 (即方程 (1.1) 中的算子 A_1 和 $A_2(\cdot)$ 是无界算子) 所带来的困难通常也是本质性的. 对于有界算子延迟, 很多时候离散和连续时间延迟可以通过同样的方法进行研究, 而如果涉及无界算子, 这两类时间延迟往往会产生不同的现象.

例如, 再来考虑方程 (1.1). 如果 A_1 和 $A_2(\cdot)$ 是无界算子, 就算是 A 产生一个紧半群 e^{tA} , $t > 0$, (3.1) 中相对应的算子 $\mathcal{A}$ 有可能在任何区间 $(t_0, +\infty)$ 上都不会产生范数连续的 C_0 - 半群, 但是如果我们只考虑连续延迟算子 $A_2(\cdot)$ (即 $A_1 = 0$), 则 $\mathcal{A}$ 有可能产生一个范数连续的 C_0 - 半群. 从这个例子可以看出, 当研究含有无界时间延迟算子的随机系统时, 有时候确实有必要将这两类时间延迟分开考虑.

另外一个与这种现象类似的情形是所谓的时间延迟项含有高阶导数的问题. 准确地说, 在 (1.1) 中假设 A 是一个 Laplace 导数算子, 如果 A_1 和 $A_2(\cdot)$ 比起 A 来有较低阶的导数, 则很多情形下此方程系统会表现出与 A_1 和 $A_2(\cdot)$ 是有界算子时的情形类似的行为.

最后我想提到, 时间延迟若出现在扩散项中, 则本质上会导致无界算子时滞. 实际上, 这也正是这类方程难以处理的根本原因. 例如, 在方程 (1.1) 中, 我们考虑含有时滞的扩散项系数 $By(t-r)$. 为了得到一个不含有时滞 (即类似于 (1.2)) 的提升过程, 我们可以定义算子

$$\mathcal{B}(\phi_0, \phi_1) := (B\phi_1(-r), 0), \quad \forall \phi \in X \times C([-r, 0], X).$$

因此, 无论算子 B 是否有界, 算子 $\mathcal{B}$ 总是空间 $\mathcal{X}$ 上的一个无界算子.

无界算子的出现给这类方程的研究带来很多困难, 也正是这些困难, 在给我们的研究带来重重阻碍的同时, 推动着知识的进步. 为了迎接这些挑战, 我们呼唤新的思想和方法. 困难的问题等待着我们去接近它们, 最终解决它们. 正如孙中山先生所说的: “革命尚未成功, 同志仍须努力”, 愿通过更多人的辛勤工作, 使这门年幼的学科能成熟起来.

最后列出一些近几年的参考文献, 供有志于这个课题研究的同志作进一步的阅读.

