一维非线性 Schrödinger 方程的两个无条件收敛的守恒紧致差分格式

王廷春^{①②*}, 郭柏灵^②

① 南京信息工程大学数理学院, 南京 210044;

② 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088

E-mail: iapcmwang@gmail.com, gbl@iapcm.ac.cn

收稿日期: 2010-10-25; 接受日期: 2011-02-13; * 通信作者
南京信息工程大学预先研究基金 (批准号: 20100339) 资助项目

摘要 本文对一维非线性 Schrödinger 方程给出两个紧致差分格式, 运用能量方法和两个新的分析技巧证明格式关于离散质量和离散能量守恒, 而且在最大模意义下无条件收敛. 对非线性紧格式构造了一个新的迭代算法, 证明了算法的收敛性, 并在此基础上给出一个新的线性化紧格式. 数值算例验证了理论分析的正确性, 并通过外推进一步提高了数值解的精度.

关键词 非线性 Schrödinger 方程 紧致差分格式 守恒性 最大模收敛性 迭代算法

MSC (2000) 主题分类 65M06, 65M12

1 引言

Schrödinger 方程是量子力学中的一个重要方程^[1], 它在诸如等离子物理、非线性光学、水波及双分子动力学等其它领域也有广泛应用^[2,3]. 关于 Schrödinger 方程的数值研究已有很多结果, 如 Schrödinger 方程初值问题或初边值问题的有限差分法^[4-16]、有限元法^[17-19]、多项式近似^[20-24]等.

最近, 关于偏微分方程的高精度紧致差分算法的研究是国际上的一个研究热点^[25-35]. 高精度差分算法在高频波的数值模拟中有着极为重要的作用, 然而就作者所知, 关于非线性偏微分方程紧格式在最大模意义下的无条件收敛性分析尚未见文献.

本文研究非线性 Schrödinger (NLS) 方程的初边值问题

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q|u|^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

$$u(x, t) \rightarrow 0 \text{ 当 } |x| \rightarrow \infty, \quad t > 0, \quad (1.3)$$

其中 $\eta \neq 0$, $q > 0$ 是实常数, $u = u(x, t)$ 是一个复值函数, $u_0(x)$ 是已知光滑函数, 其随 $|x| \rightarrow \infty$ 而迅速向零衰减. 方程 (1.1) 在 $\eta > 0$ 和 $\eta < 0$ 时分别对应聚焦和散焦. 本文以聚焦情形为例展开研究, 散焦情形的结果可用类似方法得到.

由于当 $|x| \gg 1$ 时方程 (1.1) 的解迅速向零衰减, 因此可在一个有限区域 $\Omega = (x_L, x_R)$ 上对 (1.1)–(1.2) 进行数值求解, 其中 $-x_L, x_R \gg 1$, 即求解如下初边值问题:

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q|u|^2 u = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T], \quad (1.4)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (1.5)$$

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T], \quad (1.6)$$

其中 $u_0(x)$ 足够正则使得初边值问题 (1.4)–(1.6) 具有光滑解.

经过简单计算可知, 初边值问题 (1.4)–(1.6) 满足如下守恒性质:

$$Q(t) = \int_{x_L}^{x_R} |u(x, t)|^2 dx = Q(0), \quad (1.7)$$

$$E(t) = -\frac{\eta}{2} \int_{x_L}^{x_R} |u_x(x, t)|^2 dx + \frac{q}{4} \int_{x_L}^{x_R} |u(x, t)|^4 dx = E(0), \quad (1.8)$$

其中 $Q(t)$ 和 $E(t)$ 即所谓的质量 (或电荷) 和能量.

本文将初边值问题 (1.4)–(1.6) 提出两个紧致差分格式, 关于它们的理论分析和计算有如下新的结果:

1) 格式关于离散质量和离散能量守恒. Zhang^[36] 等人曾指出非守恒格式可能导致非线性“爆破”, 并提出一个线性化守恒差分格式来求解非线性 Schrödinger 方程. Li 和 Vu-Quoc^[37] 也指出 “in some areas, the ability to preserve some invariant properties of the original differential equation is a criterion to judge the success of a numerical simulation”.

至今为止, 人们普遍认为非线性方程的紧格式不能保持原问题的物理守恒律 (如文献 [34] 对非线性 Schrödinger 方程紧格式的研究). 本文中提出的两个紧格式既保持离散质量守恒也保持离散能量守恒, 从而进一步深化了人们对紧格式的认识.

2) 差分解依最大模范数收敛到精确解, 收敛阶为 $O(h^4 + \tau^2)$. 在文献 [34] 中, 作者对非线性 Schrödinger 方程提出了两个紧致差分格式, 并在假设差分解最大模有界的前提下, 运用数学归纳法^[38,39] 和离散能量法证明: 如果 $\frac{\tau^2}{h}$ 足够小, 则差分解依平方模收敛到原问题的精确解, 收敛阶为 $O(h^4 + \tau^2)$, 其中 τ 和 h 分别为时空方向的步长. 至今为止这是关于非线性 Schrödinger 方程紧格式收敛性的最好结果.

本文给出的两个紧格式都是 Crank-Nicolson 型的, 按照经验预测, 它们应该是无条件稳定和收敛的. 另外, 对非线性 Schrödinger 方程数值算法的收敛性分析大多建立在 L_2 模意义上, 而这不能直观地给出数值解对精确解的逼近程度. 最大模范数不依赖于网格参数, 可直观刻画数值解的逼近程度, 因此在理论分析和实际应用中具有更重要的意义^[32, 33, 40].

本文证明: 在对网格比没有任何限制的情况下, 两个紧格式的差分解依最大模范数收敛到精确解, 收敛阶为 $O(h^4 + \tau^2)$.

3) 两个新的分析技巧. 非线性方程紧格式的收敛性分析中, 最大的困难就是如何获得差分解在最大模意义下的先验估计. 为了克服这个困难, 我们将格式的逐点形式 (或分量形式) 写成向量形式, 然后运用矩阵知识和能量方法获得差分解的先验估计. 为了获得最大模意义下的收敛性结果, 我们引入两个新的引理, 即引理 3.5 和 3.6.

4) 一个新的迭代算法. 本文提出的两个紧致差分格式中, 有一个是非线性隐格式 (即格式 A), 需要迭代求解, 为此我们给出一个新的迭代算法, 并证明了迭代解对差分解的收敛性. 在迭代算法的基

基础上得到一个新的线性化紧格式, 其同样依最大模范数收敛到精确解, 收敛阶为 $O(h^4 + \tau^2)$.

本文结构如下: 第 2 节引入一些记号并给出两个紧致差分格式; 第 3 节引入或证明一些有用的引理; 第 4 节讨论了第一个格式的离散守恒性质, 并证明了差分对精确解的最大模收敛性; 第 5 节对非线性隐格式给出一个迭代算法, 证明了算法的收敛性, 并在此基础上得到一个新的线性化紧格式; 第 6 节讨论了第二个格式的离散守恒律和最大模收敛性; 第 7 节给出一些数值试验, 并引入外推技巧使数值解的精度得到进一步提高. 最后给出一个简单总结和后续工作的展望.

2 一些记号和两个紧致差分格式

取两个正整数 N 和 J , 记 $h = (x_R - x_L)/J, \tau = T/N$,

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}_h &= \{x_j = x_L + jh \mid j = 0, 1, \dots, J\}, \quad \Omega_h = \bar{\Omega}_h \cap \Omega, \quad \partial\Omega_h = \bar{\Omega}_h \cap \partial\Omega, \\ \Omega_\tau &= \{t_n = n\tau \mid n = 0, 1, \dots, N-1\}, \quad \Omega'_\tau = \{t_n = n\tau \mid n = 1, 2, \dots, N-1\}, \\ \bar{\Omega}_\tau &= \{t_n = n\tau \mid n = 0, 1, \dots, N\}.\end{aligned}$$

假设 $\mathbf{w} = \{w_j^n \mid (x_j, t_n) \in \bar{\Omega}_h \times \bar{\Omega}_\tau\}$ 是一个网格函数. 引进如下记号:

$$\begin{aligned}w_j^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{w_j^{n+1} + w_j^n}{2}, \quad \delta_t w_j^n = \frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{\tau}, \quad \delta_x w_j^n = \frac{w_{j+1}^n - w_j^n}{h}, \\ \delta_{\bar{t}} w_j^n &= \frac{w_j^{n+1} - w_j^{n-1}}{2\tau}, \quad \delta_{\bar{x}} w_j^n = \frac{w_j^n - w_{j-1}^n}{h}, \quad A_\tau w_j^n = \frac{w_j^{n+1} + w_j^{n-1}}{2}, \\ A_h w_j^n &= w_j^n + \frac{h^2}{12} \delta_x \delta_{\bar{x}} w_j^n = \frac{1}{12} (w_{j-1}^n + 10w_j^n + w_{j+1}^n).\end{aligned}$$

对两个向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_J)^T$ 和 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_J)^T$, 记其向量内积为

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_v = \sum_{j=1}^J a_j \bar{b}_j.$$

记

$$\mathbb{V}_h = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} = (v_0, v_1, \dots, v_J), v_0 = v_J = 0\}$$

为 $\bar{\Omega}_h$ 上的一个复值函数空间. 对任意复值网格函数 $u, v \in \mathbb{V}_h$, 记离散内积为

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = h \sum_{j=1}^{J-1} u_j \bar{v}_j.$$

记离散 L_p 范数 $\|\cdot\|_p$, H_0^1 范数 $|\cdot|_1$ 和最大模范数为 $\|\cdot\|_\infty$ 分别为

$$\|\mathbf{v}\|_p = \sqrt[p]{h \sum_{j=1}^{J-1} |v_j|^p}, \quad |\mathbf{v}|_1 = \sqrt{h \sum_{j=0}^{J-1} |\delta_x v_j|^2}, \quad \|\mathbf{v}\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq J-1} |v_j|.$$

需要指出的是上述离散范数都仅是半范数. 简便起见, 记 $\|\mathbf{v}\|_2$ 为 $\|\mathbf{v}\|$, 并记 U_j^n 和 u_j^n 分别为 $u(x, t)$ 在点 (x_j, t_n) 处的精确解和差分解. 令 C, C_u, C_R, C_l ($l = 0, 1, 2, \dots$) 分别表示一些不依赖网格参数的广义正常数, 其在不同的地方可以有不同的值.

对初边值问题 (1.4)–(1.6) 的精确解, 我们假设

$$\max\{\|U^n\|, |U^n|_1, \|U^n\|_\infty\} \leq C_u. \quad (2.1)$$

考虑如下两个紧致差分格式:

格式 A

$$iA_h\delta_t u_j^n + \eta\delta_x\delta_{\bar{x}}u_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{q}{2}A_h(|u_j^n|^2 + |u_j^{n+1}|^2)u_j^{n+\frac{1}{2}} = 0, \quad (x_j, t_n) \in \Omega_h \times \Omega_\tau, \quad (2.2)$$

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad x_j \in \bar{\Omega}_h, \quad (2.3)$$

$$u_j^n = 0, \quad (x_j, t_n) \in \partial\Omega_h \times \bar{\Omega}_\tau. \quad (2.4)$$

格式 B

$$iA_h\delta_t u_j^n + \eta\delta_x\delta_{\bar{x}}A_\tau u_j^n + qA_h(|u_j^n|^2 A_\tau u_j^n) = 0, \quad (x_j, t_n) \in \Omega_h \times \Omega'_\tau, \quad (2.5)$$

$$iA_h\delta_t u_j^0 + \eta\delta_x\delta_{\bar{x}}u_j^{\frac{1}{2}} + \frac{q}{2}A_h(|u_j^0|^2 + |u_j^1|^2)u_j^{\frac{1}{2}} = 0, \quad x_j \in \Omega_h, \quad (2.6)$$

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad x_j \in \bar{\Omega}_h, \quad (2.7)$$

$$u_j^n = 0, \quad (x_j, t_n) \in \partial\Omega_h \times \bar{\Omega}_\tau. \quad (2.8)$$

显然, 格式 (2.2)–(2.4) 是非线性隐式的, 为了得到 $n+1$ 层的解 u_j^{n+1} , 需要一个外层迭代, 并通过求解一个内部线性化方程组来获得迭代值 u_j^{n+1} , 因此需要构造一个高效的迭代算法.

