Lévy 噪声驱动的随机 b 族方程的适定性

陈涌*, 陈瑞林, 骆桦

浙江理工大学理学院, 杭州 310018

E-mail: youngchen329@126.com, chenrllucky@zstu.edu.cn, luohuahill@163.com

收稿日期: 2016-02-27; 接受日期: 2016-05-25; 网络出版日期: 2016-07-25; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11401532 和 11501511) 和浙江省自然科学基金 (批准号: LQ14A010015 和 LQ15A010012) 资助项目

摘要 本文考虑 Lévy 噪声驱动的随机 b 族方程的适定性. 首先, 由压缩映射原理得到随机黏性 b 族方程的局部适定性. 接着, 由正则化方法, 得到一个 Cauchy 列, 其相应的极限为随机 b 族方程的唯一解.

关键词 适定性 随机 b 族方程 正则化方法

MSC (2010) 主题分类 60H15, 35L05, 35L70

1 引言

本文考虑如下 Lévy 噪声驱动的随机 b 族方程:

$$\begin{cases} du + uu_x dt = f(u, u_x) dt + \int_{\mathbb{Z}} g(u, z) \tilde{N}(dt, dz), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $f(u, u_x) = (1 - \partial_x^2)^{-1} \partial_x (\frac{b}{2} u^2 + \frac{3-b}{2} u_x^2)$, $\tilde{N}$ 为度量空间 $\mathbb{Z}$ 上相应于带有 σ -有限测度 $\nu(dz)$ 的 Poisson 随机测度 N 的补偿 Poisson 随机测度, 即 $\tilde{N}(dt, dz) = N(dt, dz) - \nu(dz)dt$. 对于 $u, v \in H^s$, 函数 g 满足:

$$\int_{\mathbb{Z}} \|g(u, z)\|_{H^s}^2 \nu(dz) \leq C \|u\|_{H^s}^2, \quad (1.2)$$

$$\int_{\mathbb{Z}} \|g(u, z) - g(v, z)\|_{H^s}^2 \nu(dz) \leq C \|u - v\|_{H^s}^2. \quad (1.3)$$

对任意 $b \neq -1$, 由适当的 Kodama 转化, b 族方程可以看作在浅水波范畴内取二阶精度推导出来 (参见文献 [1, 2]). 对于 $b = -1$, 相应的 Kodama 转化是奇异的 (参见文献 [1, 2]). b 族方程在全空间的局部适定性由文献 [3, 4] 得到, 周期区域情形在文献 [5] 建立.

当 $b = 2$ 时, 方程 (1.1) 为随机 Camassa-Holm 方程; 当 $b = 3$ 时, 成为随机 Degasperis-Procesi 方程. 随机 Camassa-Holm 方程的在 Bourgain 空间 $X_{s,b}$ 中的局部适定性由文献 [6] 得到. 然而由于

英文引用格式: Chen Y, Chen R L, Luo H. Well-posedness for stochastic b -family equation with Lévy noise (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 625–634, doi: 10.1360/012016-25

Lévy 过程关于时间的低正则性, 该方法不适用于本文. 利用随机输运方程、迭代近似和解的不变性理论, 文献 [7] 得到了随机 Degasperis-Procesi 方程的整体适定性.

为了得到方程 (1.1) 的适定性, 我们首先考虑以下随机黏性 b 族方程:

$$\begin{cases} du + uu_x dt = \varepsilon u_{xx} + f(u, u_x) dt + \int_{\mathbb{Z}} g(u, z) \tilde{N}(dt, dz), \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (1.4)$$

它的积分等价形式如下:

$$u(t, x) = e^{\varepsilon t \partial_x^2} u_0(x) - \int_0^t e^{\varepsilon(t-\tau) \partial_x^2} uu_x d\tau + \int_0^t e^{\varepsilon(t-\tau) \partial_x^2} f(u, u_x) d\tau + \int_0^t \int_{\mathbb{Z}} e^{\varepsilon(t-\tau) \partial_x^2} g(u, z) \tilde{N}(d\tau, dz). \quad (1.5)$$

令 $\mathcal{D}([0, T]; H^s)$ 为从 $[0, T]$ 到 H^s 具有右连续左极限的空间. 由压缩映射原理, 我们得到方程 (1.4) 的如下局部适定性.

定理 1.1 令 $s > 1$, $u_0 \in H^s$, 则存在 $T > 0$ 使得 $u \in L^2(\Omega; \mathcal{D}([0, T]; H^s(\mathbb{R})))$ 是 (1.4) 的唯一解.

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 我们将证明 (1.4) 的解 u_ε 收敛到 (1.1) 的解 u . 由于特殊的非线性项, 我们需要考虑以下的正则化方程:

$$\begin{cases} du + uu_x dt = \varepsilon u_{xx} + f(u, u_x) dt + \int_{\mathbb{Z}} g(u, z) \tilde{N}(dt, dz), \\ u(0, x) = u_{0\eta}(x), \end{cases} \quad (1.6)$$

其中 $u_{0\eta} = u_0 * \rho_\eta$, ρ_η 为 Friedrichs 光滑化算子. 在下文中, 令 $\eta = \varepsilon$, u_ε 为 (1.6) 的解. 我们将证明 u_ε 为 Cauchy 列并且其极限为 (1.1) 的解. 本文的主要结果如下.

定理 1.2 假设 $s > 3/2$, $u_0(x) \in H^s(\mathbb{R})$, 则对于 P-a.e. $\omega \in \Omega$, 存在 $T > 0$ 使得 Cauchy 问题 (1.1) 有唯一的解 $u \in \mathcal{D}([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$.

注 1.1 利用本文的方法, 我们也可以得到一般的 Lévy 噪声驱动的随机 b 族方程的适定性.

本文结构如下: 第 2 节给出定理 1.1 的证明; 第 3 节证明定理 1.2.

2 定理 1.1 的证明

本节建立如下引理 2.1–2.4, 在此基础上利用压缩映射原理得到定理 1.1. 令 $C > 0$ 是一个常数, 它的值在不同的地方可以不一样.

