综 述

插值特殊曲线的可展曲面造型研究进展

献给徐利治教授 95 华诞

李彩云^①, 朱春钢^{②*}, 王仁宏^②

① 大连理工大学盘锦校区基础教学部, 盘锦 124221;

② 大连理工大学数学科学学院, 大连 116024

E-mail: caiyun@dlut.edu.cn, cgzhu@dlut.edu.cn, renhong@dlut.edu.cn

收稿日期: 2015-01-23; 接受日期: 2015-05-06; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11290143, 11401077 和 11271060)、民用飞机专项 (批准号: MJ-F-2012-04)、中央基本科研业务费 (批准号: DUT14YQ111) 和辽宁省高等学校优秀人才支持计划 (批准号: LJQ2014010) 资助项目

摘要 可展曲面一直是计算机辅助几何设计领域中的热点问题, 其在曲线曲面造型中有着很好的应用前景. 另外, 它与逼近论、最优化、微分几何、线几何等领域密切相关, 并产生了一些很好的数学结果. 本文主要综述可展曲面的一些基本结果及作者近年来在该方向的一些研究工作, 并对未来工作进行展望, 主要包括具有一定几何约束的可展曲面的构造和拼接等.

关键词 可展曲面 测地线 曲率线

MSC (2010) 主题分类 41A15, 65D17, 68U07

1 引言

随着汽车和飞机工业的蓬勃发展, 很多产品的外观设计越来越被重视. 计算机辅助设计与制造 (CAD/CAM) 技术起源于汽车与航空航天业, 因为汽车、飞机的外形含有大量的复杂曲面, 所以, 从一开始, CAD/CAM 技术就与曲线曲面造型技术紧密地联系在一起, 并在实际生产中得到越来越广泛的应用. 从样条函数出现到现在, 曲线曲面造型技术经历了参数样条方法、Coons 曲面、Bézier 曲线曲面和 B 样条曲线曲面. 后来, NURBS (Non-uniform rational B-spline) 的出现弥补了 B 样条不能精确表示二次曲线曲面的不足.

计算机辅助几何设计 (CAGD) 的出现和发展很大程度上促进了现代工业的发展. 它的主要研究对象是工业产品的几何形状. 在几何造型过程中, 所研究的对象从整体上来讲, 都属于曲线曲面造型问题. 曲线曲面造型始终是这个领域最活跃、最关键的分支之一, 尤其是可展曲面^[1-8]、极小曲面^[9,10]具有很好的性质, 它们在工业生产中得到越来越多的应用 (参见文献 [11-15]).

可展曲面是曲面造型中经常要用到的一类曲面, 因为它可以没有伸缩、折叠或撕裂地展开成平面. 长期以来, 在许多以皮革、纸张、金属板等不可伸缩材料为原材料的产品制造方面, 可展曲面是经常遇到的一类最简单且重要的曲面, 如汽车、飞机以及船体的设计和制造. 可展曲面的构造、逼近、拼接等一直是当前计算机辅助几何设计领域中的热点问题.

英文引用格式: Li C Y, Zhu C G, Wang R H. Researches on developable surface modeling by interpolating special curves (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 1441-1456, doi: 10.1360/N012015-00039

测地线在工业生产中有很广泛的应用, 它有一个比较好的性质, 当可展曲面展开成平面时, 其上的测地线相应地展开成直线 (参见文献 [16]). 这一性质使它在生产实践中更加重要, 尤其是在制鞋和服装设计中, 皮革和纺织品可以看成可展曲面, 足背线和腰线相当于曲面上的测地线. 曲率线是曲面上另外一类重要的曲线. 它在曲面分析中是一种很有用的工具, 被广泛应用于几何设计、形状识别、曲面的多边形化、曲面描绘等领域. 然而, 目前关于测地线和曲率线的研究工作主要集中在如何寻找和计算曲面的测地线和曲率线. 在实际应用中, 如何构造插值这些特殊曲线的曲面, 尤其是把它们与曲面造型中常用的可展曲面进行有机结合也是一个有意义的研究课题.

本文主要介绍可展曲面^[1-8]和具有一定几何约束的可展曲面构造^[11-15, 17, 18]的一些结果. 本文组织结构如下: 第 2 节介绍可展曲面的研究现状和发展动态; 第 3 节介绍插值测地线的可展曲面拼接问题; 第 4 节介绍以给定曲线为曲面曲率线的曲面族和可展曲面的构造方法; 最后一节对一些未解决的问题进行展望. 其中, 第 3 和 4 节对作者近年来的研究工作进行简单介绍.

2 可展曲面的研究现状

可展曲面在计算机辅助几何设计领域一直是非常重要的研究对象. 它在机械零件的表面加工、飞机汽车轮船的外形设计、服装鞋帽制作等行业都有很好的应用. 所以, 国内外很多学者从各种不同的角度出发, 发表了大量关于可展曲面的性质和构造的研究论文. 主要构造方法有以下几种.

(1) 点几何方法

这类方法是由 Aumann^[1]提出的, 他研究了由两个平行平面上的两条曲线所生成直纹面的可展特征, 其中两条曲线分别为设计曲线和伴随曲线. 曲面的参数表示为

$$\mathbf{X}(t, w) = (1-t)\mathbf{a}(w) + t\mathbf{b}(w), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq w \leq 1,$$

其中 $\mathbf{a}(w)$ 和 $\mathbf{b}(w)$ 均为 Bézier 曲线, 是曲面的边界曲线. 若曲面 $\mathbf{X}(t, w)$ 可展, 则有

$$(\dot{\mathbf{a}}(w), \mathbf{b}(w) - \mathbf{a}(w), \dot{\mathbf{b}}(w)) = 0. \quad (2.1)$$

将两条边界 Bézier 曲线代入 (2.1), 可得关于边界曲线控制顶点的非线性方程. 文献 [2] 中的两条边界的其中一条是自由的, 另外一条通过 (2.1) 确定. 如果待定边界与给定边界有相同的次数, 则有多于 5 个的自由度. 叶正麟等人^[3]把 Aumann 的工作进行了推广, 研究了设计曲线和伴随曲线分别为 $n+1$ 和 $n+m+1$ 的情形. Schneider^[4]研究了用柱面和锥面组成的可展曲面带进行边界插值, 得到的可展曲面不仅可以插值任意次的 B 样条曲线, 还能保证在曲面内部没有奇异点. 此外, Lang 和 Röschel^[5]利用有理 $(1, n)$ Bézier 曲面构造可展曲面, 并给出了有理 Bézier 曲面为可展曲面时控制网和权因子需满足的必要条件.

(2) 对偶方法

由于点几何方法会产生非线性方程, 不方便求解. Hoschek^[6]首先在 CAGD 中引入了 Bézier 曲线曲面的对偶表示方法. 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 平面表示为 $u_0 + u_1x + u_2y + u_3z = 0$, 它与 $\mathbb{R}^4$ 中的点 $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ 相对应, $n\mathbf{u}$ 构成 $\mathbb{R}^4$ 中的一个一维子空间, 把它放在射影空间 P^3 中考虑, P^3 中的点与 $\mathbb{R}^3$ 中的平面建立一一对应. 根据可展曲面是单参数平面族的包络面, 平面族表示为

$$u_0(t) + u_1(t)x + u_2(t)y + u_3(t)z = 0,$$

其在 P^3 中的对偶表示为

$$U(t) = R(\mathbf{u}(t)) = R(u_0(t), u_1(t), u_2(t), u_3(t)),$$

即 $U(t)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中可展曲面在 P^3 中的对偶表示. 经计算和分析知, $\mathbb{R}^3$ 中的可展曲面对应 P^3 中的一条曲线, 通过操作该曲线, 就能构造可展曲面. Bodduluri 和 Ravani^[7] 利用平面和点几何的对偶性研究了可展 Bézier 曲面的设计方法. Pottmann 和 Farin^[8] 利用对偶性, 把有理可展曲面看作是对偶摄影空间里的有理曲线, 给出了可展有理 Bézier 曲面和有理 B 样条曲面的几何构造方法.