记

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{in}^n &= (u_1^n, u_2^n, \dots, u_{J-1}^n)^T, \\ (|\mathbf{u}_{in}^n|^2 + |\mathbf{u}_{in}^{n+1}|^2)\mathbf{u}_{in}^{n+\frac{1}{2}} &= ((|u_1^n|^2 + |u_1^{n+1}|^2)u_1^{n+\frac{1}{2}}, \dots, (|u_{J-1}^n|^2 + |u_{J-1}^{n+1}|^2)u_{J-1}^{n+\frac{1}{2}})^T, \\ \mathbf{M} &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 10 & 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & 10 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}_{(J-1) \times (J-1)}. \end{aligned}$$

因为 $\mathbf{M}$ 是一个实值对称正定矩阵, 因此存在另外一个实值对称正定矩阵 $\mathbf{H}$ 使得 $\mathbf{H} = \mathbf{M}^{-1}$, 从而格式 (2.2)–(2.4) 可写为如下的向量形式:

$$i\delta_t \mathbf{u}_{in}^n + \eta\mathbf{H}\delta_x\delta_{\bar{x}}\mathbf{u}_{in}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{q}{2}(|\mathbf{u}_{in}^n|^2 + |\mathbf{u}_{in}^{n+1}|^2)\mathbf{u}_{in}^{n+\frac{1}{2}} = 0, \quad t_n \in \Omega_\tau, \quad (2.9)$$

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad x_j \in \bar{\Omega}_h, \quad (2.10)$$

$$u_j^n = 0, \quad (x_j, t_n) \in \partial\Omega_h \times \bar{\Omega}_\tau. \quad (2.11)$$

类似地, 可将格式 (2.5)–(2.8) 写为如下的向量形式:

$$i\delta_t \mathbf{u}_{in}^n + \eta\mathbf{H}\delta_x\delta_{\bar{x}}A_\tau \mathbf{u}_{in}^n + q|\mathbf{u}_{in}^n|^2 A_\tau \mathbf{u}_{in}^n = 0, \quad t_n \in \Omega'_\tau, \quad (2.12)$$

$$i\delta_t \mathbf{u}_{in}^0 + \eta \mathbf{H} \delta_x \delta_{\bar{x}} \mathbf{u}_{in}^{\frac{1}{2}} + \frac{q}{2} (|\mathbf{u}_{in}^0|^2 + |\mathbf{u}_{in}^1|^2) \mathbf{u}_{in}^{\frac{1}{2}} = 0, \quad (2.13)$$

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad x_j \in \bar{\Omega}_h, \quad (2.14)$$

$$u_j^n = 0, \quad (x_j, t_n) \in \partial\Omega_h \times \bar{\Omega}_\tau. \quad (2.15)$$

3 一些有用的引理

文中将频繁用到如下一些引理:

引理 3.1^[41] 对任意网格函数 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}_h$, 有

$$h \sum_{j=1}^{J-1} (\delta_x \delta_{\bar{x}} u_j) \bar{v}_j = -h \sum_{j=0}^{J-1} (\delta_x u_j) (\delta_x \bar{v}_j), \quad (3.1)$$

和

$$\|\mathbf{v}\| \leq (x_R - x_L) \|\mathbf{v}\|_\infty, \quad \|\mathbf{v}\|_\infty \leq \frac{x_R - x_L}{2} |\mathbf{v}|_1. \quad (3.2)$$

引理 3.2^[42] 对任意网格函数 $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_h$, 有

$$\|\mathbf{v}\|_p \leq c(|\mathbf{v}|_1^\alpha \|\mathbf{v}\|^{1-\alpha} + \|\mathbf{v}\|), \quad (3.3)$$

其中 $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$, $p \in [1, \infty]$, c 是一个依赖于 x_L 和 x_R 但不依赖 p 和 h 的常数.

引理 3.3 (Gronwall 不等式^[43]) 假设网格函数 $\{w^n \mid n = 0, 1, 2, \dots, N; N\tau = T\}$ 满足不等式

$$w^n - w^{n-1} \leq A\tau w^n + B\tau w^{n-1} + C_n\tau,$$

其中 A, B 和 C_n ($n = 0, 1, 2, \dots, N$) 是非负常数. 则

$$\max_{1 \leq n \leq N} |w^n| \leq \left(w^0 + \tau \sum_{l=1}^N C_l \right) e^{2(A+B)T},$$

其中 τ 足够小, 使得 $(A+B)\tau \leq \frac{N-1}{2N}$ ($N > 1$).

引理 3.4 (Gronwall 不等式^[43]) 假设网格函数 $\{w^n \mid n = 0, 1, 2, \dots, N; N\tau = T\}$ 满足不等式

$$w^n \leq A + \tau \sum_{l=1}^n B_l w^l,$$

其中 A 和 B_l ($l = 0, 1, 2, \dots, N$) 是非负常数. 则

$$\max_{1 \leq n \leq N} |w^n| \leq A e^{2\tau \sum_{l=1}^N B_l},$$

其中 τ 足够小, 使得 $(\max_{1 \leq l \leq N} B_l) \cdot \tau \leq \frac{1}{2}$.

引理 3.5 对序列 $w = \{w^0, w^1, \dots, w^n, w^{n+1}\}$ 和 $g = \{g^0, g^1, \dots, g^{n-1}, g^n\}$, 有

$$\left| 2\tau \sum_{l=0}^n g^l \delta_t w^l \right| \leq |w^0|^2 + \tau \sum_{l=1}^n |w^l|^2 + |w^{n+1}|^2 + |g^0|^2 + \tau \sum_{l=0}^{n-1} |\delta_t g^l|^2 + |g^n|^2. \quad (3.4)$$

证明 通过简单计算可得

$$2\tau \sum_{l=0}^n g^l \delta_t w^l = -2w^0 g^0 - 2\tau \sum_{l=0}^{n-1} w^{l+1} \delta_t g^l + 2w^{n+1} g^n. \quad (3.5)$$

对 (3.5) 式运用 Cauchy-Schwarz 不等式可得 (3.4). $\square$

引理 3.6 对序列 $w = \{w^1, w^2, \dots, w^{n+1}\}$ 和 $g = \{g^1, g^1, \dots, g^n\}$, 有

$$\begin{aligned} \left| 2\tau \sum_{l=1}^n g^l \delta_t w^l \right| &\leq |w^0|^2 + |w^1|^2 + \tau \sum_{l=2}^{n-1} |w^l|^2 + |w^n|^2 + |w^{n+1}|^2 \\ &\quad + |g^1|^2 + |g^2|^2 + \tau \sum_{l=2}^{n-1} |\delta_t g^l|^2 + |g^{n-1}|^2 + |g^n|^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

证明 通过简单计算可得

$$2\tau \sum_{l=1}^n g^l \delta_t w^l = -2w^0 g^1 - 2w^1 g^2 - 2\tau \sum_{l=2}^{n-1} w^l \delta_t g^l + 2w^n g^{n-1} + 2w^{n+1} g^n. \quad (3.7)$$

对 (3.7) 式运用 Cauchy-Schwarz 不等式可得 (3.6). $\square$

引理 3.7 对任一实值对称正定矩阵 $\mathbf{H}$, 记

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(J+1) \times (J+1)},$$

有结果

$$\text{Im}(\widetilde{\mathbf{H}} \delta_x \delta_{\bar{x}} \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n) = 0, \quad (3.8)$$

$$\text{Re}(\widetilde{\mathbf{H}} \delta_x \delta_{\bar{x}} \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) = -\frac{1}{2}(|\widetilde{\mathbf{R}} \mathbf{u}^{n+1}|_1^2 - |\widetilde{\mathbf{R}} \mathbf{u}^n|_1^2), \quad (3.9)$$

其中 $\mathbf{R} = \text{Chol}(\mathbf{H})$,

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(J+1) \times (J+1)}.$$

证明 因为 $\mathbf{H}$ 是一个实值对称正定矩阵, 则运用 Cholesky 分解可知, 存在一个上三角实值矩阵 $\mathbf{R}$ 使得

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}. \quad (3.10)$$

从而

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \widetilde{\mathbf{R}}^T \widetilde{\mathbf{R}}. \quad (3.11)$$

因此有

$$\text{Im}(\widetilde{\mathbf{H}} \delta_x \delta_{\bar{x}} \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n) = \text{Im}(\delta_x \delta_{\bar{x}} \widetilde{\mathbf{H}} \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n) = -\text{Im}(\delta_x \widetilde{\mathbf{H}} \mathbf{u}^n, \delta_x \mathbf{u}^n)$$

$$\begin{aligned}
&= -\operatorname{Im}(\widetilde{\mathbf{H}}\delta_x \mathbf{u}^n, \delta_x \mathbf{u}^n) = -\operatorname{Im}(\widetilde{\mathbf{R}}^T \widetilde{\mathbf{R}}\delta_x \mathbf{u}^n, \delta_x \mathbf{u}^n) \\
&= -\operatorname{Im}(\widetilde{\mathbf{R}}\delta_x \mathbf{u}^n, \widetilde{\mathbf{R}}\delta_x \mathbf{u}^n) = -\operatorname{Im}(\delta_x \widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{u}^n, \delta_x \widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{u}^n) = 0,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

和

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(\widetilde{\mathbf{H}}\delta_x \delta_{\bar{x}} \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\delta_x \delta_{\bar{x}} \widetilde{\mathbf{H}}(\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n), \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \\
&= -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\delta_x \widetilde{\mathbf{H}}(\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n), \delta_x \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \\
&= -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\widetilde{\mathbf{R}}^T \widetilde{\mathbf{R}}\delta_x(\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n), \delta_x \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \\
&= -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\widetilde{\mathbf{R}}\delta_x(\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n), \widetilde{\mathbf{R}}\delta_x(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)) \\
&= -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\delta_x \widetilde{\mathbf{R}}(\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n), \delta_x \widetilde{\mathbf{R}}(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)) \\
&= -\frac{1}{2} (|\widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{u}^{n+1}|_1^2 - |\widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{u}^n|_1^2),
\end{aligned} \tag{3.13}$$

证明中用到了引理 3.1. $\square$

引理 3.8 对任一实值对称正定矩阵 $\mathbf{H}$, 记

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(J+1) \times (J+1)},$$

存在两个正数 C_0 和 C_1 使得

$$C_0 \|\mathbf{u}^n\|^2 \leq (\widetilde{\mathbf{H}}\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n) \leq C_1 \|\mathbf{u}^n\|^2. \tag{3.14}$$

证明 由于 $\mathbf{H}$ 是一个实值对称正定矩阵, 从而它的所有特征值都是正的. 由 (3.9) 可得

$$(\widetilde{\mathbf{H}}\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n) = (\widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{u}^n, \widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{u}^n) = \|\widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{u}^n\|^2, \tag{3.15}$$

进而由矩阵的范数定义可得

$$C_0 \|\mathbf{u}^n\|^2 \leq (\widetilde{\mathbf{H}}\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n) \leq C_1 \|\mathbf{u}^n\|^2, \tag{3.16}$$

其中 C_0 和 C_1 是两个正常数. $\square$

4 格式 A 的数值分析

本节讨论格式 A 的离散守恒律和依最大模的 $O(h^4 + \tau^2)$ 阶无条件收敛性.

4.1 离散守恒律

与 (1.7)–(1.8) 相应的, 格式 A 具有如下两个离散守恒律:

引理 4.1 假设 $u_0 \in H^1(\Omega)$, 格式 A 关于离散质量和离散能量具有如下形式的守恒律:

$$Q^n = Q^{n-1} = \cdots = Q^0, \tag{4.1}$$

$$E^n = E^{n-1} = \dots = E^0, \quad (4.2)$$

其中

$$\begin{aligned} Q^n &= \|\mathbf{u}^n\|^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \\ E^n &= \frac{\eta}{2} |\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{u}^n|_1^2 - \frac{q}{4} \|\mathbf{u}^n\|_4^4, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

即为所谓的离散质量和离散能量.

证明 将 (2.9) 与 $2h\mathbf{u}_{in}^{n+\frac{1}{2}}$ 作向量内积, 然后取虚部得

$$\begin{aligned} &2\text{Im}(i\delta_t \mathbf{u}_{in}^n, h\mathbf{u}_{in}^{n+\frac{1}{2}})_v + 2\eta \text{Im}(\mathbf{H}\delta_x \delta_{\bar{x}} \mathbf{u}_{in}^{n+\frac{1}{2}}, h\mathbf{u}_{in}^{n+\frac{1}{2}})_v \\ &+ 2q \text{Im}((|\mathbf{u}_{in}^n|^2 + |\mathbf{u}_{in}^{n+1}|^2) \mathbf{u}_{in}^{n+\frac{1}{2}}, h\mathbf{u}_{in}^{n+\frac{1}{2}})_v = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

对 (4.3) 的第一项, 由向量内积和离散函数内积的定义可得

$$2\text{Im}(i\delta_t \mathbf{u}_{in}^n, h\mathbf{u}_{in}^{n+\frac{1}{2}})_v = 2\text{Im}(i\delta_t \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) = 2\text{Re}(\delta_t \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\tau} (\|\mathbf{u}^{n+1}\|^2 - \|\mathbf{u}^n\|^2). \quad (4.4)$$

对 (4.3) 的第二项, 运用引理 3.7 可得

$$2\eta \text{Im}(\mathbf{H}\delta_x \delta_{\bar{x}} \mathbf{u}_{in}^{n+\frac{1}{2}}, h\mathbf{u}_{in}^{n+\frac{1}{2}})_v = 2\eta \text{Im}(\tilde{\mathbf{H}}\delta_x \delta_{\bar{x}} \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) = 0. \quad (4.5)$$

对 (4.3) 的第三项, 有

$$2q \text{Im}((|\mathbf{u}_{in}^n|^2 + |\mathbf{u}_{in}^{n+1}|^2) \mathbf{u}_{in}^{n+\frac{1}{2}}, h\mathbf{u}_{in}^{n+\frac{1}{2}})_v = 2q \text{Im}((|\mathbf{u}^n|^2 + |\mathbf{u}^{n+1}|^2) \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) = 0. \quad (4.6)$$

将 (4.4)–(4.6) 代入 (4.3) 即得 (4.1).

