正常返 Markov 链的几乎处处中心极限定理

吴群英

桂林理工大学理学院, 桂林 541004
E-mail: wqy666@glut.edu.cn

收稿日期: 2015-01-29; 接受日期: 2015-04-08
国家自然科学基金 (批准号: 11361019) 和广西自然科学基金 (批准号: 2013GXNSFDA019001) 资助项目

摘要 本文考虑不可约正常返 Markov 链, 证明其函数的部分和的几乎处处中心极限定理, 把独立同分布 (independent and identically distributed, i.i.d.) 随机变量序列的几乎处处中心极限定理推广到 Markov 链, 且扩大了使定理成立的权重.

关键词 Markov 链 几乎处处中心极限定理 权重

MSC (2010) 主题分类 60F15, 60F05

1 引言及结论

Brosamler^[1] 和 Schatte^[2] 于 1988 年分别独立地获得了如下几乎处处中心极限定理: 设 $\{X_n; n \geq 1\}$ 是独立同分布 (i.i.d.) 随机变量序列, $\mathbb{E}X_1 = 0$, $\text{Var}X_1^2 = \sigma^2 > 0$, 则对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} I \left\{ \frac{S_k}{\sigma \sqrt{k}} \leq x \right\} = \Phi(x), \quad \text{a.s.}, \quad (1.1)$$

其中, 部分和 $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$, I 表示示性函数, $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数. 关系式 (1.1) 是对序列 $I\{\frac{S_k}{\sigma \sqrt{k}} \leq x\}$ 的对数平均, 由文献 [2, 定理 1] 知, 这个序列的算术平均并不几乎处处收敛到 $\Phi(x)$, 即对任意的 $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I \left\{ \frac{S_k}{\sigma \sqrt{k}} \leq x \right\} = \Phi(x), \quad \text{a.s.}$$

不成立.

由此, 人们自然会问是否存在不同的平均法使几乎处处中心极限定理成立, 即是否存在权序列 $\{d_k \neq \frac{1}{k}; k \geq 1\}$, 使得对任意的 $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n d_k I \left\{ \frac{S_k}{\sigma \sqrt{k}} \leq x \right\} = \Phi(x), \quad \text{a.s.} \quad (1.2)$$

成立, 其中, $D_n = \sum_{k=1}^n d_k$.

由文献 [3] 的可和技术表明, 如果 (1.2) 对权重 $\{d_k; k \geq 1\}$ 成立, 则 (1.2) 对任意满足 $0 \leq d_k^* \leq d_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^* = \infty$ 的权重 $\{d_k^*; k \geq 1\}$ 仍成立. 因此, 人们自然期望找到更大的权重使得 (1.2) 成立, 以使

结论 (1.2) 更强. 寻找使 (1.2) 成立的最优权重是很有意义的, 因此, 自文献 [1, 2] 研究获得几乎处处中心极限定理的二十多年以来, 许多概率统计学者对扩大 (1.2) 的权重做了大量的研究, 取得了许多成果, 如文献 [4–8].

几乎处处中心极限定理的另一个扩展方向是把随机变量序列的部分和扩展到其他各种形式, 这方面也取得了许多成果, 例如, 文献 [9–14] 获得了多类部分和函数的几乎处处中心极限定理; 文献 [15–20] 获得了最大值及其函数的几乎处处中心极限定理; 文献 [21–25] 获得了自正则版本的几乎处处中心极限定理; 2012 年, Zhuang 等人^[26] 研究获得了不可约正常返 Markov 链部分和的几乎处处中心极限定理. Markov 链的定义如下.

定义 1 设离散时间随机序列 $\{X_n; n \geq 0\}$ 的状态空间 S 是可数的, 如果对任意非负整数 n 和任意 $i_0, i_1, \dots, i_{n+1} \in S$ 有

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n), \quad (1.3)$$

则称 $\{X_n; n \geq 0\}$ 为 Markov 链.

(1.3) 表示的性质称为 Markov 性, 它是 Markov 链的本质所在, 即在给定“过去”和“现在”状态的条件下, 要确定“将来”的状态, 只需要知道“现在”的状态就够了. 这里的“现在”时刻是一个固定的数. 如果给定的“现在”时刻由停时随机变量代替, Markov 性仍成立, 则称为强 Markov 性. 每一个 Markov 链都具有强 Markov 性.