(3) 分片构造方法

曲线曲面拼接也是曲线曲面造型的一项重要研究内容. 在很多产品的设计中常需要采用分片的形式来构造. 对于可展曲面也同样面临着两片及多片之间的光滑拼接问题. Leopoldseder 和 Pottmann^[14] 利用锥样条近似给定的可展曲面. 之所以采用锥样条是因为它易于操作, 且有较低次数的参数表示和隐式表示, 这些特点有利于对可展曲面进行高精度展开. 基本思想为: 在一可展曲面 D 上选取直母线序列 r_i 和相应的切平面 T_i , 用两个具有公共直母线并且在公共直母线上有相同切平面的圆锥面 C^I , 插值相邻的 (r_i, T_i) . Pottmann 和 Wallner^[15] 利用可展曲面的密切锥近似可展曲面, 其思想为: 给定一个可展曲面, 从该曲面上算得一个相邻密切锥序列 C_i , 寻找锥面把这些相邻的密切锥光滑拼接, 进而用锥样条近似可展曲面.

(4) 点云拟合方法

Peternell^[19] 研究了如何用可展曲面拟合点云, 它适用于已知大量点的数据信息的问题. 在具体的构造过程中, 主要用柱面和锥面拟合数据点. 构造过程如下: 首先, 将数据点进行粗略划分, 这里用到 Gauss 映射, 将数据点的单位法向量映到单位球, 任选一离数据点边界不是太近的点 p_i , 将距离 p_i 小于一定距离的点看作一个划分单元, 利用 Gauss 像进行辅助调整, 得到更加合适的划分单元, 然后用合适的圆柱或圆锥拟合它; 其次, 重复刚才的过程, 得到一个旋转曲面片序列; 最后, 将这些曲面片进行 G^1 拼接, 最终得到拟合数据点的可展曲面.

(5) 具有一定几何约束的构造方法

在服装、鞋帽制作以及汽车轮船飞机的外形设计和加工中, 从工业设计实际要求出发, 常常需要构造满足一定几何约束的可展曲面. Wang 等人^[20] 研究了以给定曲线为测地线的曲面族的构造方法. 他们利用 Frenet 标架表示曲面, 给出了曲线既为曲面的等参线又为曲面测地线的充要条件. 构造方法为: 给定曲线 $\mathbf{r}(s)$, 利用 Frenet 标架表示曲面为 $\mathbf{P}(s, t) = \mathbf{r}(s) + u(s, t)\mathbf{T}(s) + v(s, t)\mathbf{N}(s) + w(s, t)\mathbf{B}(s)$, 其中 $u(s, t), v(s, t), w(s, t)$ 为连续函数, $\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)$ 分别为曲线的切向量、主法向量和副法向量. 利用该表达式以及曲线为曲面测地线的条件给出了 $\mathbf{r}(s)$ 为曲面 $\mathbf{P}(s, t)$ 的等参线和测地线的充要条件, 并把它应用到服装设计中, 取得较好的效果. Zhao 和 Wang^[11] 在此基础上给出了一种过给定曲线的可展曲面族的设计方法, 得到了尺度函数满足的微分方程, 进一步研究了曲线为可展曲面测地线的充要条件.

3 插值 Bézier 测地线的可展曲面拼接

对于一条正则的 m 次 Bézier 曲线 $\mathbf{x}(t)$, 总假设 $\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) \neq 0$. 文献 [21, 22] 给出了过曲线 $\mathbf{x}(t)$ 并以它为测地线的直纹面的参数表示

$$\mathbf{X}(s, t) = \mathbf{x}(t) + s\mathbf{q}(t), \quad (s, t) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad (3.1)$$

其中

$$\mathbf{q}(t) = \alpha(t)\mathbf{x}'(t) + \hat{\alpha}(t)\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t),$$

$\alpha(t)$ 和 $\hat{\alpha}(t)$ 都为多项式. 对任意次数的 Bézier 曲线 $\mathbf{x}(t)$, 有以下引理.

引理 3.1 ^[12] 曲面 (3.1) 是可展曲面的充要条件为

$$-\alpha(t)|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)|^2 + \hat{\alpha}(t)|\mathbf{x}'(t)|^2(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t)) = 0, \quad (3.2)$$

其中 $(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))$ 表示向量 $\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t)$ 的混合积.

特别地, 当 $m = 3$, 设其控制顶点为 $\mathbf{k}_i, i = 0, 1, 2, 3$, 则 $\mathbf{x}'(t)$ 和 $\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)$ 的控制顶点分别为

$$\mathbf{s}_i = 3(\mathbf{k}_{i+1} - \mathbf{k}_i), \quad i = 0, 1, 2 \quad (3.3)$$

和

$$\{\mathbf{c}_i\}_{i=0}^2 = \{2(\mathbf{s}_0 \times \mathbf{s}_1), \mathbf{s}_0 \times \mathbf{s}_2, 2(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2)\}. \quad (3.4)$$

将 $\alpha(t)$ 和 $\hat{\alpha}(t)$ 写成 Bernstein 多项式形式

$$\alpha(t) = \alpha_0(1-t) + \alpha_1 t, \quad \hat{\alpha}(t) = \hat{\alpha}_0(1-t) + \hat{\alpha}_1 t,$$

则有如下定理.

定理 3.1 ^[12] 直纹面 $\mathbf{X}(s, t)$ (3.1) 是可展的当且仅当它满足如下条件:

$$\alpha_0 \mathbf{c}_0 \cdot \mathbf{c}_0 - 4\hat{\alpha}_0(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{s}_0 = 0, \quad (3.5)$$

$$\alpha_1 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_2 - 4\hat{\alpha}_1(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_2 = 0, \quad (3.6)$$

$$\alpha_1 \mathbf{c}_0 \cdot \mathbf{c}_0 + 4\alpha_0 \mathbf{c}_0 \cdot \mathbf{c}_1 - 4\hat{\alpha}_1(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{s}_0 - 16\hat{\alpha}_0(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{s}_1 = 0, \quad (3.7)$$

$$\alpha_0 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_2 + 4\alpha_1 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 - 4\hat{\alpha}_0(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_2 - 16\hat{\alpha}_1(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = 0, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \mathbf{c}_0 \cdot \mathbf{c}_2 + 2\alpha_0 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 + 2\alpha_1 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_1 - 4\hat{\alpha}_1(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{s}_2 \\ & - 8\hat{\alpha}_0(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_1 - 8\hat{\alpha}_0(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} & \alpha_0 \mathbf{c}_0 \cdot \mathbf{c}_2 + 2\alpha_0 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_1 + 2\alpha_1 \mathbf{c}_0 \cdot \mathbf{c}_1 - 4\hat{\alpha}_0(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{s}_2 \\ & - 8\hat{\alpha}_0(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_1 - 8\hat{\alpha}_1(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{s}_1 = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中 $\mathbf{s}_i$ 和 $\mathbf{c}_i$ 由 (3.3) 和 (3.4) 给出.

接下来考虑过 Bézier 测地线的可展曲面之间的 G^1 拼接条件, 并对其进行分类.