将 (2.9) 与 $h(\mathbf{u}_{in}^{n+1} - \mathbf{u}_{in}^n)$ 做向量内积, 然后取实部得

$$\begin{aligned} &\text{Re}(i\delta_t \mathbf{u}_{in}^n, h(\mathbf{u}_{in}^{n+1} - \mathbf{u}_{in}^n))_v + \frac{\eta}{2} \text{Re}(\mathbf{H}\delta_x \delta_{\bar{x}} (\mathbf{u}_{in}^{n+1} + \mathbf{u}_{in}^n), h(\mathbf{u}_{in}^{n+1} - \mathbf{u}_{in}^n))_v \\ &+ \frac{q}{4} \text{Re}((|\mathbf{u}_{in}^n|^2 + |\mathbf{u}_{in}^{n+1}|^2) (\mathbf{u}_{in}^{n+1} + \mathbf{u}_{in}^n), h(\mathbf{u}_{in}^{n+1} - \mathbf{u}_{in}^n))_v = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

对 (4.7) 式的第一项, 由向量内积和离散函数内积的定义可得

$$\text{Re}(i\delta_t \mathbf{u}_{in}^n, h(\mathbf{u}_{in}^{n+1} - \mathbf{u}_{in}^n))_v = \text{Re}(i\delta_t \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) = -\tau \text{Im}(\delta_t \mathbf{u}^n, \delta_t \mathbf{u}^n) = 0. \quad (4.8)$$

对 (4.7) 式的第二项, 运用引理 3.7 可得

$$\begin{aligned} &\frac{\eta}{2} \text{Re}(\mathbf{H}\delta_x \delta_{\bar{x}} (\mathbf{u}_{in}^{n+1} + \mathbf{u}_{in}^n), h(\mathbf{u}_{in}^{n+1} - \mathbf{u}_{in}^n))_v \\ &= \frac{\eta}{2} \text{Re}(\tilde{\mathbf{H}}\delta_x \delta_{\bar{x}} (\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n), \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) = -\frac{\eta}{2} (|\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{u}^{n+1}|_1^2 - |\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{u}^n|_1^2). \end{aligned} \quad (4.9)$$

对 (4.7) 式的第三项, 通过简单计算可得

$$\begin{aligned} &\frac{q}{4} \text{Re}((|\mathbf{u}_{in}^n|^2 + |\mathbf{u}_{in}^{n+1}|^2) (\mathbf{u}_{in}^{n+1} + \mathbf{u}_{in}^n), h(\mathbf{u}_{in}^{n+1} - \mathbf{u}_{in}^n))_v \\ &= \frac{q}{4} \text{Re}((|\mathbf{u}^n|^2 + |\mathbf{u}^{n+1}|^2) (\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n), \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \\ &= \frac{q}{4} (\|\mathbf{u}^{n+1}\|_4^4 - \|\mathbf{u}^n\|_4^4). \end{aligned} \quad (4.10)$$

将 (4.8)–(4.10) 代入 (4.7) 即得 (4.2). □

4.2 先验估计

为证明格式的收敛性, 我们需要如下先验估计:

引理 4.2 假设 $u_0 \in H^1(\Omega)$, 则格式 A 的差分解满足

$$\|\mathbf{u}^n\| \leq C_2, \quad |\mathbf{u}^n|_1 \leq C_3, \quad \|\mathbf{u}^n\|_\infty \leq C_4. \quad (4.11)$$

证明 由 (4.1) 直接可得

$$\|\mathbf{u}^n\| \leq C_2. \quad (4.12)$$

运用引理 3.8 可得

$$\frac{\eta}{2} |\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{u}^n|_1^2 = \frac{\eta}{2} (\tilde{\mathbf{H}}\delta_x \mathbf{u}^n, \delta_x \mathbf{u}^n) \geq \frac{\eta}{2} C_0 |\mathbf{u}^n|_1^2. \quad (4.13)$$

运用引理 3.2 可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^n\|_4^4 &\leq c^4 (|\mathbf{u}^n|_1^{\frac{1}{4}} \|\mathbf{u}^n\|^{\frac{3}{4}} + \|\mathbf{u}^n\|)^4 \leq 8c^4 (|\mathbf{u}^n|_1 \|\mathbf{u}^n\|^3 + \|\mathbf{u}^n\|^4) \\ &\leq \varepsilon |\mathbf{u}^n|_1^2 + \frac{16c^8}{\varepsilon} \|\mathbf{u}^n\|^6 + 8c^4 \|\mathbf{u}^n\|^4 \\ &\leq \varepsilon |\mathbf{u}^n|_1^2 + \frac{16c^8}{\varepsilon} C_2^6 + 8c^4 C_2^4. \end{aligned} \quad (4.14)$$

取 $\varepsilon = \eta C_0/q$, 然后由 (4.12)–(4.14) 和 (4.2) 可得

$$|\mathbf{u}^n|_1 \leq C_3. \quad (4.15)$$

运用引理 3.1, 由 (4.15) 可得

$$\|\mathbf{u}^n\|_\infty \leq C_4. \quad (4.16)$$

证毕. $\square$

4.3 依最大模范数的无条件收敛性

记截断误差 $\mathbf{R}^n = (R_0^n, R_1^n, \dots, R_J^n) \in \mathbb{V}_h$ 为

$$i\delta_t \mathbf{U}_{in}^n + \eta \mathbf{H} \delta_x \delta_{\bar{x}} \mathbf{U}_{in}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{q}{2} (|\mathbf{U}_{in}^n|^2 + |\mathbf{U}_{in}^{n+1}|^2) \mathbf{U}_{in}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{R}_{in}^n, \quad t_n \in \Omega_\tau, \quad (4.17)$$

$$U_j^0 = u_0(x_j), \quad x_j \in \bar{\Omega}_h, \quad (4.18)$$

$$U_j^n = 0, \quad (x_j, t_n) \in \partial\Omega_h \times \bar{\Omega}_\tau, \quad (4.19)$$

其中, $\mathbf{R}_{in}^n = (R_1^n, R_2^n, \dots, R_{J-1}^n)$.

根据 Taylor 展开可得:

引理 4.3 假设 $u_0(x) \in H^1(\Omega)$, 且 $u(x, t) \in C^{6,3}(\Omega \times (0, T])$, 则存在正常数 C_R 使得

$$|R_j^n| \leq C_R (h^4 + \tau^2), \quad 1 \leq j \leq J-1, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (4.20)$$

$$|\delta_t R_j^n| \leq C_R (h^4 + \tau^2), \quad 1 \leq j \leq J-1, \quad 1 \leq n \leq N-1. \quad (4.21)$$

定理 4.1 假设

$$u_0(x) \in H^1(\Omega), \quad u(x, t) \in C^{6,3}(\Omega \times (0, T]),$$

且 τ 足够小, 则格式 A 的差分分解依 L_∞ 范数收敛到初边值问题 (1.4)–(1.6) 的解, 收敛阶为 $O(h^4 + \tau^2)$.

证明 记

$$\mathbf{e}^n = \mathbf{U}^n - \mathbf{u}^n, \quad 0 \leq n \leq N.$$

将 (4.17)–(4.19) 与 (2.2)–(2.4) 相减得如下误差方程:

$$i\delta_t \mathbf{e}_{in}^n + \eta \mathbf{H} \delta_x \delta_{\bar{x}} \mathbf{e}_{in}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{q}{2} \mathbf{G}_{in}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{R}_{in}^n, \quad t_n \in \Omega_\tau, \quad (4.22)$$

$$e_j^0 = 0, \quad x_j \in \bar{\Omega}_h, \quad (4.23)$$

$$e_j^n = 0, \quad (x_j, t_n) \in \partial\Omega_h \times \bar{\Omega}_\tau, \quad (4.24)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{in}^{n+\frac{1}{2}} &= (|\mathbf{U}_{in}^n|^2 + |\mathbf{U}_{in}^{n+1}|^2) \mathbf{U}_{in}^{n+\frac{1}{2}} - (|\mathbf{u}_{in}^n|^2 + |\mathbf{u}_{in}^{n+1}|^2) \mathbf{u}_{in}^{n+\frac{1}{2}} \\ &= [(|\mathbf{U}_{in}^n|^2 + |\mathbf{U}_{in}^{n+1}|^2) - (|\mathbf{u}_{in}^n|^2 + |\mathbf{u}_{in}^{n+1}|^2)] \mathbf{U}_{in}^{n+\frac{1}{2}} + (|\mathbf{u}_{in}^n|^2 + |\mathbf{u}_{in}^{n+1}|^2) \mathbf{e}_{in}^{n+\frac{1}{2}} \\ &= [\mathbf{U}_{in}^n \bar{\mathbf{e}}_{in}^n + \mathbf{e}_{in}^n \bar{\mathbf{U}}_{in}^n + \mathbf{U}_{in}^{n+1} \bar{\mathbf{e}}_{in}^{n+1} + \mathbf{e}_{in}^{n+1} \bar{\mathbf{U}}_{in}^{n+1}] \mathbf{U}_{in}^{n+\frac{1}{2}} + (|\mathbf{u}_{in}^n|^2 + |\mathbf{u}_{in}^{n+1}|^2) \mathbf{e}_{in}^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

注意到

$$G_0^n = G_J^n = 0,$$

则由 (4.25)、(2.1) 和引理 4.2 得

$$\|\mathbf{G}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \leq C(\|\mathbf{e}^n\|^2 + \|\mathbf{e}^{n+1}\|^2). \quad (4.26)$$

通过类似的分析可得

$$|\mathbf{G}^{n+\frac{1}{2}}|_1^2 \leq C(\|\mathbf{e}^n\|^2 + \|\mathbf{e}^{n+1}\|^2 + |\mathbf{e}^n|_1^2 + |\mathbf{e}^{n+1}|_1^2). \quad (4.27)$$

将 (4.22) 与 $2h\mathbf{e}_{in}^{n+\frac{1}{2}}$ 做向量内积, 然后取虚部得

$$\begin{aligned} &2\text{Im}(\delta_t \mathbf{e}_{in}^{n+\frac{1}{2}}, h\mathbf{e}_{in}^{n+\frac{1}{2}})_v + 2\eta \text{Im}(\mathbf{H} \delta_x \delta_{\bar{x}} \mathbf{e}_{in}^{n+\frac{1}{2}}, h\mathbf{e}_{in}^{n+\frac{1}{2}})_v + q \text{Im}(\mathbf{G}_{in}^{n+\frac{1}{2}}, h\mathbf{e}_{in}^{n+\frac{1}{2}})_v \\ &= 2\text{Im}(\mathbf{R}_{in}^n, h\mathbf{e}_{in}^{n+\frac{1}{2}})_v. \end{aligned} \quad (4.28)$$

对 (4.28) 式的第一项, 由向量内积和离散内积的定义可得

$$2\text{Im}(\delta_t \mathbf{e}_{in}^{n+\frac{1}{2}}, h\mathbf{e}_{in}^{n+\frac{1}{2}})_v = 2\text{Im}(\delta_t \mathbf{e}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{e}^{n+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\tau}(\|\mathbf{e}^{n+1}\|^2 - \|\mathbf{e}^n\|^2). \quad (4.29)$$

对 (4.28) 式的第二项, 有

$$2\eta \text{Im}(\mathbf{H} \delta_x \delta_{\bar{x}} \mathbf{e}_{in}^{n+\frac{1}{2}}, h\mathbf{e}_{in}^{n+\frac{1}{2}})_v = 2\eta \text{Im}(\widetilde{\mathbf{H}} \delta_x \delta_{\bar{x}} \mathbf{e}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{e}^{n+\frac{1}{2}}) = 0, \quad (4.30)$$

