非线性中立型泛函微分方程 Runge-Kutta 法的稳定性和收敛性

王晚生*, 孙瑞

长沙理工大学数学与计算科学学院, 长沙 410004

E-mail: w.s.wang@163.com, 397727144@qq.com

收稿日期: 2012-10-09; 接受日期: 2013-01-24; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11001033 和 11171282)、湖南省自然科学基金杰出青年项目 (批准号: 13JJ1020)、中国电机工程学会电力青年科技创新项目和湖南省金融工程与管理中心课题资助项目

摘要 本文涉及 Runge-Kutta 法变步长求解非线性中立型泛函微分方程 (NFDEs) 的稳定性和收敛性. 为此, 基于 Volterra 泛函微分方程 Runge-Kutta 方法的 B-理论, 引入了中立型泛函微分方程 Runge-Kutta 方法的 EB (expanded B-theory)-稳定性和 EB-收敛性概念. 之后获得了 Runge-Kutta 方法变步长求解此类方程的 EB-稳定性和 EB-收敛性. 这些结果对中立型延迟微分方程和中性型延迟积分微分方程也是新的.

关键词 非线性中立型泛函微分方程 Runge-Kutta 方法 稳定性 代数稳定性 收敛性

MSC (2010) 主题分类 65L05, 65L06, 65L20

1 引言

设 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 分别为 N 维向量空间 $\mathbb{R}^N$ 中的内积和范数. 对任意的 $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $C_N^q[t_1, t_2]$ 表示映射区间 $[t_1, t_2]$ 到 $\mathbb{R}^N$ 中的一切 q 次连续可微映射 $x(t)$ 的全体, $C_N^0[t_1, t_2]$ 简记为 $C_N[t_1, t_2]$. 对任意的 $x \in C_N^1[t_*, t^*]$, $t_* \leq t^*$, 引入记号 $\|x\|_{[t_*, t^*]} = \max\{\max_{t \in [t_*, t^*]} \|x(t)\|, \max_{t \in [t_*, t^*]} \|x'(t)\|\}$.

考虑中立型泛函微分方程初值问题, 即

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(\cdot), y'(\cdot)), & t \in I_T = [0, T], \\ y(t) = \phi(t), & t \in I_\tau = [-\tau, 0], \end{cases} \quad (1.1)$$

这里 τ, T 是常数, $-\infty < T < +\infty$, $0 \leq \tau \leq +\infty$, $\phi \in C_N^1[-\tau, 0]$ 是给定的初始函数, $f: [t_0, T] \times \mathbb{R}^N \times C_N^1[-\tau, T] \times C_N[-\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ 是给定的连续映射, 满足条件

$$\begin{cases} \langle f(t, u_1, \psi, \chi) - f(t, u_2, \psi, \chi), u_1 - u_2 \rangle \leq \alpha \|u_1 - u_2\|^2, \\ \forall t \in [0, T], \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}^N, \quad \psi, \chi \in C_N[-\tau, T], \\ \|f(t, u_1, \psi_1, \chi_1) - f(t, u_2, \psi_2, \chi_2)\| \leq L \|u_1 - u_2\| \\ + \beta \max_{-\tau \leq \xi \leq t} \|\psi_1(\xi) - \psi_2(\xi)\| + \gamma \max_{-\tau \leq \xi \leq t} \|\chi_1(\xi) - \chi_2(\xi)\|, \\ \forall t \in [0, T], \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}^N, \quad \psi_1, \psi_2, \chi_1, \chi_2 \in C_N[-\tau, T], \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 α 和 L, β, γ 分别是单边 Lipschitz 常数及经典 Lipschitz 常数. 设 $\gamma < 1$ 且 $\beta, \gamma L$ 和

$$\alpha_+ := \begin{cases} \alpha, & \text{当 } \alpha \geq 0, \\ 0, & \text{当 } \alpha < 0 \end{cases}$$

仅具有适度大小.