假设“给定”的两条曲线 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{y}(t)$ 均为 3 次 Bézier 曲线. 需要强调的是, 本节中, 所谓的“给定”并不是已知两条曲线 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{y}(t)$ 的所有信息, 仅已知这两条曲线 G^1 连续, 而其余信息全是自由的. 为了避免与一般意义下的给定相混淆, 本节用带引号的“给定”. 由 (3.1) 知, 以它们为测地线的直纹面可以分别表示为

$$\mathbf{X}(s, t) = \mathbf{x}(t) + s\{\alpha(t)\mathbf{x}'(t) + \hat{\alpha}(t)\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\} = (1-s)\mathbf{x}(t) + s\mathbf{x}_1(t), \quad (3.11)$$

$$\mathbf{Y}(s, t) = \mathbf{y}(t) + s\{\beta(t)\mathbf{y}'(t) + \hat{\beta}(t)\mathbf{y}'(t) \times \mathbf{y}''(t)\} = (1-s)\mathbf{y}(t) + s\mathbf{y}_1(t), \quad (3.12)$$

其中

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}(t) + \alpha(t)\mathbf{x}'(t) + \hat{\alpha}(t)\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t), \quad \mathbf{y}_1(t) = \mathbf{y}(t) + \beta(t)\mathbf{y}'(t) + \hat{\beta}(t)\mathbf{y}'(t) \times \mathbf{y}''(t),$$

$\alpha(t)$ 和 $\hat{\alpha}(t)$ 为

$$\alpha(t) = \alpha_0(1-t) + \alpha_1 t, \quad \hat{\alpha}(t) = \hat{\alpha}_0(1-t) + \hat{\alpha}_1 t, \quad (3.13)$$

$\beta(t)$ 和 $\hat{\beta}(t)$ 表示为

$$\beta(t) = \beta_0(1-t) + \beta_1 t, \quad \hat{\beta}(t) = \hat{\beta}_0(1-t) + \hat{\beta}_1 t. \quad (3.14)$$

设曲线 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{y}(t)$ 的控制顶点分别为 $\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ 和 $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$, $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{y}_1(t)$ 的控制顶点由 $\mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$ 和 $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ 表示. 根据定理 3.1, 曲面 $\mathbf{Y}(s, t)$ 可展的充要条件为

$$\beta_0 \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_0 - 4\hat{\beta}_0(t_0, t_1, t_2) \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{t}_0 = 0, \quad (3.15)$$

$$\beta_1 \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2 - 4\hat{\beta}_1(t_0, t_1, t_2) \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_2 = 0, \quad (3.16)$$

$$\beta_1 \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_0 + 4\beta_0 \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_1 - 4\hat{\beta}_1(t_0, t_1, t_2) \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{t}_0 - 16\hat{\beta}_0(t_0, t_1, t_2) \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{t}_1 = 0, \quad (3.17)$$

$$\beta_0 \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2 + 4\beta_1 \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 - 4\hat{\beta}_0(t_0, t_1, t_2) \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_2 - 16\hat{\beta}_1(t_0, t_1, t_2) \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 = 0, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} & \beta_1 \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_2 + 2\beta_0 \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 + 2\beta_1 \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 - 4\hat{\beta}_1(t_0, t_1, t_2) \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{t}_2 - 8\hat{\beta}_0(t_0, t_1, t_2) \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_1 \\ & - 8\hat{\beta}_0(t_0, t_1, t_2) \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 = 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} & \beta_0 \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_2 + 2\beta_0 \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 + 2\beta_1 \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_1 - 4\hat{\beta}_0(t_0, t_1, t_2) \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{t}_2 - 8\hat{\beta}_0(t_0, t_1, t_2) \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_1 \\ & - 8\hat{\beta}_1(t_0, t_1, t_2) \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{t}_1 = 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

其中 $\mathbf{t}_i = 3(\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i)$, $\{\mathbf{b}_i\}_{i=0}^2 = \{2(\mathbf{t}_0 \times \mathbf{t}_1), \mathbf{t}_0 \times \mathbf{t}_2, 2(\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2)\}$. 而曲面 $\mathbf{X}(s, t)$ 可展的充要条件是它满足关系式 (3.5)–(3.10). 因此, G^1 拼接两个过测地线的直纹面时, 曲线的控制顶点和多项式 $\alpha(t), \hat{\alpha}(t), \beta(t), \hat{\beta}(t)$ 需要满足的条件为

$$\alpha_0 \mathbf{x}' - \beta_1 \mathbf{y}' = 0, \quad (3.21)$$

$$\hat{\alpha}_0 \mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' - \hat{\beta}_1 \mathbf{y}' \times \mathbf{y}'' = 0, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} & \hat{\beta}_1 \alpha_0 (\mathbf{y}^{12} \times \mathbf{y}') \cdot \mathbf{x}'' + \hat{\beta}_1 \hat{\alpha}_0 (\mathbf{y}^{12} \times \mathbf{y}') \cdot \mathbf{x}^{13} + \hat{\beta}_1 \beta_1 (\mathbf{y}^{12} \times \mathbf{y}'') \cdot \mathbf{x}' \\ & + \hat{\beta}_1^2 (\mathbf{y}^{12} \times \mathbf{y}^{13}) \cdot \mathbf{x}' = 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{y}^{12} \cdot \mathbf{x}^{13} \beta_1^2 \hat{\alpha}_0 + (\mathbf{y}' \times \mathbf{y}^{13}) \cdot \mathbf{x}'' \hat{\beta}_1 \beta_1 \alpha_0 + (\mathbf{y}' \times \mathbf{y}^{13}) \cdot \mathbf{x}^{13} \beta_1 \hat{\beta}_1 \hat{\alpha}_0 \\ & + (\mathbf{y}^{12} \times \mathbf{y}'') \cdot \mathbf{x}'' \hat{\beta}_1 \beta_1 \alpha_0 + (\mathbf{y}^{12} \times \mathbf{y}'') \cdot \mathbf{x}^{13} \hat{\beta}_1 \beta_1 \hat{\alpha}_0 + (\mathbf{y}^{12} \times \mathbf{y}^{13}) \cdot \mathbf{x}'' \hat{\beta}_1^2 \alpha_0\} \\ & + \{\mathbf{y}^{12} \cdot \mathbf{x}^{12} \beta_1^2 (\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_0) + (\mathbf{y}' \times \mathbf{y}^{13}) \cdot \mathbf{x}^{12} \beta_1 \hat{\beta}_1 (\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_0) \\ & + (\mathbf{y}' \times \mathbf{y}^{12}) \cdot \mathbf{x}'' \beta_1 \alpha_0 (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0) + (\mathbf{y}' \times \mathbf{y}^{12}) \cdot \mathbf{x}^{13} \beta_1 \hat{\alpha}_0 (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0) \\ & + (\mathbf{y}^{12} \times \mathbf{y}') \cdot \mathbf{x}'' \hat{\beta}_1 \alpha_0 (1 + \beta_1 - \beta_0) + (\mathbf{y}^{12} \times \mathbf{y}') \cdot \mathbf{x}^{13} \hat{\beta}_1 \hat{\alpha}_0 (1 + \beta_1 - \beta_0) \\ & + (\mathbf{y}^{12} \times \mathbf{y}'') \cdot \mathbf{x}' \hat{\beta}_1 \beta_1 (1 + \alpha_1 - \alpha_0) + (\mathbf{y}^{12} \times \mathbf{y}^{13}) \cdot \mathbf{x}' \hat{\beta}_1^2 (1 + \alpha_1 - \alpha_0)\} = 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

其中 $\mathbf{x}^{12} = \mathbf{x}' \times \mathbf{x}''$, $\mathbf{y}^{12} = \mathbf{y}' \times \mathbf{y}''$, $\mathbf{x}^{13} = \mathbf{x}' \times \mathbf{x}'''$, $\mathbf{y}^{13} = \mathbf{y}' \times \mathbf{y}'''$. 在 (3.24) 中, 若 $\hat{\beta}_1 = 0$, 则它为恒等式, 所以, 总假设 $\hat{\beta}_1 \neq 0$. 由上面的分析知, 曲面 $\mathbf{X}(s, t)$ 和 $\mathbf{Y}(s, t)$ 既可展又在公共母线 $\mathbf{X}(s, 0) = \mathbf{Y}(s, 1)$ 处 G^1 拼接的条件为同时满足方程 (3.5)–(3.10) 和 (3.15)–(3.24). 事实上, 因为 $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$ 和 $\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'', \mathbf{y}' \times \mathbf{y}''$ 都是三维向量, 所以, (3.21) 和 (3.22) 分别对应 3 个方程式. 从而, 曲面 $\mathbf{X}(s, t)$ 和 $\mathbf{Y}(s, t)$ 既可展又在公共母线处 G^1 拼接需要满足 (3.5)–(3.10) 和 (3.15)–(3.24) 共 20 个方程. 又因为曲线 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{y}(t)$ 在连接点处是 G^1 连续的, 故未知数个数 27 个, 所以, 求解过 3 次 Bézier 测地线

的可展曲面的 G^1 拼接问题需要解一个含有 27 个未知数和 20 个方程式的方程组. 在实际应用中, 我们可以预先给定某些未知数, 使得求解简单化, 下面给出相关结论.