对 (4.28) 式的最后两项, 运用 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$|q \text{Im}(\mathbf{G}_{in}^{n+\frac{1}{2}}, h\mathbf{e}_{in}^{n+\frac{1}{2}})_v| = |q \text{Im}(\mathbf{G}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{e}^{n+\frac{1}{2}})|$$

$$\leq \frac{q}{2}(\|G_{in}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|e_{in}^{n+\frac{1}{2}}\|^2) \leq C(\|e^n\|^2 + \|e^{n+1}\|^2), \quad (4.31)$$

$$|2\operatorname{Im}(\mathbf{R}_{in}^n, h e_{in}^{n+\frac{1}{2}})_v| = |2\operatorname{Im}(\mathbf{R}^n, e^{n+\frac{1}{2}})| \leq \|\mathbf{R}^n\|^2 + \frac{1}{2}(\|e^n\|^2 + \|e^{n+1}\|^2). \quad (4.32)$$

将 (4.29)–(4.32) 代入 (4.28) 得

$$\frac{1}{\tau}(\|e^{n+1}\|^2 - \|e^n\|^2) \leq \|\mathbf{R}^n\|^2 + C(\|e^n\|^2 + \|e^{n+1}\|^2). \quad (4.33)$$

运用引理 3.3 和 4.3, 由 (4.33) 式可得: 如果 τ 足够小, 则

$$\|e^n\| \leq C(h^4 + \tau^2), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (4.34)$$

将 (4.22) 式与 $h\delta_t e_{in}^n$ 做向量内积, 然后取实部得

$$\eta \operatorname{Re}(\mathbf{H}\delta_x \delta_{\bar{x}} e_{in}^{n+\frac{1}{2}}, h\delta_t e_{in}^n)_v + \frac{q}{2} \operatorname{Re}(G_{in}^{n+\frac{1}{2}}, h\delta_t e_{in}^n)_v = \operatorname{Re}(\mathbf{R}_{in}^n, h\delta_t e_{in}^n)_v. \quad (4.35)$$

对 (4.35) 式的第一项, 利用引理 3.7 得

$$\eta \operatorname{Re}(\mathbf{H}\delta_x \delta_{\bar{x}} e_{in}^{n+\frac{1}{2}}, h\delta_t e_{in}^n)_v = \eta \operatorname{Re}(\widetilde{\mathbf{H}}\delta_x \delta_{\bar{x}} e^{n+\frac{1}{2}}, \delta_t e^n) = -\frac{\eta}{2\tau}(|\widetilde{\mathbf{R}}e^{n+1}|_1^2 - |\widetilde{\mathbf{R}}e^n|_1^2). \quad (4.36)$$

由 (4.22) 式可得

$$\delta_t e_{in}^n = i\eta \mathbf{H}\delta_x \delta_{\bar{x}} e_{in}^{n+\frac{1}{2}} + i\frac{q}{2}G_{in}^{n+\frac{1}{2}} - i\mathbf{R}_{in}^n, \quad t_n \in \Omega_\tau, \quad (4.37)$$

从而对 (4.35) 式的第二项有

$$\begin{aligned} \frac{q}{2} \operatorname{Re}(G_{in}^{n+\frac{1}{2}}, h\delta_t e_{in}^n)_v &= \frac{q}{2} \operatorname{Re}(G^{n+\frac{1}{2}}, \delta_t e^n) \\ &= \frac{q}{2} \operatorname{Re}\left(G_{in}^{n+\frac{1}{2}}, i\eta \mathbf{H}\delta_x \delta_{\bar{x}} e_{in}^{n+\frac{1}{2}} + i\frac{q}{2}G_{in}^{n+\frac{1}{2}} - i\mathbf{R}_{in}^n\right) \\ &= -\frac{q}{2} \operatorname{Im}(G^{n+\frac{1}{2}}, \eta \widetilde{\mathbf{H}}\delta_x \delta_{\bar{x}} e^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{q}{2} \operatorname{Im}(G^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{R}^n) \\ &= \frac{q}{2} \operatorname{Im}(\widetilde{\mathbf{R}}\delta_x G^{n+\frac{1}{2}}, \eta \widetilde{\mathbf{R}}\delta_x e^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{q}{2} \operatorname{Im}(G^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{R}^n). \end{aligned} \quad (4.38)$$

对 (4.38) 式的最后两项, 运用 Cauchy-Schwarz 不等式、引理 3.8 和 4.3, 得

$$\begin{aligned} \frac{q}{2} \operatorname{Im}(\widetilde{\mathbf{R}}\delta_x G^{n+\frac{1}{2}}, \eta \widetilde{\mathbf{R}}\delta_x e^{n+\frac{1}{2}}) &\leq \frac{\eta q}{4} \|\widetilde{\mathbf{R}}\delta_x G^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{\eta q}{4} \|\widetilde{\mathbf{R}}\delta_x e^{n+\frac{1}{2}}\|^2 \\ &\leq \frac{\eta q C_1}{4} |G^{n+\frac{1}{2}}|_1^2 + \frac{\eta q C_1}{4} (|e^n|_1^2 + |e^{n+1}|_1^2) \\ &\leq C(\|e^n\|^2 + \|e^{n+1}\|^2 + |e^n|_1^2 + |e^{n+1}|_1^2) \\ &\leq C(\|e^n\|^2 + \|e^{n+1}\|^2 + |\widetilde{\mathbf{R}}e^n|_1^2 + |\widetilde{\mathbf{R}}e^{n+1}|_1^2), \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{q}{2} \operatorname{Im}(G^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{R}^n) &\leq \frac{q}{4} \|G^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{q}{4} \|\mathbf{R}^n\|^2 \\ &\leq C(\|e^n\|^2 + \|e^{n+1}\|^2) + C(h^4 + \tau^2)^2. \end{aligned} \quad (4.40)$$

由 (4.34)–(4.36) 和 (4.38)–(4.40) 可得

$$|\widetilde{\mathbf{R}}e^{n+1}|_1^2 - |\widetilde{\mathbf{R}}e^n|_1^2 \leq C\tau(|\widetilde{\mathbf{R}}e^n|_1^2 + |\widetilde{\mathbf{R}}e^{n+1}|_1^2) + C\tau(h^4 + \tau^2)^2 - \frac{2\tau}{\eta} \operatorname{Re}(\mathbf{R}^n, \delta_t e_{in}^n). \quad (4.41)$$

对下标 n 从 0 到 m 求和, 然后用 m 代替 n 得

$$|\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{e}^{n+1}|_1^2 - |\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{e}^0|_1^2 \leq C\tau \sum_{l=0}^{n+1} |\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{e}^l|_1^2 + CT(h^4 + \tau^2)^2 - \frac{2\tau}{\eta} \operatorname{Re} \sum_{l=0}^n (\mathbf{R}^l, \delta_t \mathbf{e}^l). \quad (4.42)$$

运用引理 3.5 和 4.3 可得

$$\left| \frac{2\tau}{\eta} \operatorname{Re} \sum_{l=0}^n (\mathbf{R}^l, \delta_t \mathbf{e}^l) \right| \leq C(h^4 + \tau^2)^2. \quad (4.43)$$

将 (4.43) 代入 (4.42), 然后运用引理 3.4 可得: 如果 τ 足够小, 则

$$|\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{e}^n|_1 \leq C(h^4 + \tau^2), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (4.44)$$

从而运用引理 3.8 可得

$$|\mathbf{e}^n|_1 \leq C(h^4 + \tau^2), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (4.45)$$

运用引理 3.1, 从 (4.45) 可得

$$\|\mathbf{e}^n\|_\infty \leq C(h^4 + \tau^2), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (4.46)$$

证毕. $\square$

5 格式 A 的一个迭代算法

本节将给出一个迭代算法用来求解非线性隐格式 A.

对固定的 n , 格式 (2.2)–(2.4) 可写为如下形式:

$$\frac{i}{\tau} A_h(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{\eta}{2} \delta_x \delta_{\bar{x}} (u_j^{n+1} + u_j^n) + A_h B_j^{n+1} = 0, \quad x_j \in \Omega_h, \quad (5.1)$$

$$u_0^{n+1} = u_J^{n+1} = 0, \quad (5.2)$$

其中

$$B_j^{n+1} = \frac{q}{4} (|u_j^n|^2 + |u_j^{n+1}|^2) (u_j^{n+1} + u_j^n).$$

格式 (5.1)–(5.2) 的向量形式为:

$$\frac{i}{\tau} (\mathbf{u}_{in}^{n+1} - \mathbf{u}_{in}^n) + \frac{\eta}{2} \mathbf{H} \delta_x \delta_{\bar{x}} (\mathbf{u}_{in}^{n+1} + \mathbf{u}_{in}^n) + \mathbf{B}_{in}^{n+1} = 0, \quad x_j \in \Omega_h, \quad (5.3)$$

$$u_0^{n+1} = u_J^{n+1} = 0, \quad (5.4)$$

其中

$$\mathbf{B}_{in}^{n+1} = (B_1^{n+1}, B_2^{n+1}, \dots, B_{J-1}^{n+1})^T.$$

记

$$B_j^{n+1(s)} = \frac{q}{4} (|u_j^n|^2 + |u_j^{n+1(s)}|^2) (u_j^{n+1(s)} + u_j^n), \quad x_j \in \Omega_h, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

定义如下迭代算法:

$$\frac{i}{\tau} A_h(u_j^{n+1(s+1)} - u_j^n) + \frac{\eta}{2} \delta_x \delta_{\bar{x}}(u_j^{n+1(s+1)} + u_j^n) + A_h B_j^{n+1(s)} = 0, \\ x_j \in \Omega_h, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (5.5)$$

$$u_0^{n+1(s+1)} = u_J^{n+1(s+1)} = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.6)$$

其中

$$u_j^{(0)} = \begin{cases} u_j^n, & \text{若 } n = 0, \\ 2u_j^n - u_j^{n-1}, & \text{若 } n \geq 1. \end{cases}$$

迭代算法 (5.5)–(5.6) 可写成如下向量形式:

$$\frac{i}{\tau} (\mathbf{u}_{in}^{n+1(s+1)} - \mathbf{u}_{in}^n) + \frac{\eta}{2} \mathbf{H} \delta_x \delta_{\bar{x}} (\mathbf{u}_{in}^{n+1(s+1)} + \mathbf{u}_{in}^n) + \mathbf{B}_{in}^{n+1(s)} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (5.7)$$

$$u_0^{n+1(s+1)} = u_J^{n+1(s+1)} = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.8)$$

记

$$\theta_j^{(s)} = u_j^{n+1} - u_j^{n+1(s)}, \quad x_j \in \Omega_h, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (5.9)$$

则由定理 4.1 可得: 对 $n = 0$,

$$\theta_j^{(0)} = u_j^1 - u_j^0 = (U_j^1 - U_j^0) + (u_j^1 - U_j^1) + (u_j^0 - U_j^0) \\ = O(\tau) + O(\tau^2 + h^4) + 0 = O(\tau + h^4), \quad (5.10)$$

对 $n \geq 1$,

$$\theta_j^{(0)} = u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} \\ = \frac{1}{2}(U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}) + \frac{1}{2}(u_j^{n+1} - U_j^{n+1}) - (u_j^n - U_j^n) + \frac{1}{2}(u_j^{n-1} - U_j^{n-1}) \\ = O(\tau^2) + O(\tau^2 + h^4) + O(\tau^2 + h^4) + O(\tau^2 + h^4) = O(\tau^2 + h^4). \quad (5.11)$$

因此

$$\|\theta^{(0)}\|_{\infty} \leq \begin{cases} C(\tau + h^4), & \text{若 } n = 0, \\ C(\tau^2 + h^4), & \text{若 } n \geq 1. \end{cases} \quad (5.12)$$

定理 5.1 假设 $u_0(x) \in H^1(\Omega)$, $u(x, t) \in C^{6,3}(\Omega \times (0, T])$, h 和 τ 足够小, 则迭代算法 (5.5)–(5.6) 的解收敛到格式 (2.2)–(2.4) 的解.