中立型泛函微分方程因其在科学和工程上的广泛应用以及其特有性质而得到深入研究 (参见文献 [1–4]). 因其理论解难以获得, 数值模拟便成为了解其性质及其在工程实际应用中的重要手段. 对其特例, 如中立型延迟微分方程和中性型延迟积分微分方程等, 许多学者已深入研究了其算法理论 (参见文献 [5–14]). 然而对一般的中立型泛函微分方程, 数值算法研究甚少, Bellen 等人^[15] 研究了泛函连续 Runge-Kutta 方法的算法理论, Wang 等人^[16] 研究了隐式 Euler 方法的保稳定性. 另一方面, 对非线性刚性延迟微分方程, Zhang 等人^[17, 18] 讨论了数值方法的 GDN (generalized DN)- 稳定性和 D- 收敛性. 此后, 许多学者进一步研究了非线性延迟微分方程、非线性 Volterra 延迟积分微分方程的稳定性和收敛性 (参见文献 [19–22] 及其中参考文献); 在此基础上, 2003 和 2005 年, 李寿佛^[23, 24] 将刚性常微分方程 Runge-Kutta 方法和一般线性方法的 B- 理论推广到 Volterra 泛函微分方程情形. 本文将进一步将此理论推广到中立型泛函微分方程. 将统一和扩张非线性刚性常微分方程、非线性 Volterra 泛函微分方程的 B- 理论.

2 求解中立型泛函微分方程的 Runge-Kutta 方法

任意一个求解常微分方程初值问题的 s 级 Runge-Kutta 法

$$(A, b^T, c) = \frac{c}{\left| \begin{array}{c|c} & A \\ \hline & b^T \end{array} \right|} = \begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array} \quad (2.1)$$

与两个适当的插值算子 π^h, Π^h 相结合便可构成求解中立型泛函微分方程初值问题 (1.1) 的 s 级 Runge-Kutta 法

$$\begin{cases} y^h(t) = \pi^h(t; \psi, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}), & -\tau \leq t \leq t_{n+1}, \\ \mathbb{Y}^h(t) = \Pi^h(t; \psi', \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_{n+1}), & -\tau \leq t \leq t_{n+1}, \\ Y^{(n+1)} = ey_n + h_n AF(Y^{(n+1)}, y^h, \mathbb{Y}^h), \\ y_{n+1} = y_n + h_n b^T F(Y^{(n+1)}, y^h, \mathbb{Y}^h), \\ \mathbb{Y}_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}, y^h, \mathbb{Y}^h), \end{cases} \quad (2.2)$$

这里插值函数 $y^h(t)$ 和 $\mathbb{Y}^h(t)$ 分别是问题 (1.1) 的真解 $y(t)$ 及其导数 $y'(t)$ 的逼近, $\psi \in C_N^1[-\tau, 0]$ 是初始函数 ϕ 的逼近, $y_0 := \psi(0)$, $\mathbb{Y}_0 := \psi'(0)$, $y_n \in \mathbb{R}^N$ 及 $Y^{(n+1)} = [Y_1^{(n+1)T}, Y_2^{(n+1)T}, \dots, Y_s^{(n+1)T}]^T \in \mathbb{R}^{Ns}$ 分别是真解的值 $y(t_n)$ 及 $Y(t_n, h_n) = [y(t_n + c_1 h_n)^T, y(t_n + c_2 h_n)^T, \dots, y(t_n + c_s h_n)^T]^T$ 的逼近, $\mathbb{Y}_n$ 是

真解导数的值 $y'(t_n)$ 的逼近, t_n ($n = 0, 1, 2, \dots, N_T$) 是网格节点, 满足不等式

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N_T} = T \quad (2.3)$$

及某种附加条件 $\mathcal{F}$, $h_n = t_{n+1} - t_n$ 是积分步长, A, b^T 及 e 分别是与矩阵 $A = [a_{ij}]$, $b^T = [b_1, b_2, \dots, b_s]$ 及 $e = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^s$ 相应的线性映射,

$$F(Y^{(n+1)}, y^h, \mathbb{Y}^h) = [f(t_n + c_1 h_n, Y_1^{(n+1)}, y^h, \mathbb{Y}^h)^T, f(t_n + c_2 h_n, Y_2^{(n+1)}, y^h, \mathbb{Y}^h)^T, \dots, f(t_n + c_s h_n, Y_s^{(n+1)}, y^h, \mathbb{Y}^h)^T]^T. \quad (2.4)$$