引理 2.1 [8,9] (Moser 估计) 令 $s > 0$, $\epsilon > 0$, 以下估计成立:

- (i) 对于 $0 < s < 1/2$, $\|uv\|_{H^{2s-\frac{1}{2}}} \leq C\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s}$;
- (ii) 对于 $s > 1/2$, $\|uv\|_{H^s} \leq C\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s}$;
- (iii) 对于 $s = 1/2$, $\|uv\|_{H^{s-\epsilon}} \leq C\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s}$.

引理 2.2 假设 $u \in \mathcal{D}([0, T]; H^s)$ ($s > 0$), 则有 $\|\int_0^t e^{\varepsilon(t-\tau) \partial_x^2} uu_x d\tau\|_{\mathcal{D}([0, T]; H^s)} \leq CT^a \|u\|_{H^s}^2$, 其中 $T^a = \max\{T^{\frac{1}{2}}, T^{\frac{1-\epsilon}{2}}, T^{\frac{1+2s}{4}}\}$.

证明 对于 $s > 1/2$, 由 Young 不等式和 Moser 估计, 有

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{\varepsilon(t-\tau) \partial_x^2} uu_x d\tau \right\|_{H^s} &= \frac{1}{2} \int_0^t \|e^{\varepsilon(t-\tau) \partial_x^2} \partial_x (1 - \partial_x^2)^{\frac{s}{2}} u^2\|_{L^2} d\tau \leq C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \|(1 - \partial_x^2)^{\frac{s}{2}} u^2\|_{L^2} d\tau \\ &\leq CT^{\frac{1}{2}} \|u\|_{\mathcal{D}([0, T]; H^s)}^2. \end{aligned}$$

对于 $s = 1/2$, 给定 $0 < \epsilon < 1$, 有

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{\epsilon(t-\tau)\partial_x^2} u u_x d\tau \right\|_{H^s} &= \frac{1}{2} \int_0^t \|e^{\epsilon(t-\tau)\partial_x^2} \partial_x (1 - \partial_x^2)^{\frac{\epsilon}{2}} (1 - \partial_x^2)^{\frac{s-\epsilon}{2}} u^2\|_{L^2} d\tau \\ &\leq C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{\epsilon+1}{2}} \|(1 - \partial_x^2)^{\frac{s-\epsilon}{2}} u^2\|_{L^2} d\tau \\ &\leq CT^{\frac{1-\epsilon}{2}} \|u\|_{\mathcal{D}([0,T];H^s)}^2. \end{aligned}$$

对于 $0 < s < 1/2$, 有

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{\epsilon(t-\tau)\partial_x^2} u u_x d\tau \right\|_{H^s} &= \frac{1}{2} \int_0^t \|e^{\epsilon(t-\tau)\partial_x^2} \partial_x (1 - \partial_x^2)^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-s)} (1 - \partial_x^2)^{\frac{1}{2}(2s-\frac{1}{2})} u^2\|_{L^2} d\tau \\ &\leq C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3-2s}{4}} \|(1 - \partial_x^2)^{\frac{1}{2}(2s-\frac{1}{2})} u^2\|_{L^2} d\tau \\ &\leq CT^{\frac{1+2s}{4}} \|u\|_{\mathcal{D}([0,T];H^s)}^2. \end{aligned}$$

引理证毕. $\square$

引理 2.3 假设 $u \in \mathcal{D}([0,T];H^s)$, $s > 1$, 则有 $\|\int_0^t e^{\epsilon(t-\tau)\partial_x^2} f(u, u_x) d\tau\|_{\mathcal{D}([0,T];H^s)} \leq CT^b \|u\|_{H^s}^2$, 其中 $T^b = \max\{T^{\frac{1}{2}}, T^{1-\frac{\epsilon}{2}}, T^{\frac{3+2s}{4}}\}$.

证明 证明类似引理 2.2. 对于 $s > 3/2$, 由 Young 不等式和 Moser 估计, 有

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{\epsilon(t-\tau)\partial_x^2} f(u, u_x) d\tau \right\|_{H^s} &\leq C \int_0^t \|e^{\epsilon(t-\tau)\partial_x^2} \partial_x (1 - \partial_x^2)^{\frac{s}{2}-1} u^2\|_{L^2} + \|e^{\epsilon(t-\tau)\partial_x^2} \partial_x (1 - \partial_x^2)^{\frac{s}{2}-1} u_x^2\|_{L^2} d\tau \\ &\leq C \int_0^t \|(1 - \partial_x^2)^{\frac{s-1}{2}} u^2\|_{L^2} + \|(1 - \partial_x^2)^{\frac{s-1}{2}} u_x^2\|_{L^2} d\tau \\ &\leq Ct(\|u\|_{\mathcal{D}([0,t];H^{s-1})}^2 + \|u_x\|_{\mathcal{D}([0,t];H^{s-1})}^2) \\ &\leq Ct\|u\|_{\mathcal{D}([0,t];H^s)}^2. \end{aligned}$$

对于 $s = 3/2$ 和 $1 < s < 3/2$ 的情形, 证明类似引理 2.2, 在这里省去细节. $\square$

引理 2.4 假设 $u \in L^2(\Omega; \mathcal{D}([0,T];H^s))$, 则有

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0,T]} \left\| \int_0^t \int_{\mathbb{Z}} e^{\epsilon(t-\tau)\partial_x^2} g(u, z) \tilde{N}(d\tau, dz) \right\|_{H^s}^2 \leq C \int_0^T \mathbb{E} \sup_{r \in [0,T]} \|u_\epsilon(r)\|_{H^s}^2 d\tau.$$

证明 由 Burkholder-Davis-Gundy (B-D-G) 不等式^[10] 和条件 (1.2), 我们得到

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{t \in [0,T]} \left\| \int_0^t \int_{\mathbb{Z}} e^{\epsilon(t-\tau)\partial_x^2} g(u, z) \tilde{N}(d\tau, dz) \right\|_{H^s}^2 &\leq C \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{Z}} \|g(u_\epsilon, z)\|_{H^s}^2 \nu(d\tau, dz) \\ &\leq C \int_0^T \mathbb{E} \sup_{r \in [0,T]} \|u_\epsilon(r)\|_{H^s}^2 d\tau. \end{aligned} \quad (2.1)$$

引理证毕. $\square$

3 定理 1.2 的证明

本节证明方程 (1.6) 的解为 Cauchy 列, 并且其极限为方程 (1.1) 的解. 在定理 1.1 的假设下, 方程 (1.6) 存在唯一解 $u_\epsilon \in L^2(\Omega; \mathcal{D}([0,T];H^\infty(\mathbb{R})))$. 首先, 我们给出以下引理.