证明 将 (5.3)–(5.4) 与 (5.7)–(5.8) 相减得

$$\frac{i}{\tau} \theta_{in}^{(s+1)} + \frac{\eta}{2} \mathbf{H} \delta_x \delta_{\bar{x}} \theta_{in}^{(s+1)} + \mathbf{g}_{in}^{(s)} = 0, \quad x_j \in \Omega_h, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (5.13)$$

$$\theta_0^{(s+1)} = \theta_J^{(s+1)} = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.14)$$

其中

$$\mathbf{g}^{(s)} = \mathbf{B}^{n+1} - \mathbf{B}^{n+1(s)}, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

由 (5.12) 得: 对足够小的 τ 和 h 有

$$\|\theta^{(0)}\|_{\infty} \leq \frac{1}{2}. \quad (5.15)$$

现在假设

$$\|\theta^{(s)}\|_{\infty} \leq \frac{1}{2}. \quad (5.16)$$

由引理 4.2 得

$$\|\mathbf{u}^{n+1(s)}\|_{\infty} \leq \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{\infty} + \|\theta^{(s)}\|_{\infty} \leq C_4 + \frac{1}{2}. \quad (5.17)$$

关于 $\mathbf{g}^{(s)}$ 的估计有

$$\begin{aligned} |g_j^{(s)}| &= |B_j^{n+1} - B_j^{n+1(s-1)}| \\ &= \frac{q}{4} (|u_j^n|^2 + |u_j^{n+1(s)}|^2) \theta_j^{(s)} + (|u_j^{n+1}|^2 - |u_j^{n+1(s)}|^2) (u_j^n + u_j^{n+1}) \\ &\leq \frac{q}{8} (7C_4^2 + 1) |\theta_j^{(s)}|. \end{aligned} \quad (5.18)$$

由 (5.18) 得

$$\|\mathbf{g}^{(s)}\| \leq C_5 \|\theta^{(s)}\|, \quad \|\mathbf{g}^{(s)}\|_{\infty} \leq C_5 \|\theta^{(s)}\|_{\infty}, \quad (5.19)$$

其中

$$C_5 = \frac{q}{8} (7C_4^2 + 1).$$

将 (5.13) 与 $h\theta_{in}^{(s+1)}$ 做向量内积, 然后取虚部得

$$\frac{1}{\tau} \|\theta^{(s+1)}\|^2 + \frac{\eta}{2} \text{Im}(\mathbf{H} \delta_x \delta_{\bar{x}} \theta_{in}^{(s+1)}, h\theta_{in}^{(s+1)})_v + \text{Im}(\mathbf{g}_{in}^{(s)}, h\theta_{in}^{(s+1)})_v = 0. \quad (5.20)$$

对 (5.20) 式左端最后两项有

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{2} \text{Im}(\mathbf{H} \delta_x \delta_{\bar{x}} \theta_{in}^{(s+1)}, h\theta_{in}^{(s+1)})_v &= \frac{\eta}{2} \text{Im}(\widetilde{\mathbf{H}} \delta_x \delta_{\bar{x}} \theta^{(s+1)}, \theta^{(s+1)}) \\ &= -\frac{\eta}{2} \text{Im}(\widetilde{\mathbf{R}} \delta_x \theta^{(s+1)}, \widetilde{\mathbf{R}} \delta_x \theta^{(s+1)}) = 0, \end{aligned} \quad (5.21)$$

以及

$$|\text{Im}(\mathbf{g}_{in}^{(s)}, h\theta_{in}^{(s+1)})_v| = |\text{Im}(\mathbf{g}^{(s)}, \theta^{(s+1)})| \leq \|\mathbf{g}^{(s)}\| \cdot \|\theta^{(s+1)}\| \leq C_5 \|\theta^{(s)}\| \cdot \|\theta^{(s+1)}\|. \quad (5.22)$$

将 (5.21) 和 (5.22) 代入 (5.20) 得

$$\|\theta^{(s+1)}\| \leq C_5 \tau \|\theta^{(s)}\|. \quad (5.23)$$

将 (5.13) 与 $h\theta_{in}^{(s+1)}$ 做向量内积, 然后取实部得

$$\frac{\eta}{2} \text{Re}(\mathbf{H} \delta_x \delta_{\bar{x}} \theta_{in}^{(s+1)}, h\theta_{in}^{(s+1)})_v + \text{Re}(\mathbf{g}_{in}^{(s)}, h\theta_{in}^{(s+1)})_v = 0. \quad (5.24)$$

对 (5.24) 式前两项有

$$\begin{aligned} -\frac{\eta}{2}\operatorname{Re}(\mathbf{H}\delta_x\delta_{\bar{x}}\boldsymbol{\theta}_{in}^{(s+1)}, h\boldsymbol{\theta}_{in}^{(s+1)})_v &= -\frac{\eta}{2}\operatorname{Re}(\widetilde{\mathbf{H}}\delta_x\delta_{\bar{x}}\boldsymbol{\theta}^{(s+1)}, \boldsymbol{\theta}_{in}^{(s+1)}) \\ &= \frac{\eta}{2}|\widetilde{\mathbf{R}}\boldsymbol{\theta}_{in}^{(s+1)}|_1^2 \geq \frac{\eta}{2}C_0|\boldsymbol{\theta}_{in}^{(s+1)}|_1^2, \end{aligned} \quad (5.25)$$

以及

$$|\operatorname{Re}(\mathbf{g}_{in}^{(s)}, h\boldsymbol{\theta}_{in}^{(s+1)})_v| = |\operatorname{Re}(\mathbf{g}^{(s)}, \boldsymbol{\theta}^{(s+1)})| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|\boldsymbol{\theta}^{(s+1)}\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|\mathbf{g}^{(s)}\|^2 \leq \frac{C_5^2\tau^2\varepsilon}{2}\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\| + \frac{C_5^2}{2\varepsilon}\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\|, \quad (5.26)$$

其中用到引理 3.8 及 (5.19) 和 (5.23). 将 (5.25) 和 (5.26) 代入 (5.24) 并取 $\varepsilon = \frac{1}{\tau}$, 得

$$|\boldsymbol{\theta}^{(s+1)}|_1^2 \leq \frac{2C_5^2\tau}{\eta C_0}\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\|^2 \leq \frac{2C_5}{\eta C_0}(C_5\tau)^{s+1}\|\boldsymbol{\theta}^{(0)}\|^2. \quad (5.27)$$

因此, 对 $\tau < \frac{1}{C_5}$, 有

$$|\boldsymbol{\theta}^{(s+1)}|_1 \rightarrow 0, \quad \text{当 } s \rightarrow \infty. \quad (5.28)$$

运用引理 3.1 和 (5.28), 对 $\tau < \frac{1}{C_5}$, 可得

$$\|\boldsymbol{\theta}^{(s)}\|_\infty \leq \frac{x_R - x_L}{2}|\boldsymbol{\theta}^{(s+1)}|_1 \rightarrow 0, \quad \text{当 } s \rightarrow \infty. \quad (5.29)$$

证毕. $\square$

从 (5.12) 可见, 对 $1 \leq n \leq N-1$ 只要一步迭代即可达到格式的收敛阶要求. 由此可得如下线性化紧致差分格式:

格式 C

$$\begin{aligned} i\delta_t A_h u_j^n + \eta\delta_x\delta_{\bar{x}}u_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{q}{2}A_h[|u_j^n|^2 + |2u_j^n - u_j^{n-1}|^2]\left(\frac{3}{2}u_j^n - \frac{1}{2}u_j^{n-1}\right) &= 0, \\ (x_j, t_n) &\in \Omega_h \times \Omega'_\tau, \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad x_j \in \Omega_h, \quad (5.31)$$

$$u_0^n = u_J^n = 0, \quad t_n \in \overline{\Omega}_\tau. \quad (5.32)$$

显见, 该格式为一个线性化 Crank-Nicolson 型格式, 其截断误差为 $O(h^4 + \tau^2)$. 在该格式中, (2.2) 中的非线性项 $(|u_j^n|^2 + |u_j^{n+1}|^2)u_j^{n+\frac{1}{2}}$ 外推为

$$(|u_j^n|^2 + |2u_j^n - u_j^{n-1}|^2)\left(\frac{3}{2}u_j^n - \frac{1}{2}u_j^{n-1}\right).$$

为获得 u_j^{n+1} , 只需求解一个线性化代数方程组. 因此, 格式 (5.30)–(5.32) 可望更为高效.

需要指出的是, 格式 C 不能自启动, 需要另外一个两层格式来计算 u^1 . 由初值条件 (5.31) 得 u^0 , 由 (2.2) 算得 u^1 . 如果 u^n ($n = 0, 1, 2, \dots$) 已知, 则由 (5.30) 可算得 u^{n+1} , 一直计算到 $n+1 = N$.

6 格式 B 的数值分析

本节讨论线性化格式 B 的离散守恒律和依最大模的 $O(h^4 + \tau^2)$ 阶无条件收敛性.

6.1 离散守恒律

与 (1.7)–(1.8) 相应的, 格式 B 具有如下的离散守恒性质:

引理 6.1 假设 $u_0 \in H^1(\Omega)$, 则格式 B 的差分解关于离散质量和离散能量有如下形式的守恒律:

$$Q^n = Q^{n-1} = \cdots = Q^0, \quad (6.1)$$

$$E^n = E^{n-1} = \cdots = E^0, \quad (6.2)$$

其中

$$Q^n = \|\mathbf{u}^n\|^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N,$$

$$E^n = \frac{\eta}{4}(|\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{u}^n|_1^2 + |\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{u}^{n+1}|_1^2) - \frac{q}{4}h \sum_{j=1}^{J-1} |u_j^n|^2 |u_j^{n+1}|^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N,$$

即为所谓的离散质量和离散能量.

证明 将 (2.12) 与 $2hA_\tau \mathbf{u}_{in}^n$ 作向量内积, 然后取虚部, 得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\tau}(\|\mathbf{u}^{n+1}\|^2 - \|\mathbf{u}^{n-1}\|^2) + 2\eta \operatorname{Im}(\mathbf{H}\delta_x \delta_{\bar{x}} A_\tau \mathbf{u}_{in}^n, hA_\tau \mathbf{u}_{in}^n)_v \\ & + 2q \operatorname{Im}(|\mathbf{u}_{in}^n|^2 A_\tau \mathbf{u}_{in}^n, hA_\tau \mathbf{u}_{in}^n)_v = 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

由向量内积和离散内积的定义, 并运用引理 3.7 可得

$$2\eta \operatorname{Im}(\mathbf{H}\delta_x \delta_{\bar{x}} A_\tau \mathbf{u}_{in}^n, hA_\tau \mathbf{u}_{in}^n)_v = 2\eta \operatorname{Im}(\widetilde{\mathbf{H}}\delta_x \delta_{\bar{x}} A_\tau \mathbf{u}^n, A_\tau \mathbf{u}^n) = 0, \quad (6.4)$$

$$2q \operatorname{Im}(|\mathbf{u}_{in}^n|^2 A_\tau \mathbf{u}_{in}^n, hA_\tau \mathbf{u}_{in}^n)_v = 2q \operatorname{Im}(|\mathbf{u}^n|^2 A_\tau \mathbf{u}^n, A_\tau \mathbf{u}^n) = 0. \quad (6.5)$$

将 (6.4) 和 (6.5) 代入 (6.3), 得

$$\frac{1}{2\tau}(\|\mathbf{u}^{n+1}\|^2 - \|\mathbf{u}^{n-1}\|^2) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \quad (6.6)$$

将 (2.14) 与 $2h\mathbf{u}_{in}^{\frac{1}{2}}$ 作向量内积, 然后取虚部得

$$\frac{1}{\tau}(\|\mathbf{u}^1\|^2 - \|\mathbf{u}^0\|^2) = 0. \quad (6.7)$$

从而由 (6.6) 和 (6.7) 可得 (6.1).