定理 3.2^[12] 如果由 (3.12) 定义的曲面 $Y(s, t)$ 可展且曲线 $y(t)$ 为它的测地线, 则有 $\hat{\beta}_0 \neq 0$, $\hat{\beta}_1 \neq 0$.

同理, 对曲面 $X(s, t)$ 有 $\hat{\alpha}_0 \neq 0$, $\hat{\alpha}_1 \neq 0$. 由定理 3.2 知, 在多项式 $\alpha(t), \hat{\alpha}(t), \beta(t), \hat{\beta}(t)$ 的系数中只有 $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ 可能为零. 接下来根据 $\beta_i, \hat{\beta}_i, \alpha_i, \hat{\alpha}_i$ ($i = 0, 1$) 的不同取值将可展曲面进行分类.

情形 1 仅考虑单片的曲面 $Y(s, t)$.

(1) 假设 $\beta_0 = 0$. 此时可得 $\beta_1 = 0$, 并且 $(t_0, t_1, t_2) = 0$, 即曲线 $y(t)$ 是一条平面曲线. 由文献 [11] 知, 对应的曲面 $Y(s, t)$ 是柱面.

(2) 假设 $\beta_1 = 0$. 同 $\beta_0 = 0$, 其对应的曲面 $Y(s, t)$ 也是柱面.

(3) $\beta_0 \neq 0, \beta_1 \neq 0$. 此时可通过解方程 (3.15)–(3.20) 来构造可展曲面 $Y(s, t)$.

情形 2 两片可展曲面 $Y(s, t)$ 和 $X(s, t)$ 的 G^1 拼接.

(1) 假设 $\beta_0 = 0$. 当 $\beta_0 = 0$ 时, 可推得 $\beta_0 = 0, \beta_1 = 0, \alpha_0 = 0, \alpha_1 = 0$, 并且 $(t_0, t_1, t_2) = 0$, $(c_0, c_1, c_2) = 0$. 这时曲线 $y(t)$ 和 $x(t)$ 都是平面曲线, 曲面 $Y(s, t)$ 和 $X(s, t)$ 是满足 G^1 拼接条件的两个柱面.

(2) 假设 $\beta_1 = 0$ 或者 $\alpha_0 = 0$ 或者 $\alpha_1 = 0$. 这三种情形与 $\beta_0 = 0$ 类似, 曲面 $Y(s, t)$ 和 $X(s, t)$ 也是两个柱面的 G^1 拼接.

(3) $\beta_0, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1$ 都不为零. 此情形可通过解方程 (3.15)–(3.24) 来构造两个可展曲面的 G^1 拼接.

例 3.1 单片退化曲面 (对应情形 1 中 $\beta_0 = 0$), 即 $\beta_0 = \beta_1 = 0, (t_0, t_1, t_2) = 0$. 设 3 次 Bézier 曲线 $y_1(t)$ 的控制顶点为 $p_0 = (x_0, y_0, z_0), p_1 = (x_1, y_1, z_1), p_2 = (x_2, y_2, z_2), p_3 = (x_3, y_3, z_3)$. 由于控制顶点共面, 为了简便起见, 不妨令它们在坐标平面 oxy 平面上. 经计算可知, x_i, y_i ($i = 0, \dots, 3$) 和 $\hat{\beta}_j$ ($j = 1, 2$) 可以任意选择. 本例中选取 $p_0 = (0, 0, 0), p_1 = (1, 1, 0), p_2 = (3, 2, 0), p_3 = (5, 0, 0), \hat{\beta}_0 = 1, \hat{\beta}_1 = \frac{1}{2}$. 则曲线 $y_1(t)$ 和对应的柱面 $Y_1(s, t)$ 如图 1 所示.

图 1 平面 3 次 Bézier 曲线及以它为测地线的柱面. (a) 平面 3 次 Bézier 曲线 $y_1(t)$; (b) 平面 3 次 Bézier 曲线及以它为测地线的柱面

例 3.2 本例考虑情形 2 中 $\beta_0, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1$ 均不为零的情形. 设

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= (x_0, y_0, z_0), \quad \mathbf{p}_1 = (x_1, y_1, z_1), \quad \mathbf{p}_2 = (x_2, y_2, z_2), \quad \mathbf{p}_3 = (x_3, y_3, z_3), \\ \mathbf{k}_0 &= (u_0, v_0, w_0), \quad \mathbf{k}_1 = (u_1, v_1, w_1), \quad \mathbf{k}_2 = (u_2, v_2, w_2), \quad \mathbf{k}_3 = (u_3, v_3, w_3) \end{aligned}$$

为 3 次 Bézier 曲线 $\mathbf{y}_1(t)$ 和 $\mathbf{x}_1(t)$ 的控制顶点. 本例考虑非退化情形, 即 $\beta_i, \hat{\beta}_i, \alpha_i, \hat{\alpha}_i$ ($i = 1, 2$) 都不为零. 为了简化计算, 给定

$$\beta_1 = 2\alpha_0, \quad \mathbf{p}_2 = \left(2, \frac{24}{5}, \frac{6}{5}\right), \quad \mathbf{p}_3 = \left(6, \frac{4}{5}, \frac{14}{5}\right).$$

通过解方程 (3.15)–(3.24) 求得

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= \left(-\frac{741625}{124416}, \frac{1373785}{124416}, -\frac{615121}{311040}\right), \\ \mathbf{p}_1 &= \left(-2, \frac{41}{5}, -\frac{2}{5}\right), \\ \mathbf{k}_0 &= \left(6, \frac{4}{5}, \frac{14}{5}\right), \quad \mathbf{k}_1 = \left(14, -\frac{36}{5}, 6\right), \\ \mathbf{k}_2 &= \left(18, -\frac{68}{5}, \frac{38}{5}\right), \\ \mathbf{k}_3 &= \left(\frac{306169}{15552}, \frac{285145}{15552}, \frac{319633}{38880}\right), \end{aligned}$$

且

$$\beta_0 = \frac{3}{2}, \quad \beta_1 = 2, \quad \alpha_0 = 6, \quad \alpha_1 = 8, \quad \hat{\beta}_0 = 1, \quad \hat{\beta}_1 = 2, \quad \hat{\alpha}_0 = 1, \quad \hat{\alpha}_1 = 2.$$

图 2 给出了曲线 $\mathbf{y}_1(t)$ 和 $\mathbf{x}_1(t)$ 以及相应可展曲面 $\mathbf{Y}_1(s, t)$ 和 $\mathbf{X}_1(s, t)$ 的 G^1 拼接.

图 2 G^1 拼接的 3 次 Bézier 曲线及以其为测地线的 G^1 拼接可展曲面. (a) 两条 Bézier 曲线的 G^1 拼接; (b) 对应两个可展曲面的 G^1 拼接

4 插值曲率线的可展曲面构造

4.1 过曲率线的参数曲面族

给定一条曲线 $\mathbf{x}(s)$, 在它的每一点的法线上取单位向量 $\alpha(s)$, 设 $\mathbf{e}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ 和 $\mathbf{b}(s)$ 为曲线 $\mathbf{x}(s)$ 的基本向量, 有以下引理.

引理 4.1 ^[23] 曲线的一族法线构成可展曲面的充要条件是法线上的单位向量 $\alpha(s)$ 满足条件

$$\theta'(s) + \tau(s) = 0, \quad (4.1)$$

其中角 $\theta(s)$ 是沿 $\mathbf{e}(s)$ 相反的方向所看到的、从 $\mathbf{n}(s)$ 到 $\alpha(s)$ 的有向角.