引理 3.1 ^[11] 在以上的假设下, 对任意 $0 < \varepsilon < 1/4$ 及 $s > 0, q > 0$, 以下估计成立:

$$\|u_{0\varepsilon}\|_{H^q}^2 \leq C\varepsilon^{\frac{s-q}{2}}, \quad \|u_{0\varepsilon} - u_0\|_{H^q}^2 \leq C\varepsilon^{\frac{s-q}{2}}.$$

引理 3.2 ^[12] (i) 若 $r > 0$, 则 $H^r \cap L^\infty$ 为一个代数, 并且 $\|uv\|_{H^r} \leq C(\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{H^r} + \|u\|_{H^r}\|v\|_{L^\infty})$;

(ii) 令 $r > 0$, 如果 $u \in H^r \cap W^{1,\infty}$ 和 $v \in H^{r-1} \cap L^\infty$, 那么, $\|[\Lambda^r, u]v\|_{L^2} \leq C(\|u_x\|_{L^\infty}\|\Lambda^{r-1}v\|_{L^2} + \|\Lambda^r u\|_{L^2}\|v\|_{L^\infty})$, 其中 $[\Lambda^r, u]v = \Lambda^r(uv) - u\Lambda^r v$, $\Lambda = (1 - \partial_x^2)^{1/2}$;

(iii) 令 $q \geq 0, u \in H^q, \|u_x\|_{L^\infty} < \infty$, 则 $(\Lambda^q u, \Lambda^q(uu_x)) \leq C\|u_x\|_{L^\infty}\|u\|_{H^q}^2$.

引理 3.3 令 $s > 3/2, q > 0$, 则

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \ln P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_\varepsilon(t)\|_{H^s} > R\right) = -\infty, \quad (3.1)$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \ln P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_\varepsilon(t)\|_{H^q}^2 > R\varepsilon^{\frac{s-q}{2}}\right) = -\infty. \quad (3.2)$$

证明 令 $\Phi_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{Z}} e^{\varepsilon(t-\tau)\partial_x^2} g(u_\varepsilon, z) \tilde{N}(d\tau, dz)$, $v(t) = u_\varepsilon(t) - \Phi_\varepsilon(t)$, 则 $v(t)$ 为如下带随机系数的确定性方程的温和解:

$$v' = \varepsilon v_{xx} - (v + \Phi_\varepsilon)(v + \Phi_\varepsilon)_x + f(v + \Phi_\varepsilon, (v + \Phi_\varepsilon)_x), \quad v_0(x) = u_{0\varepsilon}(x), \quad \text{P-a.s.} \quad (3.3)$$

由 B-D-G 不等式, 我们得到

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} \|\Phi_\varepsilon(t)\|_{H^s}^2 \leq C\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} \|u_\varepsilon\|_{H^s}^2 < +\infty, \quad (3.4)$$

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} \|\Phi_\varepsilon(t)\|_{H^{s+1}}^2 \leq C\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} \|u_\varepsilon\|_{H^{s+1}}^2 < +\infty. \quad (3.5)$$

令 $R > 0$, 定义如下停时:

$$\tau_R^1 = \inf\{t \in [0, T]; \|\Phi_\varepsilon(t)\|_{H^s}^2 > R\}, \quad \tau_R^2 = \inf\{t \in [0, T]; \|\Phi_\varepsilon(t)\|_{H^{s+1}}^2 > R\}.$$

令 $\tau_R = \tau_R^1 \wedge \tau_R^2$, 则由 (3.4) 和 (3.5) 得

$$P(\tau_R \leq T) \leq \frac{\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} (\|\Phi_\varepsilon(t)\|_{H^s}^2 + \|\Phi_\varepsilon(t)\|_{H^{s+1}}^2)}{R} \leq C \frac{\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} (\|u_\varepsilon\|_{H^s}^2 + \|u_\varepsilon\|_{H^{s+1}}^2)}{R}. \quad (3.6)$$

在方程 (3.3) 的两边乘以 $\Lambda^s v \Lambda^s$, 然后分别对 x 和 t 积分得

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^s}^2 + \varepsilon \int_0^{t \wedge \tau_R} \|v\|_{H^{s+1}}^2 dr &= \|v_0\|_{H^s}^2 - \int_0^{t \wedge \tau_R} (\Lambda^s v, \Lambda^s((v + \Phi_\varepsilon)(v + \Phi_\varepsilon)_x)) dr \\ &\quad + \int_0^{t \wedge \tau_R} (\Lambda^s v, \Lambda^s f(v + \Phi_\varepsilon, (v + \Phi_\varepsilon)_x)) dr. \end{aligned} \quad (3.7)$$