Markov 链最初由数学家 Markov 于 1906 年研究而得名, 它是一类应用非常广泛的具有条件无后效性的随机过程, 至今它的理论已发展得较系统和深入, 它在自然科学、工程技术和经济管理各领域中都有广泛的应用. 有关 Markov 链的详细概念和性质可参见专著 [27]. 本文将在文献 [26] 的基础上, 进一步研究 Markov 链的几乎处处中心极限定理, 所获结果推广了文献 [26] 的相应结果.

下面恒设 $\{X_n; n \geq 0\}$ 是不可约正常返 Markov 链, S 为其状态空间, $\tau_j^{(r)}$, $r = 0, 1, \dots$ 表示此 Markov 链第 r 次到达状态 j 的时间, 且 $\tau_j^{(0)} = 0$. 设 f 是状态空间 S 上的实值函数, 定义 X_k 的函数 $f(X_k)$ 的和 $S_n = S_n(f) = \sum_{k=1}^n f(X_k)$, $n \geq 1$. 记

$$Z_r = \sum_{k=\tau_j^{(r)}+1}^{\tau_j^{(r+1)}} f(X_k), \quad r = 0, 1, \dots$$

为在第 r 个时间段 $(\tau_j^{(r)}, \tau_j^{(r+1)}]$ 此 Markov 链对和 S_n 的贡献. 由 Markov 性, 无论过程 $\{X_n; n \geq 0\}$ 的初始分布如何, $\{Z_r; r \geq 0\}$ 都是 i.i.d. 随机变量序列. 对于不可约正常返 Markov 链, $\mathbb{E}_j(\tau_j^{(1)}) = \mathbb{E}_j(\tau_j^{(2)} - \tau_j^{(1)})$ 是一个重要的量, 它表示该 Markov 链由状态 j 出发返回状态 j 的平均时间, 记 $\pi_j = (\mathbb{E}_j(\tau_j^{(1)}))^{-1}$, 由文献 [28] 知, $\pi = \{\pi_j; j \in S\}$ 是不变分布, 且在 $\mathbb{E}_\pi(|f(X_0)|) = \sum_{i \in S} \pi_i |f(i)| < \infty$ 的条件下, 对任意 $k \geq 0$, 有 $\mathbb{E}_\pi(f(X_k)) = \sum_{i \in S} \pi_i f(i)$ 的值与 k 无关. 用符号 $a_n \sim b_n$ 表示 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, c 表示一般的正常数, 在不同的地方可表示不同的值.

本文的结果如下.

定理 1 设 $\{X_n; n \geq 0\}$ 是不可约正常返 Markov 链, f 是状态空间 S 上的实值函数, 如果

$$\mathbb{E}_\pi(|f(X_0)|) = \sum_{i \in S} \pi_i |f(i)| < \infty, \quad (1.4)$$

以及对 $j \in S$,

$$\mathbb{E}_j(Z_0 - \mathbb{E}_j Z_0)^2 = \sigma^2 < \infty. \quad (1.5)$$

记

$$d_k = \frac{L(k)}{k}, \quad D_n = \sum_{k=1}^n d_k, \quad (1.6)$$

其中, $L(\cdot) > 0$ 是一个在无穷远点的慢变化函数, 且存在常数 $c > 0$ 和 $\theta > 0$ 使得

$$\max_{1 \leq k \leq n} L(k) \leq c \frac{D_n}{(\ln D_n)^{1+\theta}}, \quad (1.7)$$

则对任意分布函数 H , 且 x 是 H 的连续点, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n d_k I \left\{ \frac{S_k - \mathbb{E}_\pi S_k}{\sigma \sqrt{k \pi_j}} \leq x \right\} = H(x), \quad \text{a.s.} \quad (1.8)$$

等价于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n d_k P \left(\frac{S_k - \mathbb{E}_\pi S_k}{\sigma \sqrt{k \pi_j}} \leq x \right) = H(x). \quad (1.9)$$

定理 2 在定理 1 的条件下, 对任意 $j \in S$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n d_k I \left\{ \frac{S_k - \mathbb{E}_\pi S_k}{\sigma \sqrt{k \pi_j}} \leq x \right\} = \Phi(x), \quad \text{a.s.} \quad (1.10)$$

特别地, 在定理 1 和 2 中取 $L(k) = \exp(\ln^\alpha k)$, $0 \leq \alpha < 1/2$, 由文献 [25] 有

$$\max_{1 \leq k \leq n} L(k) = \exp(\ln^\alpha n) \sim \frac{D_n}{(\ln D_n)^{(1-\alpha)/\alpha}}.$$

因为 $\alpha < 1/2$ 等价于 $(1-\alpha)/\alpha > 1$, 因此, 条件 (1.7) 成立. 故我们有下面的推论.