对 (4.1) 进行积分, 可以得到

$$\theta(s) = - \int_{s_0}^s \tau(s) ds + \theta_0, \quad (4.2)$$

其中 θ_0 为常数. 给定一个 θ_0 的值就可以确定一个函数 $\theta(s)$, 也就是确定了构成可展曲面的一族法线. 下面的引理刻画了任何曲面上曲率线的特征.

引理 4.2 ^[23] 曲面上的一条曲线是曲率线当且仅当沿此曲线的曲面的法线形成一可展曲面.

4.1.1 过以弧长为参数的曲率线的曲面族

本节主要给出以给定曲线为曲率线的曲面族构造的相关结果.

给定一条空间曲线 $\mathbf{x} : s \rightarrow \mathbf{x}(s)$, 其中 s 为弧长参数. 利用 Frenet 标架曲面 $\mathbf{X}(s, t) : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ 可以表示为 (参见文献 [20])

$$\mathbf{X}(s, t) = \mathbf{x}(s) + (u(s, t), v(s, t), w(s, t)) \begin{pmatrix} \mathbf{e}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq s \leq L, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.3)$$

其中 $(\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ 为 $\mathbf{x}(s)$ 的基本向量, $u(s, t), v(s, t), w(s, t)$ 均为一阶连续函数. 设沿曲线 $\mathbf{x}(s)$ 的法线形成的曲面为

$$\mathbf{Q}(s, t) = \mathbf{x}(s) + t\mathbf{n}_1(s), \quad (4.4)$$

其中 $\mathbf{n}_1(s) = \mathbf{n}(s) \cos \theta(s) + \mathbf{b}(s) \sin \theta(s)$. 根据引理 4.1, 曲线 $\mathbf{x}(s)$ 为曲面 $\mathbf{X}(s, t)$ 的曲率线的充要条件是曲面 $\mathbf{Q}(s, t)$ 为可展曲面并且法向量 $\mathbf{n}_1(s)$ 与 $\mathbf{N}(s, t)$ 相互平行.

首先, 因为曲线 $\mathbf{x}(s)$ 为曲面 $\mathbf{X}(s, t)$ 的等参线, 所以, 存在参数 $t_0 \in [0, T]$ 使得 $\mathbf{X}(s, t_0) = \mathbf{x}(s)$, $0 \leq s \leq L$, 即

$$u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = 0, \quad 0 \leq t_0 \leq T, \quad 0 \leq s \leq L. \quad (4.5)$$

其次, 根据引理 4.2, 曲线 $\mathbf{x}(s)$ 为曲面 $\mathbf{X}(s, t)$ 的曲率线当且仅当曲线的法向量 $\mathbf{n}_1(s)$ 和曲面的法向量 $\mathbf{N}(s, t_0)$ 相互平行. 经计算,

$$\mathbf{N}(s, t_0) = \phi_1(s, t_0)\mathbf{e}(s) + \phi_2(s, t_0)\mathbf{n}(s) + \phi_3(s, t_0)\mathbf{b}(s),$$

其中

$$\phi_1(s, t_0) = \frac{\partial v(s, t_0)}{\partial s} \frac{\partial w(s, t_0)}{\partial t} - \frac{\partial w(s, t_0)}{\partial s} \frac{\partial v(s, t_0)}{\partial t}, \quad (4.6)$$

$$\phi_2(s, t_0) = -\left(1 - \frac{\partial u(s, t_0)}{\partial s}\right) \frac{\partial w(s, t_0)}{\partial t} + \frac{\partial w(s, t_0)}{\partial s} \frac{\partial u(s, t_0)}{\partial t}, \quad (4.7)$$

$$\phi_3(s, t_0) = \left(1 + \frac{\partial u(s, t_0)}{\partial s}\right) \frac{\partial v(s, t_0)}{\partial t} - \frac{\partial v(s, t_0)}{\partial s} \frac{\partial u(s, t_0)}{\partial t}. \quad (4.8)$$

从而, $\mathbf{n}_1(s) \parallel \mathbf{N}(s, t_0)$, $0 \leq s \leq L$ 当且仅当存在一个函数 $\lambda(s)$ 使得

$$\phi_1(s, t_0) = 0, \quad \phi_2(s, t_0) = \lambda(s) \cos \theta, \quad \phi_3(s, t_0) = \lambda(s) \sin \theta. \quad (4.9)$$

经过上面的分析, 有如下定理.

定理 4.1 ^[17] 给定曲线 $\mathbf{x}(s)$ 是曲面 $\mathbf{X}(s, t)$ 的曲率线的充要条件为

$$\begin{cases} u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = 0, \\ \phi_1(s, t_0) = 0, \quad \phi_2(s, t_0) = \lambda(s) \cos \theta, \quad \phi_3(s, t_0) = \lambda(s) \sin \theta, \end{cases}$$

其中 $0 \leq t_0 \leq T$, $0 \leq s \leq L$, $\theta(s)$ 由 (4.2) 给出, $\lambda(s) \neq 0$. 函数 $\theta(s)$ 和 $\lambda(s)$ 称为控制函数.

由 (4.5) 可知, $\frac{\partial u(s, t_0)}{\partial s} = \frac{\partial v(s, t_0)}{\partial s} = \frac{\partial w(s, t_0)}{\partial s} = 0$, 代入 (4.6)–(4.8), 定理 4.1 可简化为如下的推论.

推论 4.1 ^[17] 曲线 $\mathbf{x}(s)$ 是曲面 $\mathbf{X}(s, t)$ 的曲率线的充要条件为

$$\begin{cases} u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = 0, \\ -\frac{\partial w(s, t_0)}{\partial t} = \lambda(s) \cos \theta, \\ \frac{\partial v(s, t_0)}{\partial t} = \lambda(s) \sin \theta. \end{cases} \quad (4.10)$$

首先, 考虑尺度函数 $u(s, t), v(s, t), w(s, t)$ 为变量分离的函数, 即

$$\begin{cases} u(s, t) = l(s)U(t), \\ v(s, t) = m(s)V(t), \quad 0 \leq s \leq L, \quad 0 \leq t \leq T, \\ w(s, t) = n(s)W(t), \end{cases} \quad (4.11)$$

其中 $l(s), m(s), n(s), U(t), V(t), W(t)$ 都是一阶连续函数, 而且 $l(s), m(s), n(s)$ 不恒为零. 根据定理 4.1, 有如下的推论.

推论 4.2 ^[17] 曲线 $\mathbf{x}(s)$ 为曲面 $\mathbf{X}(s, t)$ 的曲率线当且仅当

$$\begin{cases} U(t_0) = V(t_0) = W(t_0) = 0, \\ m(s)V'(t_0) = \lambda(s) \sin \theta, \\ -n(s)W'(t_0) = \lambda(s) \cos \theta, \end{cases} \quad (4.12)$$

其中 $0 \leq t_0 \leq T$, $0 \leq s \leq L$, $\lambda(s) \neq 0$.

下面根据控制函数 $\theta(s)$ 的值对条件 (4.12) 进行分析.