将 (2.12) 与 $-\frac{h}{2}(\mathbf{u}_{in}^{n+1} - \mathbf{u}_{in}^{n-1})$ 作向量内积, 然后取实部, 得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\tau} \operatorname{Im}(\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n-1}\|^2) - \frac{\eta}{4} \operatorname{Re}(\mathbf{H}\delta_x \delta_{\bar{x}}(\mathbf{u}_{in}^{n+1} + \mathbf{u}_{in}^{n-1}), h(\mathbf{u}_{in}^{n+1} - \mathbf{u}_{in}^{n-1}))_v \\ & - \frac{q}{4} \operatorname{Re}(|\mathbf{u}_{in}^n|^2(\mathbf{u}_{in}^{n+1} + \mathbf{u}_{in}^{n-1}), h(\mathbf{u}_{in}^{n+1} - \mathbf{u}_{in}^{n-1}))_v = 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

对 (6.8) 式的第二项, 运用引理 3.7 可得

$$\begin{aligned} & -\frac{\eta}{4} \operatorname{Re}(\mathbf{H}\delta_x \delta_{\bar{x}}(\mathbf{u}_{in}^{n+1} + \mathbf{u}_{in}^{n-1}), h(\mathbf{u}_{in}^{n+1} - \mathbf{u}_{in}^{n-1}))_v \\ & = -\frac{\eta}{4} \operatorname{Re}(\widetilde{\mathbf{H}}\delta_x \delta_{\bar{x}}(\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^{n-1}), \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n-1}) \\ & = \frac{\eta}{4}(|\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{u}^{n+1}|_1^2 - |\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{u}^{n-1}|_1^2). \end{aligned} \quad (6.9)$$

对 (6.8) 式的第三项, 有

$$\begin{aligned} & -\frac{q}{4}\operatorname{Re}(|\mathbf{u}_{in}^n|^2(\mathbf{u}_{in}^{n+1} + \mathbf{u}_{in}^{n-1}), h(\mathbf{u}_{in}^{n+1} - \mathbf{u}_{in}^{n-1}))_v \\ & = -\frac{q}{4}\operatorname{Re}(|\mathbf{u}^n|^2(\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^{n-1}), \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \\ & = -\frac{q}{4}h \sum_{j=1}^{J-1} |u_j^n|^2(|u_j^{n+1}|^2 - |u_j^{n-1}|^2). \end{aligned} \quad (6.10)$$

将 (6.9) 和 (6.10) 代入 (6.8) 即得 (6.2). $\square$

6.2 先验估计

为证明格式的收敛性, 我们需要如下的先验估计:

引理 6.2 假设 $u_0 \in H^1(\Omega)$, 则格式 B 的差分解满足

$$\|\mathbf{u}^n\| \leq C_6, \quad |\mathbf{u}^n|_1 \leq C_7, \quad \|\mathbf{u}^n\|_\infty \leq C_8. \quad (6.11)$$

证明 由 (6.1) 立得

$$\|\mathbf{u}^n\| \leq C_6, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (6.12)$$

利用引理 3.8 可得

$$\frac{\eta}{2}|\mathbf{R}\mathbf{u}^n|_1^2 = \frac{\eta}{2}(\widetilde{\mathbf{H}}\delta_x \mathbf{u}^n, \delta_x \mathbf{u}^n) = \frac{\eta}{2}(\mathbf{H}\delta_x \mathbf{u}_{in}^n, \delta_x \mathbf{u}_{in}^n) \geq \frac{\eta}{2}C_0|\mathbf{u}^n|_1^2. \quad (6.13)$$

利用引理 3.2 和 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\begin{aligned} h \sum_{j=1}^{J-1} |u_j^n|^2 |u_j^{n+1}|^2 & \leq \|\mathbf{u}^n\|_\infty^2 \|\mathbf{u}^{n+1}\|^2 \leq c^2(|\mathbf{u}^n|_1^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}^n\|^{\frac{1}{2}} + \|\mathbf{u}^n\|)^2 \|\mathbf{u}^{n+1}\|^2 \\ & \leq 2c^2 C_6^2 (|\mathbf{u}^n|_1 \|\mathbf{u}^n\| + \|\mathbf{u}^n\|^2) \\ & \leq \varepsilon |\mathbf{u}^n|_1^2 + \frac{c^4 C_6^4}{\varepsilon} \|\mathbf{u}^n\|^2 + 2c^2 C_6^2 \|\mathbf{u}^n\|^2 \\ & \leq \varepsilon |\mathbf{u}^n|_1^2 + \frac{c^4 C_6^6}{\varepsilon} + 2c^2 C_6^4. \end{aligned} \quad (6.14)$$

取 $\varepsilon = \eta C_0/2q$, 则由 (6.13)–(6.14) 及 (6.2) 可得

$$|\mathbf{u}^n|_1 \leq C_7. \quad (6.15)$$

利用引理 3.1, 由 (6.15) 可得

$$\|\mathbf{u}^n\|_\infty \leq C_8. \quad (6.16)$$

证毕. $\square$

6.3 最大模无条件收敛性

记截断误差 $\mathbf{R}^n = (R_0^n, R_1^n, \dots, R_J^n) \in \mathbb{V}_h$ 为

$$i\delta_t \mathbf{U}_{in}^n + \eta \mathbf{H} \delta_x \delta_{\bar{x}} A_\tau \mathbf{U}_{in}^n + q |\mathbf{U}_{in}^n|^2 A_\tau \mathbf{U}_{in}^n = \mathbf{R}_{in}^n, \quad t_n \in \Omega'_\tau, \quad (6.17)$$

$$i\delta_t \mathbf{U}_{in}^0 + \eta \mathbf{H} \delta_x \delta_{\bar{x}} \mathbf{U}_{in}^{\frac{1}{2}} + \frac{q}{2} (|\mathbf{U}_{in}^0|^2 + |\mathbf{U}_{in}^1|^2) \mathbf{U}_{in}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{R}_{in}^0, \quad (6.18)$$

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad x_j \in \bar{\Omega}_h, \quad (6.19)$$

$$u_j^n = 0, \quad (x_j, t_n) \in \partial\Omega_h \times \bar{\Omega}_\tau, \quad (6.20)$$

其中, $\mathbf{R}_{in}^n = (R_1^n, R_2^n, \dots, R_{J-1}^n)$.

根据 Taylor 展开可得如下结果:

引理 6.3 假设 $u_0 \in H^1(\Omega)$ 且 $u \in C^{6,3}(\Omega \times (0, T])$, 则存在正常数 C_R 使得

$$|R_j^n| \leq C_R(h^4 + \tau^2), \quad 1 \leq j \leq J-1, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (6.21)$$

$$|\delta_t R_j^n| \leq C_R(h^4 + \tau^2), \quad 1 \leq j \leq J-1, \quad 1 \leq n \leq N-1. \quad (6.22)$$

定理 3.1 假设 $u_0 \in H^1(\Omega)$, $u \in C^{6,3}(\Omega \times (0, T])$, 且 τ 足够小, 则格式 B 的解 u_j^n 依 L_∞ 范数收敛到初边值问题 (1.4)–(1.6) 的解 U_j^n , 收敛阶为 $O(h^4 + \tau^2)$.

证明 记

$$\mathbf{e}^n = \mathbf{U}^n - \mathbf{u}^n, \quad 0 \leq n \leq N.$$

将 (6.17)–(6.20) 与 (2.12)–(2.15) 相减得如下误差方程:

$$i\delta_t \mathbf{e}_{in}^n + \eta \mathbf{H} \delta_x \delta_{\bar{x}} A_\tau \mathbf{e}_{in}^n + q \mathbf{G}_{in}^{n+1} = \mathbf{R}_{in}^n, \quad t_n \in \Omega'_\tau, \quad (6.23)$$

$$i\delta_t \mathbf{e}_{in}^0 + \eta \mathbf{H} \delta_x \delta_{\bar{x}} \mathbf{e}_{in}^{\frac{1}{2}} + \frac{q}{2} \mathbf{G}_{in}^1 = \mathbf{R}_{in}^0, \quad (6.24)$$

$$e_j^0 = 0, \quad x_j \in \bar{\Omega}_h, \quad (6.25)$$

$$e_j^n = 0, \quad (x_j, t_n) \in \partial\Omega_h \times \bar{\Omega}_\tau. \quad (6.26)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{in}^{n+1} &= |\mathbf{U}_{in}^n|^2 A_\tau \mathbf{U}_{in}^n - |\mathbf{u}_{in}^n|^2 A_\tau \mathbf{u}_{in}^n \\ &= (|\mathbf{U}_{in}^n|^2 - |\mathbf{u}_{in}^n|^2) A_\tau \mathbf{U}_{in}^n + |\mathbf{u}_{in}^n|^2 A_\tau \mathbf{e}_{in}^n \\ &= (\mathbf{U}_{in}^n \bar{\mathbf{e}}_{in}^n + \mathbf{e}_{in}^n \bar{\mathbf{u}}_{in}^n) A_\tau \mathbf{U}_{in}^n + |\mathbf{u}_{in}^n|^2 A_\tau \mathbf{e}_{in}^n, \quad t_n \in \Omega'_\tau, \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$\mathbf{G}_{in}^1 = (\mathbf{U}_{in}^1 \bar{\mathbf{e}}_{in}^1 + \mathbf{e}_{in}^1 \bar{\mathbf{u}}_{in}^1) \mathbf{U}_{in}^{n+\frac{1}{2}} + (|\mathbf{u}_{in}^0|^2 + |\mathbf{u}_{in}^1|^2) \mathbf{e}_{in}^{\frac{1}{2}}. \quad (6.28)$$

注意到 $G_0^n = G_J^n = 0$, 则由 (6.27)–(6.28) 和引理 6.2 可得

$$\|\mathbf{G}^{n+1}\|^2 \leq C(\|\mathbf{e}^{n-1}\|^2 + \|\mathbf{e}^n\|^2 + \|\mathbf{e}^{n+1}\|^2). \quad (6.29)$$

类似地, 有

$$|\mathbf{G}^{n+1}|_1^2 \leq C(\|\mathbf{e}^{n-1}\|^2 + \|\mathbf{e}^n\|^2 + \|\mathbf{e}^{n+1}\|^2 + |\mathbf{e}^{n-1}|_1^2 + |\mathbf{e}^n|_1^2 + |\mathbf{e}^{n+1}|_1^2). \quad (6.30)$$

将 (6.23) 与 $hA_\tau e_{in}^n$ 作向量内积, 然后取实部, 得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau}(\|e^{n+1}\|^2 - \|e^{n-1}\|^2) + 4\eta \operatorname{Im}(\mathbf{H}\delta_x \delta_{\bar{x}} A_\tau e_{in}^n, hA_\tau e_{in}^n)_v + 4q \operatorname{Im}(\mathbf{G}_{in}^{n+1}, hA_\tau e_{in}^n)_v \\ & = 4\operatorname{Im}(\mathbf{R}_{in}^n, hA_\tau e_{in}^n)_v, \quad t_n \in \Omega'_\tau. \end{aligned} \quad (6.31)$$

对 (6.31) 式的最后三项, 有

$$4\eta \operatorname{Im}(\mathbf{H}\delta_x \delta_{\bar{x}} A_\tau e_{in}^n, hA_\tau e_{in}^n)_v = 4\eta \operatorname{Im}(\widetilde{\mathbf{H}}\delta_x \delta_{\bar{x}} A_\tau e^n, A_\tau e^n) = 0, \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned} |4q \operatorname{Im}(\mathbf{G}_{in}^{n+1}, hA_\tau e_{in}^n)_v| &= |4q \operatorname{Im}(\mathbf{G}^{n+1}, A_\tau e^n)| \leq 2q(\|\mathbf{G}^{n+1}\|^2 + \|A_\tau e^n\|^2) \\ &\leq C(\|e^{n-1}\|^2 + \|e^n\|^2 + \|e^{n+1}\|^2), \end{aligned} \quad (6.33)$$

$$|4\operatorname{Im}(\mathbf{R}_{in}^n, hA_\tau e_{in}^n)_v| = |4\operatorname{Im}(\widetilde{\mathbf{R}}^n, A_\tau e^n)| \leq \|\mathbf{R}^n\|^2 + 2(\|e^{n-1}\|^2 + \|e^{n+1}\|^2). \quad (6.34)$$

将 (6.32)–(6.34) 代入 (6.31) 可得

$$\frac{1}{\tau}(\|e^{n+1}\|^2 - \|e^{n-1}\|^2) \leq \|\mathbf{R}^n\|^2 + C(\|e^{n-1}\|^2 + \|e^n\|^2 + \|e^{n+1}\|^2). \quad (6.35)$$

记

$$B^n = \|e^n\|^2 + \|e^{n+1}\|^2, \quad (6.36)$$

则由 (6.35) 可得

$$(B^n - B^{n-1}) \leq \tau \|\mathbf{R}^n\|^2 + C\tau(B^n + B^{n-1}). \quad (6.37)$$

利用引理 3.3、定理 4.1 (当 $n=1$ 时) 和引理 6.3, 由 (6.36) 和 (6.37) 可得: 对足够小的 τ , 有

$$\|e^n\| \leq C(h^4 + \tau^2), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (6.38)$$

将 (6.23) 与 $h\delta_{\bar{t}} e_{in}^n$ 作向量内积, 然后取实部, 得

$$\eta \operatorname{Re}(\mathbf{H}\delta_x \delta_{\bar{x}} A_\tau e_{in}^n, h\delta_{\bar{t}} e_{in}^n)_v + q \operatorname{Re}(\mathbf{G}_{in}^{n+1}, h\delta_{\bar{t}} e_{in}^n)_v = \operatorname{Re}(\mathbf{R}_{in}^n, h\delta_{\bar{t}} e_{in}^n)_v. \quad (6.39)$$

对 (6.39) 式的第一项, 利用引理 3.7, 得

$$\eta \operatorname{Re}(\mathbf{H}\delta_x \delta_{\bar{x}} A_\tau e_{in}^n, h\delta_{\bar{t}} e_{in}^n)_v = \eta \operatorname{Re}(\widetilde{\mathbf{H}}\delta_x \delta_{\bar{x}} A_\tau e^n, \delta_{\bar{t}} e^n) = -\frac{\eta}{4\tau}(|\widetilde{\mathbf{R}}e^{n+1}|_1^2 - |\widetilde{\mathbf{R}}e^{n-1}|_1^2). \quad (6.40)$$