因为 $(v + \Phi_\varepsilon)(v + \Phi_\varepsilon)_x = vv_x + v\Phi_{\varepsilon x} + v_x\Phi_\varepsilon + \Phi_\varepsilon\Phi_{\varepsilon x}$, 由引理 3.2(i)、3.2(iii) 和 Young 不等式得

$$\begin{aligned} \int_0^{t \wedge \tau_R} (\Lambda^s v, \Lambda^s(vv_x + v\Phi_{\varepsilon x} + \Phi_\varepsilon\Phi_{\varepsilon x})) dr &\leq C \int_0^{t \wedge \tau_R} \|v\|_{H^s} (\|v\|_{H^s}\|v_x\|_{L^\infty} + \|v\Phi_{\varepsilon x}\|_{H^s} + \|\Phi_\varepsilon^2\|_{H^{s+1}}) dr \\ &\leq C \int_0^{t \wedge \tau_R} \|v\|_{H^s} (\|v\|_{H^s}^2 + \|\Phi_\varepsilon\|_{H^{s+1}}^2) dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_0^{t \wedge \tau_R} (R + \|v\|_{H^s}^2) \|v\|_{H^s} dr \\
&\leq C \int_0^{t \wedge \tau_R} R^{\frac{3}{2}} + \|v\|_{H^s}^3 dr.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

由引理 3.2(ii), 有

$$\begin{aligned}
\int_0^{t \wedge \tau_R} (\Lambda^s v, \Lambda^s (v_x \Phi_\varepsilon)) dr &= \int_0^{t \wedge \tau_R} (\Lambda^s v, [\Lambda^s, \Phi_\varepsilon] v_x) dr + \int_0^{t \wedge \tau_R} (\Lambda^s v, \Phi_\varepsilon \Lambda^s v_x) dr \\
&\leq C \int_0^{t \wedge \tau_R} \|v\|_{H^s} (\|\Phi_{\varepsilon x}\|_{L^\infty} \|v\|_{H^s} + \|\Phi_\varepsilon\|_{H^s} \|v_x\|_{L^\infty}) dr \\
&\leq C \int_0^{t \wedge \tau_R} \|v\|_{H^s}^2 (\|\Phi_\varepsilon\|_{H^s} + \|\Phi_\varepsilon\|_{H^{s+1}}) dr \\
&\leq C \int_0^{t \wedge \tau_R} R^{\frac{3}{2}} + \|v\|_{H^s}^3 dr.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

由 Hölder 不等式和 Young 不等式得

$$\begin{aligned}
\int_0^{t \wedge \tau_R} (\Lambda^s v, \Lambda^s f(v + \Phi_\varepsilon, (v + \Phi_\varepsilon)_x)) dr &\leq \int_0^{t \wedge \tau_R} \|v\|_{H^s} (\|v + \Phi_\varepsilon\|_{H^{s-1}} + \|(v + \Phi_\varepsilon)_x\|_{H^{s-1}}) dr \\
&\leq C \int_0^{t \wedge \tau_R} \|v\|_{H^s}^2 (\|\Phi_\varepsilon\|_{H^{s-1}} + \|\Phi_\varepsilon\|_{H^s}) dr \\
&\leq C \int_0^{t \wedge \tau_R} R^{\frac{3}{2}} + \|v\|_{H^s}^3 dr.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

由 (3.8)–(3.10) 得

$$\sup_{t \in [0, T \wedge \tau_R]} \|v\|_{H^s}^2 \leq C(R) + C \int_0^T \sup_{r \in [0, t \wedge \tau_R]} \|v(r)\|_{H^s}^3 dt =: Y(T). \tag{3.11}$$

从而, $\frac{dY(T)}{dT} = C \sup_{r \in [0, T \wedge \tau_R]} \|v(r)\|_{H^s}^3 \leq CY^{\frac{3}{2}}(T)$, 由此, 我们有

$$\sup_{t \in [0, T \wedge \tau_R]} \|v\|_{H^s}^2 < CY(T) \leq \frac{C(R)}{(1 - C\sqrt{C(R)T})^2}. \tag{3.12}$$

由 (3.4)–(3.6) 和 (3.12) 得

$$\sup_{t \in [0, T \wedge \tau_R]} \|u_\varepsilon(t)\|_{H^s}^2 \leq \sup_{t \in [0, T \wedge \tau_R]} \|v\|_{H^s}^2 + \sup_{t \in [0, T \wedge \tau_R]} \|\Phi_\varepsilon(t)\|_{H^s}^2 \leq \frac{C(R)}{(1 - C\sqrt{C(R)T})^2} + R. \tag{3.13}$$

对任意 $\delta > 0$, 由 (3.6) 知, 存在 R 使得

$$P(\tau_R \leq T) < \frac{\delta}{2}. \tag{3.14}$$

对这样的 R , 由 (3.13) 得

$$\begin{aligned}
\ln P\left(\sup_{t \in [0, T \wedge \tau_R]} \|u_\varepsilon\|_{H^s}^2 > R_1\right) &\leq \ln \frac{\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T \wedge \tau_R]} \|u_\varepsilon\|_{H^s}^2}{R_1} \leq \ln \left(\frac{C(R)}{(1 - C\sqrt{C(R)T})^2} + R\right) - \ln(R_1) \\
&\rightarrow -\infty, \quad R_1 \rightarrow +\infty.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

因此, 存在 R_1 使得

$$P\left(\sup_{t \in [0, T \wedge \tau_R]} \|u_\varepsilon\|_{H^s}^2 > R_1\right) < \frac{\delta}{2}. \quad (3.16)$$

由 (3.14) 和 (3.16), 有

$$P\left(\sup_{t \in [0, T]} \|u_\varepsilon\|_{H^s}^2 > R_1\right) \leq P\left(\sup_{t \in [0, T \wedge \tau_R]} \|u_\varepsilon\|_{H^s}^2 > R_1\right) + P(\tau_R \leq T) < \delta, \quad (3.17)$$

由此得到 (3.1).