情形 1 如果曲线 $\mathbf{x}(s)$ 是一条扭曲线, 即 $\tau(s) \neq 0$, 则 $\theta(s)$ 为变量 s 的非常数函数, 这时, 条件 (4.12) 为

$$\begin{cases} U(t_0) = V(t_0) = W(t_0) = 0, \\ V'(t_0) = \frac{\lambda(s)}{m(s)} \sin \theta, \\ W'(t_0) = -\frac{\lambda(s)}{n(s)} \cos \theta. \end{cases} \quad (4.13)$$

情形 2 若曲线 $\mathbf{x}(s)$ 为平面曲线, 即 $\tau(s) = 0$, 对应 $\theta(s)$ 为一常数. 如果 $\sin \theta \neq 0$, 为了简便, 假设 $u(s, t), v(s, t), w(s, t)$ 仅依赖于参数 t , 即 $l(s) = m(s) = n(s) = 1$, 则函数 $\lambda(s)$ 也是一个常数, 通过化简, 条件 (4.12) 可以表示为

$$\begin{cases} U(t_0) = V(t_0) = W(t_0) = 0, \\ V'(t_0) = \lambda \sin \theta, \\ W'(t_0) = -\lambda \cos \theta. \end{cases} \quad (4.14)$$

情形 3 在情形 2 中, 如果 $\sin \theta = 0$, 将它代入 $\mathbf{n}_1(s) = \mathbf{n}(s) \cos \theta + \mathbf{b}(s) \sin \theta$, 有 $\mathbf{n}_1(s) = \pm \mathbf{n}$. 根据曲线 $\mathbf{x}(s)$ 为曲面 $\mathbf{X}(s, t)$ 测地线的充要条件知, 若 $\sin \theta = 0$, 曲线 $\mathbf{x}(s)$ 不仅为曲面 $\mathbf{X}(s, t)$ 的曲率线同时也为测地线. 这种情形下, 条件 (4.12) 有更简单的形式

$$\begin{cases} U(t_0) = V(t_0) = W(t_0) = 0, \\ V'(t_0) = 0, \\ W'(t_0) = \pm \lambda. \end{cases} \quad (4.15)$$

其次, 考虑尺度函数 $u(s, t), v(s, t), w(s, t)$ 为一般函数的情形, 若 $u(s, t), v(s, t), w(s, t)$ 为如下形式:

$$u(s, t) = \sum_{k=1}^p a_{1k} l(s)^k U(t)^k, \quad v(s, t) = \sum_{k=1}^p a_{2k} m(s)^k V(t)^k, \quad w(s, t) = \sum_{k=1}^p a_{3k} n(s)^k W(t)^k.$$

根据 (4.10), 可以推出曲线 $\mathbf{x}(s)$ 为曲面 $\mathbf{X}(s, t)$ 的曲率线的条件为 (参见文献 [18])

$$\begin{cases} U(t_0) = V(t_0) = W(t_0) = 0, \\ a_{21} m(s) V'(t_0) = \lambda(s) \sin \theta, \\ a_{31} n(s) W'(t_0) = -\lambda(s) \cos \theta, \end{cases} \quad (4.16)$$

其中 $L_1 \leq s \leq L_2, T_1 \leq t \leq T_2, \lambda(s) \neq 0$. 我们根据 $\theta(s)$ 的不同取值分析条件 (4.16).

情形 1 $\mathbf{x}(s)$ 是一条扭曲线, 即 $\tau(s) \neq 0$, 则 $\theta(s)$ 为变量 s 的非常数函数, 条件 (4.16) 可以表示为

$$\begin{cases} U(t_0) = V(t_0) = W(t_0) = 0, \\ V'(t_0) = \frac{\lambda(s) \sin \theta}{a_{21} m(s)} = \mu_1, \\ W'(t_0) = -\frac{\lambda(s) \cos \theta}{a_{31} n(s)} = \mu_2. \end{cases} \quad (4.17)$$

我们可以选择 $\lambda(s) = \mu_1 a_{21} \lambda_1(s)$, $m(s) = \lambda_1(s) \sin(\theta)$, $n(s) = -\frac{\mu_1 a_{21} \lambda_1(s) \cos \theta}{\mu_2 a_{31}}$.

情形 2 若曲线 $\mathbf{x}(s)$ 为平面曲线, 即 $\tau(s) = 0$, 对应 $\theta(s)$ 为一常数. 如果 $\sin \theta = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, 即 $\sin \theta = \pm 1$, $\cos \theta = 0$. 由 Frenet 公式知, $\mathbf{b}'(s) = -\tau \mathbf{n}(s) = 0$, 即 $\mathbf{b}(s)$ 为常向量. 从而, $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n} \cos \theta + \mathbf{b} \sin \theta = \pm \mathbf{b}$ 也是常向量. 这种情形下, 过 $\mathbf{x}(s)$ 的曲面 $\mathbf{X}(s, t)$ 为该曲线的密切平面. 若 $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, 条件与情形 1 相同.

情形 3 若 $\tau = 0$ 且 $\sin \theta = 0$, 则 $\mathbf{n}_1(s) = \mathbf{n} \cos \theta + \mathbf{b} \sin \theta = \pm \mathbf{n}$. 根据曲线为曲面的测地线的充要条件知, 曲线 $\mathbf{x}(s)$ 不仅为曲面 $\mathbf{X}(s, t)$ 的曲率线也是测地线. 这时, 条件 (4.16) 可以表示为

$$\begin{cases} U(t_0) = V(t_0) = W(t_0) = 0, \\ a_{21} = 0 \text{ 或 } m(s) = 0 \text{ 或 } V'(t_0) = 0, \\ W'(t_0) = \pm \frac{\lambda(s)}{a_{31}n(s)} = \mu. \end{cases} \quad (4.18)$$

取 $\lambda(s) = \mu a_{31} \lambda_1(s)$, $n(s) = \lambda_1(s)$.

若 $u(s, t), v(s, t), w(s, t)$ 可以表示为

$$u(s, t) = f\left(\sum_{k=1}^p a_{1k} l(s)^k U(t)^k\right), \quad v(s, t) = g\left(\sum_{k=1}^p a_{2k} m(s)^k V(t)^k\right), \quad w(s, t) = h\left(\sum_{k=1}^p a_{3k} n(s)^k W(t)^k\right).$$

经过简单计算, 条件 (4.16) 可以表示为 (参见文献 [18])

$$\begin{cases} U(t_0) = V(t_0) = W(t_0) = 0 \text{ 且 } f(0) = g(0) = h(0) = 0, \\ g'(0) a_{21} m(s) V'(t_0) = \lambda(s) \sin \theta, \\ h'(0) a_{31} n(s) W'(t_0) = -\lambda(s) \cos \theta. \end{cases} \quad (4.19)$$

与上面的分析类似, 我们也把条件 (4.19) 分为三种情形.

情形 1 曲线 $\mathbf{x}(s)$ 是扭曲线. 条件 (4.19) 可以表示为

$$\begin{cases} U(t_0) = V(t_0) = W(t_0) = 0 \text{ 且 } f(0) = g(0) = h(0) = 0, \\ V'(t_0) = \frac{\lambda(s) \sin \theta}{g'(0) a_{21} m(s)} = \mu_1, \\ W'(t_0) = -\frac{\lambda(s) \cos \theta}{h'(0) a_{31} n(s)} = \mu_2. \end{cases} \quad (4.20)$$

我们取 $\lambda(s) = \mu_1 g'(0) a_{21} \lambda_1(s)$, $m(s) = \lambda_1(s) \sin(\theta)$, $n(s) = -\frac{g'(0) \mu_1 a_{21} \lambda_1(s) \cos \theta}{h'(0) \mu_2 a_{31}}$.

情形 2 曲线为平面曲线且 $\theta = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, 过曲线 $\mathbf{x}(s)$ 的曲面为该曲线的密切平面. 若 $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, 条件与情形 1 相同.

情形 3 若 $\tau = 0$ 且 $\sin \theta = 0$, 曲线 $\mathbf{x}(s)$ 不仅为曲面 $\mathbf{X}(s, t)$ 的曲率线也为测地线. 相应的条件为

$$\begin{cases} U(t_0) = V(t_0) = W(t_0) = 0 \text{ 且 } f(0) = g(0) = h(0) = 0, \\ g'(0) = 0 \text{ 或 } a_{21} = 0 \text{ 或 } m(s) = 0 \text{ 或 } V'(t_0) = 0, \\ W'(t_0) = \pm \frac{\lambda(s)}{h'(0) a_{31} n(s)} = \mu. \end{cases} \quad (4.21)$$

我们取 $\lambda(s) = h'(0) \mu a_{31} \lambda_1(s)$, $n(s) = \lambda_1(s)$.