由 (6.23) 可得

$$\delta_{\bar{t}} e_{in}^n = i\eta \mathbf{H}\delta_x \delta_{\bar{x}} A_\tau e_{in}^n + iq \mathbf{G}_{in}^{n+1} - i\mathbf{R}_{in}^n, \quad t_n \in \Omega_\tau, \quad (6.41)$$

从而对 (6.39) 式的第二项, 有

$$\begin{aligned} q \operatorname{Re}(\mathbf{G}_{in}^{n+1}, h\delta_{\bar{t}} e_{in}^n)_v &= q \operatorname{Re}(\mathbf{G}_{in}^{n+1}, i\eta \mathbf{H}\delta_x \delta_{\bar{x}} A_\tau e_{in}^n + iq \mathbf{G}_{in}^{n+1} - i\mathbf{R}_{in}^n) \\ &= -q \operatorname{Im}(\mathbf{G}^{n+1}, \eta \widetilde{\mathbf{H}}\delta_x \delta_{\bar{x}} A_\tau e^n) + q \operatorname{Im}(\mathbf{G}^{n+1}, \mathbf{R}^n) \\ &= q\eta \operatorname{Im}(\widetilde{\mathbf{R}}\delta_x \mathbf{G}_{in}^{n+1}, \widetilde{\mathbf{R}}\delta_x A_\tau e^n) + q \operatorname{Im}(\mathbf{G}^{n+1}, \widetilde{\mathbf{R}}^n). \end{aligned} \quad (6.42)$$

对 (6.42) 式的最后两项, 运用 Cauchy-Schwarz 不等式、引理 3.8 和 6.3, 可得

$$\begin{aligned}
 & q\eta \operatorname{Im}(\tilde{\mathbf{R}}\delta_x \mathbf{G}^{n+1}, \tilde{\mathbf{R}}\delta_x A_\tau \mathbf{e}^n) \\
 & \leq \frac{\eta q}{2} \|\tilde{\mathbf{R}}\delta_x \mathbf{G}^{n+1}\|^2 + \frac{\eta q}{2} \|\tilde{\mathbf{R}}\delta_x A_\tau \mathbf{e}^n\|^2 \\
 & \leq \frac{\eta q C_1}{2} |\mathbf{G}^{n+1}|_1^2 + \frac{\eta q C_1}{4} (|\mathbf{e}^{n-1}|_1^2 + |\mathbf{e}^{n+1}|_1^2) \\
 & \leq C(\|\mathbf{e}^{n-1}\|^2 + \|\mathbf{e}^n\|^2 + \|\mathbf{e}^{n+1}\|^2 + |\mathbf{e}^{n-1}|_1^2 + |\mathbf{e}^n|_1^2 + |\mathbf{e}^{n+1}|_1^2) \\
 & \leq C(\|\mathbf{e}^{n-1}\|^2 + \|\mathbf{e}^n\|^2 + \|\mathbf{e}^{n+1}\|^2 + |\mathbf{R}\mathbf{e}^{n-1}|_1^2 + |\mathbf{R}\mathbf{e}^n|_1^2 + |\mathbf{R}\mathbf{e}^{n+1}|_1^2), \tag{6.43}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q\operatorname{Im}(\mathbf{G}^{n+1}, \mathbf{R}^n) & \leq \frac{q}{2} \|\mathbf{G}^{n+1}\|^2 + \frac{q}{2} \|\tilde{\mathbf{R}}^n\|^2 \\
 & \leq C(\|\mathbf{e}^{n-1}\|^2 + \|\mathbf{e}^n\|^2 + \|\mathbf{e}^{n+1}\|^2) + C(h^4 + \tau^2)^2. \tag{6.44}
 \end{aligned}$$

由 (6.38)–(6.40) 和 (6.42)–(6.44) 可得

$$\begin{aligned}
 |\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{e}^{n+1}|_1^2 - |\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{e}^{n-1}|_1^2 & \leq C\tau(|\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{e}^{n-1}|_1^2 + |\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{e}^n|_1^2 + |\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{e}^{n+1}|_1^2) \\
 & \quad + C\tau(h^4 + \tau^2)^2 - \frac{4\tau}{\eta} \operatorname{Re}(\mathbf{R}^n, \delta_t \mathbf{e}^n). \tag{6.45}
 \end{aligned}$$

对 n 从 1 到 m 求和, 然后用 n 代替 m , 得

$$\begin{aligned}
 & |\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{e}^{n+1}|_1^2 + |\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{e}^n|_1^2 - |\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{e}^1|_1^2 - |\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{e}^0|_1^2 \\
 & \leq C\tau \sum_{l=0}^{n+1} |\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{e}^l|_1^2 + CT(h^4 + \tau^2)^2 - \frac{4\tau}{\eta} \operatorname{Re} \sum_{l=1}^n (\tilde{\mathbf{R}}^l, \delta_t \mathbf{e}^l). \tag{6.46}
 \end{aligned}$$

运用引理 3.6, 可得

$$\left| \frac{4\tau}{\eta} \operatorname{Re} \sum_{l=1}^n (\mathbf{R}^l, \delta_t \mathbf{e}^l) \right| \leq C(h^4 + \tau^2)^2. \tag{6.47}$$

将 (6.47) 代入 (6.46), 然后利用引理 3.4 和定理 4.1 (当 $n = 1$ 时), 可得

$$|\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{e}^n|_1 \leq C(h^4 + \tau^2), \quad n = 1, 2, \dots, N. \tag{6.48}$$

由引理 3.8 可得

$$|\mathbf{e}^n|_1 \leq C(h^4 + \tau^2), \quad n = 1, 2, \dots, N. \tag{6.49}$$

运用引理 3.1, 由 (6.49) 可得

$$\|\mathbf{e}^n\|_\infty \leq C(h^4 + \tau^2), \quad n = 1, 2, \dots, N. \tag{6.50}$$

证毕. □

7 数值算例

本节将通过两个算例来验证算法的离散守恒性、绝对稳定性和无条件收敛性, 检验迭代算法的可行性, 并模拟两个孤立波的碰撞行为. 在运用格式 A 进行计算时, 我们取迭代控制参数为 $\varepsilon = 10^{-8}$.

图 1 运用格式 A 对算例 1 进行计算时所得数值解的最大模收敛阶

算例 1 考虑三次非线性 Schrödinger 方程

$$i \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + 2|u(x, t)|^2 u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in R \times [0, T],$$

其初值条件为

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= e^{2ix} \operatorname{sech}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x, t) &= \operatorname{sech}(x - 4t) \exp(2ix - 3it). \end{aligned}$$

因为 $u(x, t)$ 随 $|x| \rightarrow \infty$ 迅速向 0 衰减, 因此对足够大的 $-x_L$ 和 x_R 及有限时间 T , 无界域初值问题与初边值问题是相容的. 即求解如下初边值问题:

$$i \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + 2|u(x, t)|^2 u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T], \quad (7.1)$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (7.2)$$

$$u(x, 0) = e^{2ix} \operatorname{sech}(x), \quad x \in \overline{\Omega}. \quad (7.3)$$

此处分别用格式 A、格式 B 和格式 C 对初边值问题 (7.1)–(7.3) 在有界域 $\Omega = (-40, 40)$ 上进行计算.

为了检验算法的 $O(h^4 + \tau^2)$ 阶最大模收敛性, 计算中令 $\tau = h^2$ 来检验空间方向的四阶精度, 并取足够小的 h 来检验时间方向的二阶精度. 图 1–3 是取 $\tau = h^2$ 的 $\log(\|e^n\|_\infty) - \log(h)$ 图和取足够小 h 的 $\log(\|e^n\|_\infty) - \log(\tau)$ 图. 由图 1–3 可见, 所有三个格式都以最大模范数收敛, 收敛阶均为 $O(h^4 + \tau^2)$.

图 2 运用格式 B 对算例 1 进行计算时所得数值解的最大模收敛阶

图 3 运用格式 C 对算例 1 进行计算时所得数值解的最大模收敛阶

图 4 运用格式 A 和格式 B 对算例 1 进行计算所得的离散质量和离散能量

图 4 给出格式 A 和格式 B 对算例 1 计算所得差分解的离散质量和离散能量, 它表明两个格式都具有极好的守恒性质.

表 1-4 列出了三个格式对算例 1 进行计算的精度和效率比较. 不难看出, 格式 A 的精度最高, 格

表 1 运用三个格式分别对算例 1 进行计算所得数值解精度的比较

h	格式 A	格式 B	格式 C
0.2	2.4540E-002	1.2603E-001	9.6745E-002
0.1	1.4994E-003	7.0810E-003	6.3233E-003
0.05	9.3625E-005	4.4162E-004	4.0014E-004
0.025	5.8506E-006	2.7613E-005	2.5099E-005

表 2 用三个格式分别对算例 1 进行计算所得数值解精度的比较

τ	格式 A	格式 B	格式 C
0.05	3.4642E-002	2.0314E-001	1.4266E-001
0.025	8.4777E-003	4.4100E-002	3.7500E-002
0.0125	2.1080E-003	1.0800E-002	9.5607E-003
0.00625	5.2632E-004	2.6905E-003	2.4155E-003

表 3 用三个格式分别对算例 1 进行计算所得数值解效率的比较及迭代算法的平均迭代次数

h	格式 A	格式 B	格式 C	平均迭代步
0.2	0.4 s	0.5 s	0.1 s	7
0.1	2.4 s	4.5 s	0.5 s	5
0.05	11.8 s	36.4 s	3.9 s	3
0.025	91.8 s	284.7 s	29.1 s	3

表 4 用三个格式分别对算例 1 进行计算所得数值解效率的比较及迭代算法的平均迭代次数

τ	格式 A	格式 B	格式 C	平均迭代步
0.05	8.2 s	11.3 s	1.7 s	8
0.025	11.7 s	19.6 s	2.6 s	6
0.0125	19.3 s	37.2 s	4.3 s	5
0.00625	30.8 s	72.9 s	8.6 s	4

式 C 的效率最高, 而格式 B 虽然是一个线性化格式, 但它的精度和效率都是最差的. 究其原因, 我们认为: 虽然由格式 A 所生成的代数方程组 $AU^{n+1(s+1)} = D^{n+1(s)}$ 是非线性的, 但系数矩阵 A 在每一时间层都是不变的, 因此计算中只需赋值一次; 而由格式 B 所生成的代数方程组 $A^n U^{n+1} = D^n$ 虽然在每一时间层都是线性的, 但系数矩阵 A^n 在每一层都是变化的, 这在计算中需要对其重复赋值. 另外一个原因就是给出的迭代算法 (5.5)–(5.6) 具有很高的计算效率.

从表 1–4 可见, 虽然三个格式的收敛阶相同, 都是 $C(h^4 + \tau^2)$, 但精度并不一样, 这是因为对不同的格式, 系数 C 也不一样. 易见, 因为格式 C 的精度只是格式 A 的一次迭代, 因此格式 C 远不如格式 A 的精度.

为了检验迭代算法 (5.5)–(5.6) 的可行性, 我们在表 3–4 列出了对算例 1 进行计算时的平均迭代步数, 它表明 τ 和 h 越小, 迭代次数就越少.