推论 1 定理 1 和 2 对权重 $d_k = (\exp(\ln^\alpha k))/k$, $0 \leq \alpha < 1/2$ 成立.

注 1 文献 [26] 的结论是本文定理 2 取 $L(k) \equiv 1$ 或推论 1 取 $\alpha = 0$ 的特殊情形, 因此, 本文结果推广了文献 [26] 的相应结果.

注 2 在定理 1 和 2 中取不同的 $L(\cdot)$, 可得到各种不同形式的结果, 因此, 定理 1 和 2 是一类非常广泛的结果.

2 证明

为证明本文定理, 首先证明下引理.

引理 1 设 $\{\xi_n; n \geq 1\}$ 是一致有界的随机变量序列, 如果存在常数 $c > 0$ 和 $\delta > 0$ 使得对任意 $1 \leq k < l$, 有

$$|\mathbb{E} \xi_k \xi_l| \leq c \left(\frac{k}{l} \right)^\delta, \quad (2.1)$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n d_k \xi_k = 0, \quad \text{a.s.},$$

其中, d_k 和 D_n 由 (1.6) 和 (1.7) 定义.

证明 由于 $L(\cdot)$ 是慢变化函数, 根据慢变化函数的性质有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{L^2(k)}{k^2} = c < \infty, \quad \sum_{k=1}^l \frac{L(k)}{k^{1-\delta}} \sim \frac{1}{\delta} L(l) l^{\delta}.$$

因此, 结合引理 1 的假设知, 存在常数 c 使得对任意的 $k \geq 1$, $\mathbb{E}\xi_k^2 \leq c$, 以及条件 (2.1)、(1.6) 和 (1.7), 我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n d_k \xi_k \right)^2 &\leq \sum_{k=1}^n d_k^2 \mathbb{E}\xi_k^2 + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} d_k d_l |\mathbb{E}\xi_k \xi_l| \\ &\leq c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L^2(k)}{k^2} + c \sum_{l=1}^n \frac{L(l)}{l^{1+\delta}} \sum_{k=1}^l \frac{L(k)}{k^{1-\delta}} \\ &\leq c \sum_{l=1}^n \frac{L^2(l)}{l} \leq c \max_{1 \leq l \leq n} L(l) \sum_{l=1}^n \frac{L(l)}{l} \\ &\leq c \frac{D_n^2}{(\ln D_n)^{1+\theta}}. \end{aligned}$$

由此, 记 $T_n = \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n d_k \xi_k$, 则有

$$\mathbb{E}T_n^2 \leq \frac{c}{(\ln D_n)^{1+\theta}}.$$

据此, 类似于文献 [25, 引理 2.2] 后部分的证明得 $T_n \rightarrow 0$, a.s. 引理 2.1 证毕. $\square$

定理 1 的证明 记 $\mathcal{L} = \{g; g \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 上的有界 Lipschitz 1 函数}\}$, 由文献 [29, 定理 7.1] 和 [30, 第 2 节], 对所有 $g \in \mathcal{L}$, 有 (1.8) 和 (1.9) 分别等价于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n d_k g \left(\frac{S_k - \mathbb{E}_{\pi} S_k}{\sigma \sqrt{k \pi_j}} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dH(x), \quad \text{a.s.}$$

和

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n d_k \mathbb{E}_{\pi} g \left(\frac{S_k - \mathbb{E}_{\pi} S_k}{\sigma \sqrt{k \pi_j}} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dH(x).$$

对任意 $g \in \mathcal{L}$, $j \in S$, 记

$$\xi_k = g \left(\frac{S_k - \mathbb{E}_{\pi} S_k}{\sigma \sqrt{k \pi_j}} \right) - \mathbb{E}_{\pi} g \left(\frac{S_k - \mathbb{E}_{\pi} S_k}{\sigma \sqrt{k \pi_j}} \right), \quad k \geq 1.$$