4.1.2 过任意参数的曲率线的曲面族

假设一条空间曲线为

$$C: \mathbf{R}(r) = (X(r), Y(r), Z(r)), \quad 0 \leq r \leq H,$$

由它生成的曲面可以表示为

$$\mathbf{X}(r, t) = \mathbf{R}(r) + (u(r, t), v(r, t), w(r, t)) \begin{pmatrix} \mathbf{e}(r) \\ \mathbf{n}(r) \\ \mathbf{b}(r) \end{pmatrix}.$$

经计算可以得到相应的 $\phi_i(r, t)$, $i = 1, 2, 3$ 以及相关的结论.

定理 4.2 ^[17] 曲线 $\mathbf{R}(r)$ 为曲面 $\mathbf{X}(r, t)$ 的曲率线的充要条件为

$$\begin{cases} u(r, t_0) = v(r, t_0) = w(r, t_0) = 0, \\ \phi_1(r, t_0) = 0, \quad \phi_2(r, t_0) = \lambda(r) \cos \theta, \quad \phi_3(r, t_0) = \lambda(r) \sin \theta, \end{cases}$$

其中

$$0 \leq t_0 \leq T, \quad 0 \leq r \leq H, \quad \lambda(r) \neq 0, \quad \theta(r) = - \int_{r_0}^r \tau(r) |\mathbf{R}'(r)| dr + \theta_0, \quad \theta_0 = \theta(r_0).$$

推论 4.3 ^[17] 曲线 $\mathbf{R}(r)$ 为曲面 $\mathbf{X}(r, t)$ 的曲率线当且仅当

$$\begin{cases} U(t_0) = V(t_0) = W(t_0) = 0, \\ m(r) |\mathbf{R}'(r)| V'(t_0) = \lambda(r) \sin \theta, \\ -n(r) |\mathbf{R}'(r)| W'(t_0) = \lambda(r) \cos \theta, \end{cases} \quad (4.22)$$

其中

$$0 \leq t_0 \leq T, \quad 0 \leq r \leq H, \quad \lambda(r) \neq 0, \quad \theta(r) = - \int_{r_0}^r \tau(r) |\mathbf{R}'(r)| dr + \theta_0, \quad \theta_0 = \theta(r_0).$$

与上节类似, 我们将条件 (4.22) 也分成三类.

情形 1 $\theta(r)$ 是变量 r 的非常数函数, 条件 (4.22) 可以表示为

$$\begin{cases} U(t_0) = V(t_0) = W(t_0) = 0, \\ V'(t_0) = \frac{\lambda(r)}{m(r) |\mathbf{R}'(r)|} \sin \theta, \\ W'(t_0) = - \frac{\lambda(r)}{n(r) |\mathbf{R}'(r)|} \cos \theta. \end{cases} \quad (4.23)$$

情形 2 $\theta(r)$ 是常数, 但是 $\sin \theta \neq 0$. 假设 $l(s) = m(s) = n(s) = 1$, 则 $\frac{\lambda(r)}{|\mathbf{R}'(r)|}$ 为非零常数, 记为 μ , 从而, $\lambda(r) = \mu |\mathbf{R}'(r)|$. 条件 (4.22) 可以化简为

$$\begin{cases} U(t_0) = V(t_0) = W(t_0) = 0, \\ V'(t_0) = \mu \sin \theta, \\ W'(t_0) = -\mu \cos \theta. \end{cases} \quad (4.24)$$

情形 3 $\theta(r) = 0$ 并且 $\sin \theta = 0$. 这种情形下, 曲线 $\mathbf{R}(r)$ 不仅是曲面 $\mathbf{X}(r, t)$ 的曲率线也是测地线. 条件 (4.22) 有更简单的形式

$$\begin{cases} U(t_0) = V(t_0) = W(t_0) = 0, \\ V'(t_0) = 0, \\ W'(t_0) = -\frac{\lambda(r)}{n(r)|\mathbf{R}'(r)|}. \end{cases} \quad (4.25)$$

经过上面的分析可以看出, 函数 $m(r), n(r), \lambda(r)$ 和 $\theta(r)$ 可以看成控制函数用来控制曲面的形状.

例 4.1 本例中构造一族曲面以圆柱螺线为公共的曲率线. 给定圆柱螺线

$$\mathbf{R}(r) = (a \cos r, a \sin r, br), \quad a > 0, \quad b \neq 0, \quad 0 \leq r \leq 2\pi.$$

经计算可得

$$\mathbf{e}(r) = \frac{(-a \sin r, a \cos r, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \mathbf{n}(r) = (-\cos r, -\sin r, 0), \quad \mathbf{b}(r) = \frac{(b \sin r, -b \cos r, a)}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$|\mathbf{R}'(r)| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tau = \frac{b}{a^2 + b^2}$, 因此, $\theta(r) = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}r + \theta_0$. 如果 $\theta_0 = 0$, 则 $\theta(r) = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}r$. 我们选择

$$U(t) = \alpha t, \quad V(t) = \frac{\lambda(r) \sin \theta}{m(r)|\mathbf{R}'|}t, \quad W(t) = -\frac{\lambda(r) \cos \theta}{n(r)|\mathbf{R}'|}t, \quad \lambda \neq 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

由 (4.3), 可以得到曲面

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(r, t; \alpha, \lambda) = & \left(a \cos r - \frac{a\alpha t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin r - \frac{t\lambda(r) \sin \theta}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos r - \frac{bt\lambda(r) \cos \theta}{a^2 + b^2} \sin r, \right. \\ & a \sin r + \frac{a\alpha t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos r - \frac{t\lambda(r) \sin \theta}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin r + \frac{bt\lambda(r) \cos \theta}{a^2 + b^2} \cos r, \\ & \left. br + \frac{b\alpha t}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{at\lambda(r) \cos \theta}{a^2 + b^2} \right). \end{aligned}$$

这里取 $a = 2, b = 1$. 对 $\alpha = 1, \lambda = -1$ 和 $\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{4}, \lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, 相应的曲面分别由图 3(a) 和 3(b) 给出.

图 3 以圆柱螺线为曲率线的曲面. (a) 曲面 $\mathbf{X}(r, t; 1, -1)$; (b) 曲面 $\mathbf{X}(r, t; -\frac{\sqrt{5}}{4}, -\frac{\sqrt{5}}{2})$

4.2 过曲率线的可展曲面设计

本节给出以给定曲线为曲率线的可展曲面的构造性定理.

定理 4.3 ^[13] 给定一条空间曲线 $\mathbf{x}(s)$, 存在可展曲面

$$\mathbf{X}(s, t) = \mathbf{x}(s) + t\mathbf{m}(s), \quad (4.26)$$

以 $\mathbf{x}(s)$ 为曲率线, 其中 $\mathbf{m}(s) = \sin \theta \mathbf{n}(s) - \cos \theta \mathbf{b}(s)$.

定理 4.3 不仅证明了过曲率线的可展曲面的存在性, 也给出了曲面的具体表达式 (4.26). 根据可展曲面的三种类型, 给出由 (4.26) 定义的可展曲面分别为柱面、锥面和空间曲线的切线面的条件.

定理 4.4 ^[13] 可展曲面 (4.26) 是柱面当且仅当 $\sin \theta = 0$.

定理 4.5 ^[13] 可展曲面 (4.26) 是锥面的充要条件是 $k \sin \theta = k_0 \sin \theta_0$, 其中 $\theta_0 = \theta(0)$, $k_0 = k(0)$.

定理 4.5 中, $\kappa \sin \theta$ 是一个常数. 特别地, 如果 θ 是常数, 则 κ 也为常数. 又有 $\tau = -\theta' = 0$, 即曲线为平面曲线. 相似地, 如果 κ 为常数, 也有 $\tau = 0$ 和 θ 为常数. 这种情形下曲线为圆弧曲线.

定理 4.6 ^[13] 可展曲面 (4.26) 是空间曲线的切线面的充要条件为 $k \sin \theta \neq k_0 \sin \theta_0$, 其中 $\theta_0 = \theta(0)$, $k_0 = k(0)$.