对于 $R > 0$, 定义停时 $\bar{\tau}_R = \inf\{t \in [0, T]; \|u_\varepsilon(t)\|_{H^s}^2 > R\}$. 运用 Itô 公式^[13] 得

$$\begin{aligned} & \|u_\varepsilon(t \wedge \bar{\tau}_R)\|_{H^q}^2 + 2\varepsilon \int_0^{t \wedge \bar{\tau}_R} \|u_\varepsilon(t \wedge \bar{\tau}_R)\|_{q+1}^2 dr \\ &= \|u_{0\varepsilon}\|_{H^q}^2 + 2 \int_0^{t \wedge \bar{\tau}_R} (\Lambda^q u_\varepsilon, \Lambda^q (f(u_\varepsilon, u_{\varepsilon x}) - u_\varepsilon u_{\varepsilon x})) dr \\ &+ 2 \int_0^{t \wedge \bar{\tau}_R} \int_{\mathbb{Z}} (\Lambda^q u_\varepsilon, \Lambda^q g(u_\varepsilon, z)) \tilde{N}(dr, dz) + \int_0^{t \wedge \bar{\tau}_R} \int_{\mathbb{Z}} \|g(u_\varepsilon, z)\|_{H^q}^2 \nu(dr, dz). \end{aligned} \quad (3.18)$$

由引理 3.2(i)、3.2(iii) 和嵌入定理得

$$\begin{aligned} & \int_0^{t \wedge \bar{\tau}_R} (\Lambda^q u_\varepsilon, \Lambda^q (f(u_\varepsilon, u_{\varepsilon x}) - u_\varepsilon u_{\varepsilon x})) dr \\ & \leq C \int_0^{t \wedge \bar{\tau}_R} \|u_\varepsilon\|_{H^q} (\|u_\varepsilon\|_{H^q} \|u_\varepsilon\|_{L^\infty} + \|u_\varepsilon^2\|_{H^{q-1}} + \|u_{\varepsilon x}^2\|_{H^{q-1}}) dr \\ & \leq C \int_0^{t \wedge \bar{\tau}_R} \|u_\varepsilon\|_{H^s} \|u_\varepsilon\|_{H^q}^2 dr \leq C\sqrt{R} \int_0^{t \wedge \bar{\tau}_R} \|u_\varepsilon\|_{H^q}^2 dr. \end{aligned} \quad (3.19)$$

由条件 (1.2)、B-D-G 不等式和 Young 不等式得

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sup_{t \in [0, T \wedge \bar{\tau}_R]} \int_0^{t \wedge \bar{\tau}_R} \int_{\mathbb{Z}} (\Lambda^q u_\varepsilon, \Lambda^q g(u_\varepsilon, z)) \tilde{N}(dr, dz) \\ & \leq C \mathbb{E} \left(\int_0^{T \wedge \bar{\tau}_R} \|u_\varepsilon\|_{H^q}^2 \int_{\mathbb{Z}} \|g(u_\varepsilon, z)\|_{H^q}^2 \nu(dr, dz) \right)^{1/2} \\ & \leq \frac{1}{2} \mathbb{E} \sup_{t \in [0, T \wedge \bar{\tau}_R]} \|u_\varepsilon\|_{H^q}^2 + C \int_0^T \mathbb{E} \sup_{r \in [0, \tau \wedge \bar{\tau}_R]} \|u_\varepsilon(r)\|_{H^q}^2 d\tau. \end{aligned} \quad (3.20)$$

由 (3.18)–(3.20) 和引理 3.1 得

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T \wedge \bar{\tau}_R]} \|u_\varepsilon\|_{H^q}^2 \leq 2\varepsilon^{\frac{s-q}{2}} + C(1 + \sqrt{R}) \int_0^T \mathbb{E} \sup_{r \in [0, t \wedge \bar{\tau}_R]} \|u_\varepsilon(r)\|_{H^q}^2 dt. \quad (3.21)$$

由 Gronwall 不等式, 有

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T \wedge \bar{\tau}_R]} \|u_\varepsilon\|_{H^q}^2 \leq 2\varepsilon^{\frac{s-q}{2}} e^{C(1+\sqrt{R})T}. \quad (3.22)$$

由 (3.1), 对任意 $\delta > 0$, 存在 R 使得

$$P\left(\sup_{t \in [0, T]} \|u_\varepsilon\|_{H^s}^2 > R\right) < \frac{\delta}{2}. \quad (3.23)$$

对这样的 R , 由 (3.22) 得

$$\begin{aligned} \ln P\left(\sup_{t \in [0, T \wedge \bar{\tau}_R]} \|u_\varepsilon\|_{H^q}^2 > R_1 \varepsilon^{\frac{s-q}{2}}\right) &\leq \ln \frac{\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T \wedge \bar{\tau}_R]} \|u_\varepsilon\|_{H^q}^2}{R_1 \varepsilon^{\frac{s-q}{2}}} \\ &\leq C(1 + \sqrt{R})T - \ln(R_1) \rightarrow -\infty, \quad R_1 \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.24)$$

因此, 存在 R_1 使得

$$P\left(\sup_{t \in [0, T \wedge \bar{\tau}_R]} \|u_\varepsilon\|_{H^q}^2 > R_1 \varepsilon^{\frac{s-q}{2}}\right) < \frac{\delta}{2}. \quad (3.25)$$

由 (3.23) 和 (3.25) 得

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{t \in [0, T]} \|u_\varepsilon\|_{H^q}^2 > R_1 \varepsilon^{\frac{s-q}{2}}\right) &\leq P\left(\sup_{t \in [0, T]} \|u_\varepsilon\|_{H^q}^2 > R_1 \varepsilon^{\frac{s-q}{2}}, \sup_{t \in [0, T]} \|u_\varepsilon\|_{H^s}^2 \leq R\right) + P\left(\sup_{t \in [0, T]} \|u_\varepsilon\|_{H^s}^2 > R\right) \\ &\leq P\left(\sup_{t \in [0, T \wedge \bar{\tau}_R]} \|u_\varepsilon\|_{H^q}^2 > R_1 \varepsilon^{\frac{s-q}{2}}\right) + P\left(\sup_{t \in [0, T]} \|u_\varepsilon\|_{H^s}^2 > R\right) < \delta, \end{aligned} \quad (3.26)$$

由此得到 (3.2). $\square$

现在证明 u_ε 是一个 Cauchy 列. 令 u_ε 和 u_η 为 (1.6) 相应于 ε 和 η 的解, 其中 $0 < \eta < \varepsilon < 1/4$. 令 $w = u_\varepsilon - u_\eta$, $g = u_\varepsilon + u_\eta$, 则 w 满足

$$\begin{aligned} dw &= (\varepsilon u_{\varepsilon xx} - \eta u_{\eta xx})dt - \frac{1}{2}(wg)_x dt + (f(u_\varepsilon, u_{\varepsilon x}) - f(u_\eta, u_{\eta x}))dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{Z}} (g(u_\varepsilon, z) - g(u_\eta, z))\tilde{N}(dt, dz), \end{aligned} \quad (3.27)$$

带有初值 $w_0 = u_{0\varepsilon} - u_{0\eta}$.