为简单计, 以符号 Δ_h 表示网格 $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$, 恒设向量 $c = [c_1, c_2, \dots, c_s]^T$ 的每个元素 $c_i \in [0, 1]$, 并设插值算子 π^h 和 Π^h 分别满足正规性条件

$$\begin{aligned} & \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|\pi^h(t; \psi, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) - \pi^h(t; \chi, z_1, z_2, \dots, z_{n+1})\| \\ & \leq c_\pi \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n+1} \|y_i - z_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi(t) - \chi(t)\| \right\}, \\ & \forall \psi, \chi \in C_N^1[-\tau, 0], \quad \Delta_h \in \{\Delta_h\}, \quad y_i, z_i \in \mathbb{R}^N, \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

和

$$\begin{aligned} & \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|\Pi^h(t; \psi', \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_{n+1}) - \Pi^h(t; \chi', \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \dots, \mathbb{Z}_{n+1})\| \\ & \leq c_\Pi \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n+1} \|\mathbb{Y}_i - \mathbb{Z}_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi'(t) - \chi'(t)\| \right\}, \\ & \forall \psi, \chi \in C_N^1[-\tau, 0], \quad \Delta_h \in \{\Delta_h\}, \quad \mathbb{Y}_i, \mathbb{Z}_i \in \mathbb{R}^N, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \end{aligned} \quad (2.6)$$

这里及下文, 符号 $\{\Delta_h\}$ 表示一切满足不等式 (2.3) 及附加条件 $\mathcal{F}$ 的网格 $\Delta_h = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ 所构成的定向半序集, 这里的下标 $h = \max_{0 \leq n \leq N_T-1} h_n$, 常数 c_π 和 c_Π 不依赖于 n 和网格 Δ_h 及 L . 注意为了保证插值算子 π^h 和 Π^h 满足正规性条件 (2.5) 和 (2.6), 要求每个网格 $\Delta_h \in \{\Delta_h\}$ 除满足不等式 (2.3) 外, 还满足某种附加条件 $\mathcal{F}$ 是必要的 (参见文献 [23]).

一般说来, 对于任给的 $\psi \in C_N^1[-\tau, 0]$, $y_1, y_2, \dots, y_n, \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_n \in \mathbb{R}^N$, 只要取步长 h_n 足够小, 从方程 (2.2) 便可唯一确定 $y_{n+1}, \mathbb{Y}_{n+1}$, 从而完成一个积分步

$$(\psi, y_1, y_2, \dots, y_n, \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_n) \rightarrow (\psi, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}, \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_{n+1})$$

的计算. 鉴于方法 (2.2) 是从 (2.1) 诱导出来的, 故称方法 (2.1) 是方法 (2.2) 的母方法.

3 EB- 稳定性

按照文献 [23, 25–27] 的思想给出下列定义.

定义 3.1 方法 (2.2) 称为是 EB- 稳定的, 如果存在常数 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 > 0$, 它们仅依赖于方法, 使得对于任何满足条件 (1.2) 及 $\gamma c_\Pi < 1$ 的初值问题 (1.1)、任何网格 $\Delta_h \in \{\Delta_h\}$ 及任意两个平行的积分步

$$(\psi, y_1, y_2, \dots, y_n, \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_n) \rightarrow (\psi, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}, \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_{n+1}),$$

$$(\chi, z_1, z_2, \dots, z_n, \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \dots, \mathbb{Z}_n) \rightarrow (\chi, z_1, z_2, \dots, z_{n+1}, \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \dots, \mathbb{Z}_{n+1}),$$

有

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - z_{n+1}\| &\leq (1 + c_1 \alpha_+ h_n)^{\frac{1}{2}} \|y_n - z_n\| \\ &\quad + c_2 \beta h_n \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|\pi^h(t; \psi, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) - \pi^h(t; \chi, z_1, z_2, \dots, z_{n+1})\| \\ &\quad + c_3 \gamma h_n \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|\Pi^h(t; \psi', \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_{n+1}) - \Pi^h(t; \chi', \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \dots, \mathbb{Z}_{n+1})\|, \\ \alpha h_n &\leq c_4, \quad \frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_\Pi} h_n \leq c_5, \end{aligned} \quad (3.1)$$

这里 $r = c_\pi / c_\Pi$ 称为插值比. 注意这里前一积分步直接由方程 (2.2) 确定, 后一积分步可从用 $\chi, z_1, z_2, \dots, z_n, \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \dots, \mathbb{Z}_n$ 分别去代替方程 (2.2) 中的 $\psi, y_1, y_2, \dots, y_n, \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_n$ 而得到的方程确定.