当曲线 $\mathbf{R}(r)$ 的参数为任意参数时, 可以构造相应的以 $\mathbf{R}(r)$ 为曲率线的可展曲面 $\mathbf{X}(r, t)$, 其参数表示为

$$\mathbf{X}(r, t) = \mathbf{R}(r) + t\mathbf{m}(r),$$

其中 $\mathbf{m}(r) = \mathbf{n}(r) \cos \theta(r) + \mathbf{b}(r) \sin \theta(r)$, $\theta(r) = -|\mathbf{R}'(r)| \int_{r_0}^r \tau(r) dr + \theta_0$.

例 4.2 曲线 $\mathbf{R}(r)$ 是一条 3 次空间 Bézier 曲线, 它的控制顶点为 $\mathbf{p}_0 = (0, 0, 0)$, $\mathbf{p}_1 = (-5, 14, -2)$, $\mathbf{p}_2 = (-7, 24, -2)$, $\mathbf{p}_3 = (-12, 38, 0)$. 则曲线 $\mathbf{R}(r)$ 可以表示为

$$\mathbf{R}(r) = \mathbf{p}_0 Z_0(r) + \mathbf{p}_1 Z_1(r) + \mathbf{p}_2 Z_2(r) + \mathbf{p}_3 Z_3(r), \quad 0 \leq r \leq 1,$$

其中

$$Z_0(r) = (1-r)^3, \quad Z_1(r) = 3r(1-r)^2, \quad Z_2(r) = 3r^2(1-r), \quad Z_3(r) = r^3$$

为曲线 $\mathbf{R}(r)$ 的混合函数. 经计算 $\tau(r) = -\frac{22}{25(2r^2-2r+3)^2}$, 即 $\theta(r) = \frac{22\sqrt{5}}{25} \arctan\left(\frac{\sqrt{5}(10r-5)}{25}\right)$, 此时可展曲面 $\mathbf{X}(r, t)$ 为切线面, 如图 4 所示.

图 4 以空间 3 次 Bézier 曲线为曲率线的可展曲面

5 对未来工作的展望

本文主要对可展曲面的研究现状以及作者的一些相关工作进行介绍. 我们目前的工作主要偏重于理论, 下一步我们将尝试把理论应用于生产实践, 如应用到服装、鞋帽的制作、飞机机翼和船体外形设计等. 第 3 节得到了关于 Bézier 控制顶点的非线性方程组, 其求解比较困难, 本文采用预先给定部分控制顶点简化计算, 接下来尝试寻求有效的求解方法或者从线几何的角度避开非线性的问题. 另外, 由于可展曲面、近似可展曲面与逼近论、微分几何、线几何、最优化等领域密切相关, 与之伴随的会产生很多有意义的课题. 我们知道隐式曲面具有参数曲面不具有的优点, 那么构造具有一定几何约束的隐式可展曲面在曲面造型中也是非常重要的. 进一步, 我们想提出一种插值测地线、曲率线的低次代数可展 (近似可展) 曲面的构造方法, 并对这类曲面的几何光滑拼接条件进行研究, 相应地得到分片的代数可展曲面; 对于高次插值特殊曲线的代数曲面, 提出一种近似可展的度量方法, 并研究多片插值特殊曲线的低次代数可展曲面拼接问题; 对于多片曲面的拼接情形, 结合 B 网方法和光滑余因子方法 (参见文献 [24]), 建立曲面系数满足的关系及公共点处的协调方程, 进而得到拼接条件.

致谢 非常感谢主编和审稿人提出的宝贵意见, 这使本文的陈述及安排更加合理.

参考文献

- 1 Aumann G. Interpolation with developable Bézier patches. *Comput Aided Geom Design*, 1991, 8: 409–420
- 2 Chu C H, Sequin C H. Developable Bézier patches: Properties and design. *Comput Aided Design*, 2002, 34: 511–527
- 3 叶正麟, 孟雅琴, 刘克轩. 可展 Bézier 曲面. *数值计算与计算机应用*, 1997, 18: 81–86
- 4 Schneider M. Interpolation with developable strip-surfaces consisting of cylinders and cones. In: *Mathematical Methods for Curves and Surfaces II*. Nashville: Vanderbilt University Press, 1998, 437–444
- 5 Lang J, Röschel O. Developable $(1, n)$ -Bézier surfaces. *Comput Aided Geom Design*, 1992, 9: 291–298
- 6 Hoschek J. Dual Bézier curves and surfaces. In: Barnhill R E, Boehm W, eds. *Surfaces in Computer Aided Geometric Design*. Amsterdam: North Holland, 1983, 147–156
- 7 Bodduluri R M C, Ravani B. Design of developable surfaces using duality between plane and point geometries. *Comput Aided Design*, 1993, 25: 621–632
- 8 Pottmann H, Farin G. Developable rational Bézier and B-spline surfaces. *Comput Aided Geom Design*, 1995, 12: 513–531
- 9 Xu G, Wang G Z. Quintic parametric polynomial minimal surfaces and their properties. *Differential Geom Appl*, 2004, 28: 697–704
- 10 Xu G, Wang G Z. Parametric polynomial minimal surfaces of degree six with isothermal parameter. In: *Advances in Geometric Modeling and Processing*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 4975. Berlin: Springer-Verlag, 2008, 329–343
- 11 Zhao H Y, Wang G J. A new method for designing a developable surface utilizing the surface pencil through a given curve. *Prog Nat Sci*, 2008, 18: 105–110
- 12 Li C Y, Wang R H, Zhu C G. Designing and G^1 connection of developable surfaces through Bézier geodesics. *Appl Math Comput*, 2011, 218: 3199–3208
- 13 Li C Y, Wang R H, Zhu C G. An approach for designing a developable surface through a given line of curvature. *Comput Aided Design*, 2013, 45: 621–627
- 14 Leopoldseder S, Pottmann H. Approximation of developable surfaces with cone spline surfaces. *Comput Aided Design*, 1998, 30: 571–582
- 15 Pottmann H, Wallner J. Approximation algorithms for developable surfaces. *Comput Aided Geom Design*, 1999, 16: 539–556
- 16 do Carmo M. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1976
- 17 Li C Y, Wang R H, Zhu C G. Parametric representation of a surface pencil with a common spatial line of curvature. *Comput Aided Design*, 2011, 43: 1110–1117
- 18 Li C Y, Wang R H, Zhu C G. A generalization of surface family with a common line of curvature. *Appl Math Comput*,

- 2013, 219: 9500–9507
- 19 Peternell M. Developable surface fitting to point clouds. *Comput Aided Geom Design*, 2004, 21: 785–803
- 20 Wang G J, Tang K, Tai C H. Parametric representation of a surface pencil with a common spatial geodesic. *Comput Aided Design*, 2004, 36: 447–459
- 21 Sánchez-Reyes J, Dorado R. Constrained design of polynomial surface from geodesic curves. *Comput Aided Design*, 2008, 40: 49–55
- 22 Paluszny M. Cubic polynomial patches through geodesics. *Comput Aided Design*, 2008, 40: 56–61
- 23 梅向明, 黄敬之. 微分几何. 北京: 高等教育出版社, 2003
- 24 Wang R H, Shi X Q, Luo Z X, et al. *Multivariate Spline Functions and Their Applications*. Beijing: Science Press; New York: Kluwer Academic Publishers, 1994

Researches on developable surface modeling by interpolating special curves

LI CaiYun, ZHU ChunGang & WANG RenHong

Abstract The developable surface is always a hot issue in computer aided geometric design. It has very nice application prospect in curves and surfaces modeling. Moreover, it is closely related with approximation theory, optimization, differential geometry and line geometry. Therefore, it produces many beautiful mathematical results. This article mainly sums up some basic results of developable surfaces and the researches which the authors have done in recent years. At the same time, we describe the prospect for the future. The main work mainly includes the construction and blending of the developable surface owning certain geometric constraints.

Keywords developable surface, geodesic, line of curvature

MSC(2010) 41A15, 65D17, 68U07

doi: 10.1360/N012015-00039