为了进一步提高算法的精度, 我们引进 Richardson 外推技巧^[44]. Richardson 外推可通过对不同网格下所得差分解的线性组合得到更高的精度. 它的主要优点是在保持原算法稳定性的基础上进一步提高了数值精度. 令 $u_j^n(h, \tau)$ 表示数值解 u_j^n 取网格步长 h 和 τ 时在点 (x_j, t_n) 的值, $u_{2j}^{2n}(\frac{h}{2}, \frac{\tau}{2})$ 表示数值解 u_{2j}^{2n} 取网格步长 $\frac{h}{2}$ 和 $\frac{\tau}{2}$ 时在点 (x_j, t_n) 的值, $u_{2j}^{4n}(\frac{h}{2}, \frac{\tau}{4})$ 表示数值解 u_{2j}^{4n} 取网格步长 $\frac{h}{2}$ 和 $\frac{\tau}{4}$ 时在点 (x_j, t_n) 的值. 记

$$(u_{FE})_j^n = \frac{4}{3}u_{2j}^{2n}\left(\frac{h}{2}, \frac{\tau}{2}\right) - \frac{1}{3}u_j^n(h, \tau), \quad (7.4)$$

$$(u_{SE})_j^n = \frac{16}{15}u_{2j}^{4n}\left(\frac{h}{2}, \frac{\tau}{4}\right) - \frac{1}{15}u_j^n(h, \tau), \quad (7.5)$$

及

$$(e_{FE})_j^n = U_j^n - (u_{FE})_j^n, \quad (7.6)$$

$$(e_{SE})_j^n = U_j^n - (u_{SE})_j^n. \quad (7.7)$$

通过文献 [40] 可知

$$(e_{FE})_j^n = O(h^4 + \tau^4), \quad (7.8)$$

$$(e_{SE})_j^n = O(h^6 + \tau^4). \quad (7.9)$$

表 5 将 Richardson 外推 (7.4) 用于格式 A 对算例 1 计算时的误差和收敛阶

h	τ	$\ e_{FE}^N\ _\infty$	收敛阶
0.1	0.1	2.0377E-002	—
0.05	0.05	9.3591E-004	4.44
0.025	0.025	5.2768E-005	4.15
0.0125	0.0125	3.2516E-006	4.02

表 6 将 Richardson 外推 (7.5) 用于格式 B 对算例 1 计算时的误差和收敛阶

h	$\ e^N\ _\infty$	收敛阶	$\ e_{SE}^N\ _\infty$	收敛阶
0.2	3.9982E-002	—	6.4265E-004	—
0.1	2.7462E-003	3.8638	6.5662E-006	6.6128
0.05	1.7505E-004	3.9716	8.9343E-008	6.1996
0.025	1.0996E-005	3.9827	1.3478E-009	6.0507
0.0125	6.8817E-007	3.9981	—	—

图 5 运用格式 C 模拟算例 2 中的双孤立波碰撞

为了验证上述两个 Richardson 外推算法的可行性, 在计算算例 1 时, 将 (7.4) 用于格式 A, 将 (7.5) 用于格式 C, 数值结果列于表 5–6. 从表 5 和 6 可见 (7.8) 和 (7.9) 都是可行的.

算例 2 考察两个孤立波的碰撞行为.

$$u(-10, t) = u(40, t) = 0, \quad t \in [0, 6],$$

$$u(x, 0) = \operatorname{sech}(x) \exp(2ix) + \operatorname{sech}(x - 15) \exp(0.05i(x - 15)), \quad x \in [-10, 40].$$

由初值条件可生成一个双孤立波, 当 $t = 0$ 时两个孤立波相距 10 个单位长度, 随时间变化, 快孤立波将追上慢波并在碰撞后超过慢波, 这中间只有一个相位的变化. 这与孤立波的理论 [12, 45, 15] 是相符的, 见图 5.

8 结论及进一步的问题

本文对一维非线性 Schrödinger 方程给出两个紧格式, 利用离散能量法对算法的守恒性、稳定性和收敛性进行了分析. 两个格式都依最大模范数无条件收敛, 收敛阶均为 $O(h^4 + \tau^2)$. 证明了两个算法关于离散质量和离散能量都是守恒的, 这深化了人们对紧致差分格式的认识. 为了更好的计算文中提出的非线性隐格式, 我们给出一个新的迭代算法, 并证明了算法的收敛性, 在此基础上给出一个新的线性化紧格式. 引进 Richardson 外推在保持原算法绝对稳定的基础上进一步提高了数值解的精度.

在证明格式收敛性的过程中, 我们引入了两个新的分析技巧: 一是用格式的向量形式代替逐点形式, 得到守恒性质和先验估计; 二是用 e_t^n 得到最大模意义下的收敛性.

但是对 [34] 中提出的非线性格式而言, 因为它不能保持离散能量守恒, 所以很难得到数值解的先验估计, 从而难以证明格式的收敛性. 文 [34] 中运用数学归纳法证明了当 $\frac{\tau}{h^2}$ 足够小时的平方模收敛性. 然而这是在假设数值解最大模有界 (而这恰好是最需要解决的) 的前提下得到的, 而且是条件收敛的. 如何证明该算法依最大模范数的无条件收敛性将是一个非常有意义的工作.

关于二维和三维非线性 Schrödinger 方程的数值研究, 我们已得到守恒紧格式依 H^1 范数的无条件收敛性, 该结果将另文发表. 接下来可做的工作是如何证明高维情形下紧格式依最大模范数的无条件收敛性.

致谢 感谢审稿人在算法的收敛性及数值计算方面所提出的建设性意见. 第一作者感谢孙志忠教授和廖洪林博士所给予的有益讨论.

参考文献

- 1 Griffiths D J. Introduction to Quantum Mechanics. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1995
- 2 Menyuk C R. Stability of solitons in birefringent optical fibers. J Opt Soc Amer B Opt Phys, 1998, 5: 392–402
- 3 Wadati M, Izuka T, Hisakado M. A coupled nonlinear Schrödinger equation and optical solitons. J Phys Soc Japan, 1992, 61: 2241–2245
- 4 Akrivis G D. Finite difference discretization of the cubic Schrödinger equation. IMA J Numer Anal, 1993, 13: 115–124
- 5 Chan T, Shen L. Stability analysis of difference schemes for variable coefficient Schrödinger type equations. SIAM J Numer Anal, 1987, 24: 336–349
- 6 Chang Q, Jia E, Sun W. Difference schemes for solving the generalized nonlinear Schrödinger equation. J Comput Phys, 1999, 148: 397–415
- 7 Dai W. An unconditionally stable three-level explicit difference scheme for the Schrödinger equation with a variable coefficient. SIAM J Numer Anal, 1992, 29: 174–181
- 8 Dehghan M, Taleei A. A compact split-step finite difference method for solving the nonlinear Schrödinger equations with constant and variable coefficients. Comput Phys Comm, 2010, 181: 43–51
- 9 Ivanauskas F, Radžiūnas M. On convergence and stability of the explicit difference method for solution of nonlinear Schrödinger equations. SIAM J Numer Anal, 1999, 36: 1466–1481
- 10 Nash P L, Chen L Y. Efficient difference solutions to the time-dependent Schrödinger equation. J Comput Phys, 1997, 130: 266–268
- 11 Guo B Y. The convergence of numerical method for nonlinear Schrödinger equations. J Comput Math, 1986, 4: 121–130
- 12 Sanz-Serna J M. Methods for the numerical solution of the Schrödinger equation. Math Comp, 1984, 43: 21–27
- 13 Sun Z Z, Wu X. The stability and convergence of a difference scheme for the Schrödinger equation on an infinite domain by using artificial boundary conditions. J Comput Phys, 2006, 214: 209–223
- 14 Wu L. DuFort-Frankel-type methods for linear and nonlinear Schrödinger equations. SIAM J Numer Anal, 1996, 33: 1526–1533
- 15 Sanz-Serna J M, Verwer J G. Conservative and nonconservative schemes for the solution of the nonlinear Schrödinger equation. IMA J Numer Anal, 1986, 6: 25–42
- 16 廖洪林, 孙志忠, 史汉生. 二维非线性 Schrödinger 方程显式格式的最大模误差分析. 中国科学 - 数学, 2010, 40: 827–842
- 17 Akrivis G D, Dougalis V A, Karakashina O A. On fully discrete Galerkin methods of second-order temporal accuracy for the nonlinear Schrödinger equation. Numer Math, 1991, 59: 31–53
- 18 Karakashian O A, Akrivis G D, Dougalis V A. On optimal order error estimates for the nonlinear Schrödinger equation. SIAM J Numer Anal, 1993, 30: 377–400
- 19 Tourigny Y. Some pointwise estimates for the finite element solution of a radial nonlinear Schrödinger equation on a class of nonuniform grids. Numer Methods Partial Differential Equations, 1994, 10: 757–769
- 20 Bao W, Jaksch D. An explicit unconditionally stable numerical method for solving damped nonlinear Schrödinger equations with a focusing nonlinearity. SIAM J Numer Anal, 2003, 41: 1406–1426
- 21 Iitaka T. Solving the time-dependent Schrödinger equation numerically. Phys Rev E (3), 1994, 49: 4684–4690
- 22 Kosloff D, Kosloff R. A Fourier method solution for the time dependent Schrödinger equation as a tool in molecular dynamics. J Comput Phys, 1983, 52: 35–53
- 23 Li B, Fairweather G, Bialecki B. Discrete-time orthogonal spline collocation methods for Schrödinger equations in two space variables. SIAM J Numer Anal, 1998, 35: 453–477
- 24 Robinson M P, Fairweather G. Orthogonal spline collocation methods for Schrödinger type equations in one space variable. Numer Math, 1994, 8: 355–376
- 25 Berikeshvili G, Gupta M M, Mirianashvili M. Convergence of fourth order compact difference schemes for three-dimensional convection-diffusion equations. SIAM J Numer Anal, 2007, 45: 443–455
- 26 Cohen G. High-Order Numerical Methods for Transient Wave Equations. New York: Springer, 2002
- 27 Gopaul A, Bhuruth M. Analysis of a fourth-order scheme for a three-dimensional convection-diffusion model problem. SIAM J Sci Comput, 2006, 28: 2075–2094
- 28 Gustafsson B, Mossberg E. Time compact high order difference methods for wave propagation. SIAM J Sci Comput, 2004, 26: 259–271
- 29 Gustafsson B, Wahlund P. Time compact difference methods for wave propagation in discontinuous media. SIAM J Sci Comput, 2004, 26: 272–293
- 30 Kalita J C, Dalal D C, Dass A K. A class of higher order compact schemes for the unsteady two-dimensional convection-

- diffusion equation with variable convection coefficients. *Internat J Numer Methods Fluids*, 2002, 38: 1111–1131
- 31 Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J Comput Phys*, 1992, 103: 16–42
 - 32 Liao H L, Sun Z Z. Maximum norm error bounds of ADI and compact ADI methods for solving parabolic equations. *Numer Methods Partial Differential Equations*, 2010, 26: 37–60
 - 33 Liao H L, Sun Z Z. Error estimate of fourth-order compact scheme for linear Schrödinger equations. *SIAM J Numer Anal*, 2010, 47: 4381–4401
 - 34 Xie S, Li G, Yi S. Compact finite difference schemes with high accuracy for one-dimensional nonlinear Schrödinger equation. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2009, 198: 1052–1060
 - 35 Zingg D W. Comparison of high-accuracy finite-difference methods for linear wave propagation. *SIAM J Sci Comput*, 2000, 22: 476–502
 - 36 Zhang F, Pérez-García V M, Vázquez L. Numerical simulation of nonlinear Schrödinger systems: a new conservative scheme. *Appl Math Comput*, 1995, 71: 165–77
 - 37 Li S, Vu-Quoc L. Finite difference calculus invariant structure of a class of algorithms for the nonlinear Klein-Gordon equation. *SIAM J Numer Anal*, 1995, 32: 1839–1875
 - 38 Chippada S, Dawson C N, Martínez M L, et al. Finite element approximations to the system of shallow water equations, II: Discrete time a priori error estimates. *SIAM J Numer Anal*, 1999, 36: 226–250
 - 39 Dawson C N, Martínez M L. A characteristic-Galerkin approximation to a system of shallow water equations. *Numer Math*, 2000, 86: 239–256
 - 40 Sun Z Z, Zhao D D. On the L_∞ convergence of a difference scheme for coupled nonlinear Schrödinger equations. *Comp Math Appl*, 2010, 59: 3286–3300
 - 41 Sun Z Z. *Numerical Methods of the Partial Differential Equations*. Beijing: Science Press, 2005
 - 42 Sun Z Z, Zhu Q D. On Tsertsvadze's difference scheme for the Kuramoto-Tsuzuki equation. *J Comput Appl Math*, 1998, 98: 289–304
 - 43 Zhou Y L. *Application of Discrete Functional Analysis to the Finite Difference Methods*. Beijing: International Academic Publishers, 1990
 - 44 Burg C, Erwin T. Application of Richardson extrapolation to the numerical solution of partial differential equations. *Numer Methods Partial Differential Equations*, 2009, 25: 810–832
 - 45 Ablowitz M J, Prinari B, Trubatch A D. Discrete and continuous nonlinear Schrödinger systems. *Bull Amer Math Soc*, 2005, 43: 127–132

Unconditional convergence of two conservative compact difference schemes for non-linear Schrödinger equation in one dimension

WANG TingChun & GUO BoLing

Abstract Two compact difference schemes for one-dimensional cubic nonlinear Schrödinger equation are proposed. Both of the schemes are proved to conserve the discrete mass and energy. Unconditional convergence in maximum norm of the difference solutions with forth order in space and second order in time is also proved by utilizing the discrete energy method and two techniques. For computing the nonlinear algebraical system generated by the nonlinear compact scheme, an iterative algorithm is constructed and proved to be convergent. As a byproduct of the iterative algorithm, a linearized compact difference scheme with high accuracy is obtained. Numerical examples are given to support the theoretical analysis, and two Richardson extrapolations are introduced to achieve higher order numerical accuracy.

Keywords: nonlinear Schrödinger equations, compact difference scheme, conservation, convergence in maximum norm, iterative algorithm

MSC(2000): 65M06, 65M12

doi: 10.1360/012010-846