则要证明定理 1, 只需证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n d_k \xi_k = 0, \quad \text{a.s.} \quad (2.2)$$

记 N_n 为直到时刻 n 该 Markov 链访问 j 的次数, $N_{m,n}$ 为从时刻 m 到 n 访问 j 的次数, 且记

$$\tilde{S}_{N_k} = \sum_{i=1}^{N_k} Z_i, \quad \tilde{S}_{N_k, l} = \sum_{i=N_k+1}^{N_l} Z_i, \quad 1 \leq k < l,$$

以及

$$\tilde{\xi}_k = g \left(\frac{\tilde{S}_{N_k} - \mathbb{E}_{\pi} \tilde{S}_{N_k}}{\sigma \sqrt{k \pi_j}} \right) - \mathbb{E}_{\pi} g \left(\frac{\tilde{S}_{N_k} - \mathbb{E}_{\pi} \tilde{S}_{N_k}}{\sigma \sqrt{k \pi_j}} \right), \quad k \geq 1,$$

其中, $g \in \mathcal{L}$, $j \in S$.

首先证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n d_k \tilde{\xi}_k = 0, \quad \text{a.s.} \quad (2.3)$$

显然, $\{\tilde{\xi}_n; n \geq 1\}$ 是一致有界的随机变量序列, 由引理 1 知, 只需证明存在 $c > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得对任意 $1 \leq k < l$, 有

$$|\mathbb{E} \tilde{\xi}_k \tilde{\xi}_l| \leq c \left(\frac{k}{l} \right)^\delta \quad (2.4)$$

即可.

对 $1 \leq k < l$, 由 $\{Z_r; r \geq 0\}$ 是 i.i.d. 随机变量序列, 得 $\tilde{S}_{N_k}$ 与 $\tilde{S}_{N_{k,l}}$ 相互独立, 并注意到关系式 $\tilde{S}_{N_l} - \tilde{S}_{N_{k,l}} = \tilde{S}_{N_k}$, 以及 g 是有界 Lipschitz 1 函数, 我们有

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}_\pi \tilde{\xi}_k \tilde{\xi}_l| &= \left| \text{Cov} \left(g \left(\frac{\tilde{S}_{N_k} - \mathbb{E}_\pi \tilde{S}_{N_k}}{\sigma \sqrt{k\pi_j}} \right), g \left(\frac{\tilde{S}_{N_l} - \mathbb{E}_\pi \tilde{S}_{N_l}}{\sigma \sqrt{l\pi_j}} \right) \right) \right| \\ &= \left| \text{Cov} \left(g \left(\frac{\tilde{S}_{N_k} - \mathbb{E}_\pi \tilde{S}_{N_k}}{\sigma \sqrt{k\pi_j}} \right), g \left(\frac{\tilde{S}_{N_l} - \mathbb{E}_\pi \tilde{S}_{N_l}}{\sigma \sqrt{l\pi_j}} \right) - g \left(\frac{\tilde{S}_{N_{k,l}} - \mathbb{E}_\pi \tilde{S}_{N_{k,l}}}{\sigma \sqrt{l\pi_j}} \right) \right) \right| \\ &\leq c \mathbb{E}_\pi \left| g \left(\frac{\tilde{S}_{N_l} - \mathbb{E}_\pi \tilde{S}_{N_l}}{\sigma \sqrt{l\pi_j}} \right) - g \left(\frac{\tilde{S}_{N_{k,l}} - \mathbb{E}_\pi \tilde{S}_{N_{k,l}}}{\sigma \sqrt{l\pi_j}} \right) \right| \\ &\leq c \mathbb{E}_\pi \left| \frac{\tilde{S}_{N_l} - \tilde{S}_{N_{k,l}} - \mathbb{E}(\tilde{S}_{N_l} - \tilde{S}_{N_{k,l}})}{\sqrt{l}} \right| = c \mathbb{E}_\pi \left| \frac{\tilde{S}_{N_k} - \mathbb{E}_\pi \tilde{S}_{N_k}}{\sqrt{l}} \right| \\ &\leq c \frac{\sqrt{\mathbb{E}_\pi (\tilde{S}_{N_k} - \mathbb{E}_\pi \tilde{S}_{N_k})^2}}{\sqrt{l}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