命题 3.1 对于 P-a.e. $\omega \in \Omega$, 存在 $T > 0$ 使得 u_ε 为空间 $\mathcal{D}([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$ ($s > 3/2$) 中的一个 Cauchy 列.

证明 对于 $1/2 < q < \min(1, s-1)$, $R > 0$, 定义停时 $\tilde{\tau}_R^1 = \inf\{t \in [0, T]; \|u_\varepsilon\|_{H^s}^2 + \|u_\eta\|_{H^s}^2 > R\}$, $\tilde{\tau}_R^2 = \inf\{t \in [0, T]; \|u_\varepsilon\|_{H^{q+2}}^2 > R\varepsilon^{\frac{s-q-2}{2}}\}$, $\tilde{\tau}_R^3 = \inf\{t \in [0, T]; \|u_\eta\|_{H^{q+2}}^2 > R\eta^{\frac{s-q-2}{2}}\}$. 令 $\tau_R^\varepsilon = \tilde{\tau}_R^1 \wedge \tilde{\tau}_R^2 \wedge \tilde{\tau}_R^3$. 对 $\|w(t \wedge \tau_R^\varepsilon)\|_{H^q}^2$ 利用 Itô 公式得

$$\begin{aligned} \|w(t \wedge \tau_R^\varepsilon)\|_{H^q}^2 &= \|w_0\|_{H^q}^2 + 2 \int_0^{t \wedge \tau_R^\varepsilon} (\Lambda^q w, \Lambda^q (\varepsilon u_{\varepsilon xx} - \eta u_{\eta xx}))d\tau - \int_0^{t \wedge \tau_R^\varepsilon} (\Lambda^q w, \Lambda^q (wg)_x)d\tau \\ &\quad + 2 \int_0^{t \wedge \tau_R^\varepsilon} (\Lambda^q w, \Lambda^q (f(u_\varepsilon, u_{\varepsilon x}) - f(u_\eta, u_{\eta x})))d\tau \\ &\quad + 2 \int_0^{t \wedge \tau_R^\varepsilon} \int_{\mathbb{Z}} (\Lambda^q w, \Lambda^q (g(u_\varepsilon, z) - g(u_\eta, z)))\tilde{N}(d\tau, dz) \\ &\quad + \int_0^{t \wedge \tau_R^\varepsilon} \int_{\mathbb{Z}} \|g(u_\varepsilon, z) - g(u_\eta, z)\|_{H^q}^2 \nu(d\tau, dz). \end{aligned}$$

由 Hölder 不等式和 Young 不等式得

$$\begin{aligned} \int_0^{t \wedge \tau_R^\varepsilon} (\Lambda^q w, \Lambda^q (\varepsilon u_{\varepsilon xx} - \eta u_{\eta xx}))d\tau &\leq C \left(\int_0^{t \wedge \tau_R^\varepsilon} \|w\|_{H^q}^2 d\tau + \int_0^{t \wedge \tau_R^\varepsilon} \varepsilon^2 \|u_\varepsilon\|_{q+2}^2 + \eta^2 \|u_\eta\|_{q+2}^2 d\tau \right) \\ &\leq C\varepsilon^{\frac{s-q+2}{2}} R + C \int_0^{t \wedge \tau_R^\varepsilon} \|w\|_{H^q}^2 d\tau. \end{aligned} \quad (3.28)$$

利用引理 3.2, 我们有

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t \wedge \tau_R^\varepsilon} (\Lambda^q w, \Lambda^q (wg)_x) d\tau &= \int_0^{t \wedge \tau_R^\varepsilon} (\Lambda^q w, \Lambda^q (w_x g)) d\tau + \int_0^{t \wedge \tau_R^\varepsilon} (\Lambda^q w, \Lambda^q (wg_x)) d\tau \\
 &= \int_0^{t \wedge \tau_R^\varepsilon} (\Lambda^q w, [\Lambda^q, g] w_x) d\tau + \int_0^{t \wedge \tau_R^\varepsilon} (\Lambda^q w, g \Lambda^q w_x) d\tau + \int_0^{t \wedge \tau_R^\varepsilon} (\Lambda^q w, \Lambda^q (wg_x)) d\tau \\
 &\leq C \int_0^{t \wedge \tau_R^\varepsilon} (1 + \|u_\varepsilon\|_{H^s} + \|u_\eta\|_{H^s}) \|w\|_{H^q}^2 d\tau \\
 &\leq C(1 + \sqrt{R}) \int_0^{t \wedge \tau_R^\varepsilon} \|w\|_{H^q}^2 ds
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

和

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t \wedge \tau_R^\varepsilon} (\Lambda^q w, \Lambda^q (f(u_\varepsilon, u_{\varepsilon x}) - f(u_\eta, u_{\eta x}))) d\tau &\leq C \int_0^{t \wedge \tau_R^\varepsilon} \|w\|_{H^q} (\|wg\|_{H^{q-1}} + \|w_x g_x\|_{H^{q-1}}) d\tau \\
 &\leq C \int_0^{t \wedge \tau_R^\varepsilon} (\|u_\varepsilon\|_{H^s} + \|u_\eta\|_{H^s}) \|w\|_{H^q}^2 d\tau \\
 &\leq C\sqrt{R} \int_0^{t \wedge \tau_R^\varepsilon} \|w\|_{H^q}^2 ds.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