参考文献

- 1 Volterra V. Sulle equazioni integro differenziali della teoria dell'elasticità. *Rend Accad Lincei*, 1909, 18: 295–301
- 2 Volterra V. *Lecons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*. Paris: Gauthier Villars, 1913
- 3 Friedman A, Shinbrot M. Volterra integral equations in Banach spaces. *Trans Amer Math Soc*, 1967, 126: 131–179
- 4 Real J. Stochastic partial differential equations with delays. *Stochastics*, 1982, 8: 81–102
- 5 Barbu V, Bonaccorsi S, Tubaro L. Existence and asymptotic behavior for hereditary stochastic evolution equations. *Appl Math Optim*, 2014, 69: 273–314
- 6 Bonaccorsi S, Fantozzi M. Infinite dimensional stochastic Volterra equations with dissipative nonlinearity. *Dyn Syst Appl*, 2006, 15: 465–478
- 7 Caraballo T, Liu K, Truman A. Stochastic functional partial differential equations: Existence, uniqueness and asymptotic stability. *Proc R Soc Lond Ser A*, 2000, 456: 1775–1802
- 8 Cox S, Górajski M. Vector-valued stochastic delay equations — a semigroup approach. *Semigroup Forum*, 2011, 9: 389–411
- 9 Liu K. Stochastic retarded evolution equations: Green operators, convolutions and solutions. *Stoch Anal Appl*, 2008, 26: 624–650
- 10 Taniguchi T, Liu K, Truman A. Existence, uniqueness and asymptotic behavior of mild solutions to stochastic functional differential equations in Hilbert spaces. *J Differential Equations*, 2002, 181: 72–91
- 11 Zhang X C. Stochastic Volterra equations in Banach spaces and stochastic partial differential equation. *J Funct Anal*, 2010, 258: 1361–1425
- 12 Bonaccorsi S, Tubaro L. Mittag-Leffler function and stochastic linear Volterra equations of convolution type. *Stoch Anal Appl*, 2003, 20: 61–78
- 13 Chow P, Liu K. Positivity and explosion of stochastic functional parabolic equations of retarded type. *Stochastic Process Appl*, 2012, 122: 1709–729
- 14 Clément P, Da Prato G. Some results on stochastic convolution arising in Volterra equations perturbed by noise. *Rend Mat Accad Lincei*, 1996, 3: 147–153
- 15 Liu K. Regularity of stochastic linear retarded functional differential equations in Hilbert spaces. *J Theoret Probab*, 2012, 25: 565–593
- 16 Bao J H, Truman A, Yuan C G. Stability in distribution of mild solutions to stochastic partial differential delay equations with jumps. *Proc R Soc Lond Ser A*, 2012, 465: 2111–2134
- 17 Caraballo T. Asymptotic exponential stability of stochastic partial differential equations with delay. *Stochastics*, 1990, 33: 27–47
- 18 Caraballo T, Liu K. Exponential stability of mild solutions of stochastic partial differential equations with delays. *Stoch Anal Appl*, 1999, 17: 743–764
- 19 Jahanipour R. Stability of stochastic delay evolution equations with monotone nonlinearity. *Stoch Anal Appl*, 2003, 7: 161–181
- 20 Luo J W, Liu K. Stability of infinite dimensional stochastic evolution equations with memory and Markovian jumps. *Stochastic Process Appl*, 2008, 118: 864–895
- 21 Liu K. On stability for a class of semilinear stochastic evolution equations. *Stochastic Process Appl*, 1997, 70: 219–241
- 22 Luo J W. Fixed points and stability of neutral stochastic delay differential equations. *J Math Anal Appl*, 2007, 334: 431–440
- 23 Wan L, Duan J Q. Exponential stability of non-autonomous stochastic partial differential equations with finite memory. *Statist Probab Lett*, 2008, 78: 490–498
- 24 Bierkens J. Pathwise stability of degenerate stochastic evolutions. *Integral Equations Operator Theory*, 2010, 23: 1–27
- 25 Caraballo T, Robinson J C. Stabilisation of linear PDEs by Stratonovich noise. *Systems Control Lett*, 2004, 53: 41–50
- 26 Dauer J, Mahmudov N. Controllability of stochastic semilinear functional differential equations in Hilbert spaces. *J Math Anal Appl*, 2004, 10: 373–394
- 27 Liang F, Guo Z H. Asymptotic behavior for second order order stochastic evolution equations with memory. *J Math Anal Appl*, 2014, 115: 1333–1350
- 28 Liu K. Necessary and sufficient conditions for exponential stability and ultimate boundedness of systems governed by stochastic partial differential equations. *J Lond Math Soc*, 2000, 62: 311–320
- 29 Liu K. Stationary solutions of retarded Ornstein-Uhlenbeck processes in Hilbert spaces. *Statist Probab Lett*, 2008, 78: 1775–1783
- 30 Liu K. Retarded stationary Ornstein-Uhlenbeck processes driven by Lévy noise and operator self-decomposability. *Potential Anal*, 2010, 33: 291–312

- 31 Bierkens J, van Ganns O. Dissipativity of the delay semigroup. *J Differential Equations*, 2014, 257: 2418–2429
- 32 Bierkens J, van Ganns O, Lunel S. Existence of an invariant measure for stochastic evolutions driven by an eventually compact semigroup. *J Evol Equ*, 2009, 9: 771–786
- 33 Liu K. Existence of invariant measures of stochastic systems with delay in the highest order partial derivatives. *Statist Probab Lett*, 2014, 94: 267–272
- 34 Bonaccorsi S, Fantozzi M. Large deviation principle for semilinear stochastic Volterra equations. *Dyn Syst Appl*, 2004, 9: 203–220
- 35 Liu K, Zhang T S. A large deviation principle of retarded Ornstein-Uhlenbeck processes driven by Levy noise. *Stoch Anal Appl*, 2014, 32: 889–910
- 36 Flandoli F. Solution and control of a bilinear stochastic delay equation. *SIAM J Control Optim*, 1990, 28: 936–949
- 37 Hale J K. *Theory of Functional Differential Equations*. New York: Springer-Verlag, 1977

Some views on recent randomized study of infinite dimensional functional differential equations

LIU Kai

Abstract As a relatively new area in mathematics, the subject of abstract or infinite dimensional stochastic functional differential equations is still in its tender age at present. In this note, the author intends to show some of his personal views, mainly based on his own academic experience in this topic, about the current art of research. Special attention is paid to a statement of various methods, techniques and ideas in the undergoing development. What I am trying to do is to highlight the coherent characterization of various difficult problems, effective methods and useful tools frequently seen in this subject. A mild notice is also made on some possible pitfalls which an active researcher working in this area should take into account. It is hoped that, through this short work, some more valuable developments can be promoted and significant progress can be expected in the future.

Keywords abstract or infinite dimensional stochastic functional differential equation, Green operator, stability, finite or infinite time delay, bounded or unbounded time delay operator

MSC(2010) 60H10, 93D15

doi: 10.1360/N012015-00055