令 $T_i^{(r)}$, $r = 0, 1, \dots$ 表示 Markov 链在第 r 和 $r+1$ 次访问状态 j 之间到达状态 i 的次数, 即

$$T_i^{(r)} = \#\{m \in (\tau_j^{(r)}, \tau_j^{(r+1)}]; X_m = i\}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

由强 Markov 性, $\{T_i^{(r)}; r \geq 0\}$ 是 i.i.d. 随机变量序列, 利用强大数律得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{r=1}^{N_n} T_i^{(r)}}{N_n} = \mathbb{E}_j(T_i^{(0)}).$$

又由文献 [28, (5.5.12)], 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{n} = \pi_j. \quad (2.6)$$

因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{r=1}^{N_n} T_i^{(r)}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{n} \frac{\sum_{r=1}^{N_n} T_i^{(r)}}{N_n} = \pi_j \mathbb{E}_j(T_i^{(0)}).$$

另一方面,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{r=1}^{N_n} T_i^{(r)}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{m \leq n; X_m = i\}}{n} = \pi_i,$$

因此有

$$\mathbb{E}_j(T_i^{(0)}) = \frac{\pi_i}{\pi_j}. \quad (2.7)$$

根据 $T_i^{(r)}$ 的定义知,

$$\sum_{m=1}^{\tau_j^{(1)}} f(X_m) = \sum_{i \in S} f(i) T_i^{(0)},$$

两边取期望, 并利用 Fubini 定理、(2.7) 和 (1.4) 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_j Z_0 &= \mathbb{E}_j \left(\sum_{m=1}^{\tau_j^{(1)}} f(X_m) \right) = \mathbb{E}_j \left(\sum_{i \in S} f(i) T_i^{(0)} \right) \\ &= \sum_{i \in S} f(i) \mathbb{E}_j (T_i^{(0)}) = \frac{1}{\pi_j} \sum_{i \in S} \pi_i f(i) \\ &= \frac{1}{\pi_j} \mathbb{E}_\pi (f(X_0)). \end{aligned}$$

所以,

$$\mathbb{E}_j (Z_0 - \mathbb{E}_\pi Z_0) = \pi_j^{-1} \mathbb{E}_\pi (f(X_0) - \mathbb{E}_\pi f(X_0)) = 0.$$

故 $\{Z_r - \mathbb{E}_\pi Z_r; r \geq 0\}$ 是零均值、有有限方差 σ^2 (定理 1 条件 (1.5)) 的 i.i.d. 随机变量序列, 由中心极限定理和 (2.6) 得

$$\frac{\tilde{S}_{N_n} - \mathbb{E}_\pi \tilde{S}_{N_n}}{\sqrt{n\pi_j}\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\pi_j}} \sqrt{\frac{N_n}{n}} \frac{\sum_{i=1}^{N_n} (Z_i - \mathbb{E}_\pi Z_i)}{\sqrt{N_n}\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

由此, 利用文献 [31, 定理 6.1], 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_\pi \left(\frac{\tilde{S}_{N_n} - \mathbb{E}_\pi \tilde{S}_{N_n}}{\sigma \sqrt{n\pi_j}} \right)^2 = \mathbb{E} \mathcal{N}^2(0, 1) = 1.$$

因此, 存在常数 $c > 0$, 使得对任意正整数 k ,

$$\mathbb{E}_\pi (\tilde{S}_{N_k} - \mathbb{E}_\pi \tilde{S}_{N_k})^2 \leq ck.$$

把上式代入 (2.5) 得

$$|\mathbb{E}_\pi \tilde{\xi}_k \tilde{\xi}_l| \leq c \left(\frac{k}{l} \right)^{1/2},$$

即 (2.4) 成立. 由引理 1 即得 (2.3) 成立.