由 B-D-G 不等式和条件 (1.3) 得

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T \wedge \tau_R^\varepsilon]} \int_0^{t \wedge \tau_R^\varepsilon} \int_{\mathbb{Z}} (\Lambda^q w, \Lambda^q (g(u_\varepsilon, z) - g(u_\eta, z))) \tilde{N}(d\tau, dz) \\
 &\leq C \mathbb{E} \left(\int_0^{T \wedge \tau_R^\varepsilon} \|w\|_{H^q}^2 \|g(u_\varepsilon, z) - g(u_\eta, z)\|_{H^q}^2 \nu(d\tau, dz) \right)^{1/2} \\
 &\leq \frac{1}{2} \mathbb{E} \sup_{t \in [0, T \wedge \tau_R^\varepsilon]} \|w\|_{H^q}^2 + C \int_0^T \mathbb{E} \sup_{r \in [0, \tau \wedge \tau_R^\varepsilon]} \|w(r)\|_{H^q}^2 d\tau.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

由以上不等式, 我们得到

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T \wedge \tau_R^\varepsilon]} \|w\|_{H^q}^2 \leq C \|w_0\|_{H^q}^2 + \varepsilon^{\frac{s-q+2}{2}} R + C\sqrt{R} \int_0^T \mathbb{E} \sup_{r \in [0, \tau \wedge \tau_R^\varepsilon]} \|w(r)\|_{H^q}^2 d\tau.$$

Gronwall 不等式蕴含着

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T \wedge \tau_R^\varepsilon]} \|w\|_{H^q}^2 \leq (1 + R) e^{C\sqrt{RT}} \varepsilon^{\frac{s-q}{2}}. \tag{3.32}$$

接着类似于 (3.1) 和 (3.2), 我们有

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \ln P \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|w(t)\|_{H^s} > R \varepsilon^{\frac{s-q}{2}} \right) = -\infty. \tag{3.33}$$

现在定义停时 $\tilde{\tau}_R^4 = \inf\{t \in [0, T]; \|u_\varepsilon\|_{H^{s+k}}^2 > R \varepsilon^{-\frac{k}{2}}, k = 1, 2\}$, $\tilde{\tau}_R^5 = \inf\{t \in [0, T]; \|u_\eta\|_{H^{s+k}}^2 > R \eta^{-\frac{k}{2}}, k = 1, 2\}$, $\tilde{\tau}_R^6 = \inf\{t \in [0, T]; \|w\|_{H^q}^2 > R \varepsilon^{\frac{s-q}{2}}\}$. 令 $\tilde{\tau}_R = \tilde{\tau}_R^1 \wedge \tilde{\tau}_R^4 \wedge \tilde{\tau}_R^5 \wedge \tilde{\tau}_R^6$. 对 $\|w(t \wedge \tilde{\tau}_R)\|_{H^s}^2$ 利用 Itô 公式, 我们有

$$\|w(t \wedge \tilde{\tau}_R)\|_{H^s}^2 = \|w_0\|_{H^s}^2 + 2 \int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_R} (\Lambda^s w, \Lambda^s (\varepsilon u_{\varepsilon x x} - \eta u_{\eta x x})) d\tau - \int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_R} (\Lambda^s w, \Lambda^s (wg)_x) d\tau$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_R} (\Lambda^s w, \Lambda^s (f(u_\varepsilon, u_{\varepsilon x}) - f(u_\eta, u_{\eta x}))) d\tau \\
& + 2 \int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_R} \int_{\mathbb{Z}} (\Lambda^s w, \Lambda^s (g(u_\varepsilon, z) - g(u_\eta, z))) \tilde{N}(d\tau, dz) \\
& + \int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_R} \int_{\mathbb{Z}} \|g(u_\varepsilon, z) - g(u_\eta, z)\|_{H^s}^2 \nu(d\tau, dz).
\end{aligned} \quad (3.34)$$

类似于 (3.28)、(3.30) 和 (3.31), 我们有

$$\int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_R} (\Lambda^s w, \Lambda^s (\varepsilon u_{\varepsilon x x} - \eta u_{\eta x x})) d\tau \leq CR\varepsilon + C \int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_R} \|w\|_{H^s}^2 d\tau, \quad (3.35)$$

$$\int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_R} (\Lambda^s w, \Lambda^s (f(u_\varepsilon, u_{\varepsilon x}) - f(u_\eta, u_{\eta x}))) d\tau \leq C\sqrt{R} \int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_R} \|w\|_{H^s}^2 ds, \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \sup_{t \in [0, T \wedge \tilde{\tau}_R]} \int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_R} \int_{\mathbb{Z}} (\Lambda^s w, \Lambda^s (g(u_\varepsilon, z) - g(u_\eta, z))) \tilde{N}(d\tau, dz) \\
& \leq \frac{1}{2} \mathbb{E} \sup_{t \in [0, T \wedge \tilde{\tau}_R]} \|w\|_{H^s}^2 + C \int_0^T \mathbb{E} \sup_{r \in [0, \tau \wedge \tilde{\tau}_R]} \|w(r)\|_{H^s}^2 d\tau.
\end{aligned} \quad (3.37)$$

由引理 3.2 和 Cauchy 不等式得

$$\begin{aligned}
\int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_R} (\Lambda^s w, \Lambda^s (wg)_x) d\tau & = \int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_R} (\Lambda^s w, \Lambda^s (w_x g)) d\tau + \int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_R} (\Lambda^s w, \Lambda^s (w(2u_\varepsilon - w)_x)) d\tau \\
& = \int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_R} (\Lambda^s w, [\Lambda^s, g] w_x) d\tau + \int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_R} (\Lambda^s w, g \Lambda^s w_x) d\tau \\
& \quad + 2 \int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_R} (\Lambda^s w, \Lambda^s (w u_{\varepsilon x})) d\tau - \int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_R} (\Lambda^s w, \Lambda^s (w w_x)) d\tau \\
& \leq C \int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_R} \|w\|_{H^s} (\|w\|_{H^s} \|g_x\|_{L^\infty} + \|w_x\|_{L^\infty} \|g\|_{H^s} + \|w\|_{H^s} \|w_x\|_{L^\infty} \\
& \quad + \|w\|_{L^\infty} \|u_\varepsilon\|_{H^{s+1}}) d\tau \\
& \leq C \int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_R} \|w\|_{H^s}^2 (1 + \|u_\varepsilon\|_{H^s} + \|u_\eta\|_{H^s}) + \|w\|_{H^q}^2 \|u_\varepsilon\|_{H^{s+1}}^2 d\tau \\
& \leq C\varepsilon^{\frac{s-q-1}{2}} + C(1 + \sqrt{R}) \int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_R} \|w\|_{H^s}^2 d\tau.
\end{aligned} \quad (3.38)$$

由 (3.34)–(3.38) 得

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T \wedge \tilde{\tau}_R]} \|w\|_{H^s}^2 \leq 2\|w_0\|_{H^s}^2 + CR\varepsilon + C\varepsilon^{\frac{s-q-1}{2}} + C \int_0^T \mathbb{E} \sup_{r \in [0, \tau \wedge \tilde{\tau}_R]} \|w(r)\|_{H^s}^2 d\tau,$$

由此, 我们有

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T \wedge \tilde{\tau}_R]} \|w\|_{H^s}^2 \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.39)$$

给定任意小的 $\eta > 0$, 由引理 3.3 知, 存在常数 $R > 0$ 使得

$$P(\tilde{\tau}_R \leq T) \leq P\left(\sup_{t \in [0, T]} (\|u_\varepsilon\|_{H^s}^2 + \|u_\eta\|_{H^s}^2) > R\right) + P\left(\sup_{t \in [0, T]} \|u_\varepsilon\|_{H^{s+k}}^2 > R\varepsilon^{-\frac{k}{2}}\right)$$

$$\begin{aligned}
& + P\left(\sup_{t \in [0, T]} \|u_\eta\|_{H^{s+k}}^2 > R\eta^{-\frac{k}{2}}\right) + P\left(\sup_{t \in [0, T]} \|w\|_{H^s}^2 > R\eta^{\frac{s-a}{2}}\right) \\
& \leq \frac{\eta}{2}.
\end{aligned}$$

对这样的 R 和 $\forall \lambda > 0$, 由 (3.39), 存在 ε_0 使得对于 $\varepsilon < \varepsilon_0$, $P(\sup_{t \in [0, T]} \|w(t \wedge \tau_R)\|_{H^s} > \lambda) \leq \frac{\eta}{2}$. 因此,

$$P\left(\sup_{t \in [0, T]} \|w(t)\|_{H^s} > \lambda\right) \leq P(\tilde{\tau}_R \leq T) + P\left(\sup_{t \in [0, T]} \|w(t \wedge \tilde{\tau}_R)\|_{H^s} > \lambda\right) \leq \eta.$$

这就证明了 w 在空间 $\mathcal{D}([0, T]; H^s)$ 上依概率收敛到 0. 命题 3.1 的证明完成. $\square$

由命题 3.1, 我们能得到 (1.1) 的适定性. 定理 1.2 的证明类似文献 [6, 定理 4.1], 我们省略细节.

参考文献

- 1 Dullin H R, Gottwald G A, Holm D D. Camassa-Holm, Korteweg de Vries-5 and other asymptotically equivalent equations for shallow water waves. *Fluid Dynam Res*, 2003, 33: 73–79
- 2 Dullin H R, Gottwald G A, Holm D D. On asymptotically equivalent shallow water wave equations. *Phys D*, 2004, 190: 1–14
- 3 Escher J, Yin Z. Well-posedness, blow-up phenomena, and global solutions for the b -equation. *J Reine Angew Math*, 2010, 624: 51–80
- 4 Gui G, Liu Y, Tian L. Global existence and blow-up phenomena for the peakon b -family of equations. *Indiana Univ Math J*, 2008, 57: 1209–1234
- 5 Zhang S, Yin Z. Global solutions and blow-up phenomena for the periodic b -equation. *J Lond Math Soc (2)*, 2010, 82: 482–500
- 6 Chen Y, Gao H J, Guo B L. Well posedness for stochastic Camassa-Holm equation. *J Differential Equations*, 2012, 253: 2353–2379
- 7 Chen Y, Gao H J. Global existence for the stochastic Degasperis-Procesi equation. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2015, 35: 5171–5184
- 8 Chemin J Y. *Perfect Incompressible Fluids*. New York: Oxford University Press, 1998
- 9 Lemarie-Rieusset P G. *Recent Developments in the Navier-Stokes Problem*. Boca Raton: CRC Press, 2002
- 10 Peszat S, Zabczyk J. *Stochastic Partial Differential Equations with Lévy Noise*. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007
- 11 Bona J L, Smith R. The initial value problem for the Korteweg-de Vries equation. *Philos Trans R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci*, 1975, 278: 555–601
- 12 Kato T, Ponce G. Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equation. *Comm Pure Appl Math*, 1988, 41: 891–907
- 13 Applebaum D. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, vol. 93. Cambridge: Cambridge University Press, 2004

Well-posedness for stochastic b -family equation with Lévy noise

CHEN Yong, CHEN RuiLin & LUO Hua

Abstract In this paper, the stochastic b -family equation with Lévy noise is considered. Firstly, the local well-posedness for the stochastic viscous b -family equation is established by the contracting mapping principle. Then, by the regularization method, a Cauchy sequence is obtained, from which the well-posedness of the stochastic b -family equation is proved.

Keywords well-posedness, stochastic b -family equation, regulation

MSC(2010) 60H15, 35L05, 35L70

doi: 10.1360/012016-25