显然, N_n 可表示为 $N_n = \max\{r \geq 0; \tau_j^{(r)} \leq n\}$, 所以,

$$\begin{aligned} S_n - \mathbb{E}_\pi S_n &= \sum_{k=1}^{\tau_j^{(1)}} (f(X_k) - \mathbb{E}_\pi f(X_k)) + \sum_{r=1}^{N_n} \sum_{k=\tau_j^{(r)}+1}^{\tau_j^{(r+1)}} (f(X_k) - \mathbb{E}_\pi f(X_k)) \\ &\quad - \sum_{k=n+1}^{\tau_j^{(N_n+1)}} (f(X_k) - \mathbb{E}_\pi f(X_k)) \\ &= \sum_{k=1}^{\tau_j^{(1)}} (f(X_k) - \mathbb{E}_\pi f(X_k)) + (\tilde{S}_{N_n} - \mathbb{E}_\pi \tilde{S}_{N_n}) - \sum_{k=n+1}^{\tau_j^{(N_n+1)}} (f(X_k) - \mathbb{E}_\pi f(X_k)). \end{aligned}$$

对每个样本路径, 由于上式第一个和式几乎处处只有有限项, 第三项和式几乎处处最多只有 $\tau_j^{(N_n+1)} - \tau_j^{(N_n)}$ 项, 因此, 在定理 1 条件 (1.4) 下, 有

$$\frac{S_n - \mathbb{E}_\pi S_n}{\sqrt{n}} - \frac{\tilde{S}_{N_n} - \mathbb{E}_\pi \tilde{S}_{N_n}}{\sqrt{n}} = o(1), \quad \text{a.s.} \quad (2.9)$$

因此, 由 g 是 Lipschitz 1 有界函数可得

$$\left| g\left(\frac{S_n - \mathbb{E}_\pi S_n}{\sigma\sqrt{n\pi_j}}\right) - g\left(\frac{\tilde{S}_{N_n} - \mathbb{E}_\pi \tilde{S}_{N_n}}{\sigma\sqrt{n\pi_j}}\right) \right| \leq c \left| \frac{S_n - \mathbb{E}_\pi S_n}{\sqrt{n}} - \frac{\tilde{S}_{N_n} - \mathbb{E}_\pi \tilde{S}_{N_n}}{\sqrt{n}} \right| = o(1), \quad \text{a.s.}$$

和

$$\mathbb{E}_\pi \left(\left| g\left(\frac{S_n - \mathbb{E}_\pi S_n}{\sigma\sqrt{n\pi_j}}\right) - g\left(\frac{\tilde{S}_{N_n} - \mathbb{E}_\pi \tilde{S}_{N_n}}{\sigma\sqrt{n\pi_j}}\right) \right| \right) = o(1).$$

由此得

$$\xi_n - \tilde{\xi}_n \rightarrow 0, \quad \text{a.s.}$$

上式结合 (2.3) 得 (2.2) 成立. 定理 1 证毕. $\square$

定理 2 的证明 由 (2.8) 和 (2.9) 有

$$\frac{S_n - \mathbb{E}_\pi S_n}{\sqrt{n\pi_j}\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - \mathbb{E}_\pi S_n}{\sigma\sqrt{n\pi_j}} \leq x\right) = \Phi(x).$$

故由 Toeplitz 引理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n d_k P\left(\frac{S_k - \mathbb{E}_\pi S_k}{\sigma\sqrt{k\pi_j}} \leq x\right) = \Phi(x).$$

结合定理 1, (1.10) 成立. 定理 2 证毕. $\square$

参考文献

- 1 Brosamler G A. An almost everywhere central limit theorem. Math Proc Cambridge Philos Soc, 1988, 104: 561–574
- 2 Schatte P. On strong versions of the central limit theorem. Math Nachr, 1988, 137: 249–256
- 3 Chandrasekharan K, Minakshisundaram S. Typical Means. Oxford: Oxford University Press, 1952
- 4 Lacey M T, Philipp W. A note on the almost sure central limit theorem. Statist Probab Lett, 1990, 9: 201–205
- 5 Ibragimov I A, Lifshits M. On the convergence of generalized moments in almost sure central limit theorem. Statist Probab Lett, 1998, 40: 343–351
- 6 Berkes I, Csáki E. A universal result in almost sure central limit theory. Stochastic Process Appl, 2001, 94: 105–134
- 7 Hörmann S. Critical behavior in almost sure central limit theory. J Theoret Probab, 2007, 20: 613–636
- 8 Wu Q Y. Almost sure limit theorems for stable distribution. Statist Probab Lett, 2011, 81: 662–672
- 9 Khurelbaatar G, Rempala G. A note on the almost sure limit theorem for the product of partial sums. Appl Math Lett, 2006, 19: 191–196
- 10 Miao Y. Central limit theorem and almost sure central limit theorem for the product of some partial sums. Proc Indian Acad Sci Math Sci, 2008, 118: 289–294
- 11 Lu X, Qi Y. A note on asymptotic distribution for products of sums. Statist Probab Lett, 2004, 68: 407–413
- 12 Gonchigdanzan K. An almost sure limit theorem for the product of partial sums with stable distribution. Statist Probab Lett, 2008, 78: 3170–3175

- 13 Wu Q Y. An improved result in almost sure central limit theory for the products of partial sums with stable distribution. *Chin Ann Math Ser B*, 2012, 33: 919–930
- 14 Wu Q Y. Almost sure central limit theory for products of sums of partial sums. *Appl Math J Chinese Univ*, 2012, 27: 169–180
- 15 Chen S Q, Lin Z Y. Almost sure max-limits for nonstationary Gaussian sequence. *Statist Probab Lett*, 2006, 76: 1175–1184
- 16 Csáki E, Gonchigdanzan K. Almost sure limit theorems for the maximum of stationary Gaussian sequences. *Statist Probab Lett*, 2002, 58: 195–203
- 17 Tan Z Q, Wang Y B. Almost sure asymptotics for extremes of non-stationary Gaussian random fields. *Chin Ann Math Ser B*, 2014, 35: 125–138
- 18 Lin F M. Almost sure limit theorem for the maxima of strongly dependent Gaussian sequences. *Electron Commun Probab*, 2009, 14: 224–231
- 19 Peng Z X, Wang L L, Saralees N. Almost sure central limit theorem for partial sums and maxima. *Math Nachr*, 2009, 282: 632–636
- 20 Zang Q P. A note on the almost sure central limit theorems for the maxima and sums. *J Inequal Appl*, 2012, 2012: 223
- 21 Huang S H, Pang T X. An almost sure central limit theorem for self-normalized partial sums. *Comput Math Appl*, 2010, 60: 2639–2644
- 22 Zhang Y, Yang X Y. An almost sure central limit theorem for self-normalized products of sums of i.i.d. random variables. *J Math Anal Appl*, 2011, 376: 29–41
- 23 Wu Q Y. A note on the almost sure limit theorem for self normalized partial sums of random variables in the domain of attraction of the normal law. *J Inequal Appl*, 2012, 2012: 17
- 24 Wu Q Y. Almost sure central limit theory for self-normalized products of sums of partial sums. *J Appl Math*, 2012, Article ID: 329391
- 25 Wu Q Y, Chen P Y. An improved result in almost sure central limit theory for self-normalized products of partial sums. *J Inequal Appl*, 2013, 2013: 129
- 26 Zhuang G M, Peng Z X, Tan Z Q. Almost sure central limit theorem for partial sums of Markov chain. *Chin Ann Math Ser B*, 2012, 33: 73–82
- 27 侯振挺, 邹捷中, 张汉君, 等. 马尔可夫过程的 Q 矩阵问题. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1994
- 28 张波, 张景肖. 应用随机过程. 北京: 清华大学出版社, 2004
- 29 Billingsley P. *Convergence of Probability Measures*. New York: Wiley, 1968
- 30 Peligrad M, Shao Q M. A note on the almost sure central limit theorem for weakly dependent random variables. *Statist Probab Lett*, 1995, 22: 131–136
- 31 DeAcosta A, Giné E. Convergence of moments and related functionals in the general central limit theorie in Banach spaces. *Z Wahrscheinlichkeitstheorie Verw Geb*, 1979, 48: 213–231

Almost sure central limit theory for positive recurrent Markov chain

WU QunYing

Abstract Consider an irreducible and positive recurrent Markov chain. A universal result in almost sure limit central theorem for the partial sums of its function is established. Our results realize the extension of almost sure central limit theorem for a sequence of independent and identically distributed (i.i.d.) random variables to Markov chain.

Keywords Markov chain, almost sure limit central theorem, weight

MSC(2010) 60F15, 60F05

doi: 10.1360/N012015-00056