定义 3.2 方法 (2.2) 称为是 EBS- 稳定 (expanded BS- 稳定, BS- 稳定来源于 B- 稳定和 S- 稳定, 参见文献 [25]), 如果存在常数 $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, \hat{c}_4, \hat{c}_5, \hat{c}_6 > 0$, 它们仅依赖于方法, 使得对于任何满足条件 (1.2) 及 $\gamma c_\Pi < 1$ 的初值问题 (1.1)、任何网格 $\Delta_h \in \{\Delta_h\}$ 及由 (2.2) 确定的任一积分步 $(\psi, y_1, y_2, \dots, y_n, \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_n) \rightarrow (\psi, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}, \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_{n+1})$ 和相应的扰动步

$$\begin{cases} \hat{y}^h(t) = \pi^h(t; \psi, y_1, y_2, \dots, y_n, \hat{y}_{n+1}) + R_0(t), & -\tau \leq t \leq t_{n+1}, \\ \hat{\mathbb{Y}}^h(t) = \Pi^h(t; \psi', \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_n, \hat{\mathbb{Y}}_{n+1}) + R_1(t), & -\tau \leq t \leq t_{n+1}, \\ \hat{Y}^{(n+1)} = e y_n + h_n A F(\hat{Y}^{(n+1)}, \hat{y}^h, \hat{\mathbb{Y}}^h) + R_2, \\ \hat{y}_{n+1} = y_n + h_n b^T F(\hat{Y}^{(n+1)}, \hat{y}^h, \hat{\mathbb{Y}}^h) + R_3, \\ \hat{\mathbb{Y}}_{n+1} = f(t_{n+1}, \hat{y}_{n+1}, \hat{y}^h, \hat{\mathbb{Y}}^h) + R_4 \end{cases} \quad (3.2)$$

(这里 $R_0, R_1 \in C_N[-\tau, t_{n+1}]$, $R_2 \in \mathbb{R}^{N_s}$, $R_3, R_4 \in \mathbb{R}^N$ 是任给的扰动), 有

$$\begin{aligned} \|\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}\| &\leq \hat{c}_1 (\|R_2\| + \|R_3\|) + \hat{c}_2 \beta h_n \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_0(t)\| \\ &\quad + \hat{c}_3 \gamma h_n \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_1(t)\| + \frac{\hat{c}_4 \gamma h_n}{1 - \gamma c_\Pi} \|R_4\|, \\ \alpha h_n &\leq \hat{c}_5, \quad \frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_\Pi} h_n \leq \hat{c}_6. \end{aligned} \quad (3.3)$$

定义 3.3 方法 (2.2) 称为是 EBSI (expanded internal BS)- 稳定的, 如果存在常数 $\check{c}_1, \check{c}_2, \check{c}_3, \check{c}_4$, 它们仅依赖于方法, 使得对于任何满足条件 (1.2) 及 $\gamma c_\Pi < 1$ 的初值问题 (1.1)、任何网格 $\Delta_h \in \{\Delta_h\}$ 及由 (2.2) 确定的任一积分步 $(\psi, y_1, y_2, \dots, y_n, \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_n) \rightarrow (\psi, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}, \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_{n+1})$ 和相应的扰动步 (3.2), 有

$$\begin{aligned} \|\hat{Y}^{(n+1)} - Y^{(n+1)}\| &\leq \check{c}_1 \|R_2\| + \check{c}_2 \beta h_n \left(\max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_0(t)\| + c_\pi \|\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}\| \right) \\ &\quad + \check{c}_3 \gamma h_n \left(\max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_1(t)\| + c_\Pi \|\hat{\mathbb{Y}}_{n+1} - \mathbb{Y}_{n+1}\| \right), \\ \alpha h_n &\leq \check{c}_4. \end{aligned} \quad (3.4)$$

定义 3.4 方法 (2.2) 称为是代数稳定的, 如果它的母方法 (2.1) 是代数稳定的; 方法 (2.2) 称为是对角稳定的, 如果它的母方法 (2.1) 是对角稳定的.

由于常微分方程初值问题可视为中立型泛函微分方程初值问题 (1.1) 的最简单的特殊情形, 且此情形下方法 (2.2) 退化为母方法 (2.1), 故从定义可直接推出以下命题.

命题 3.1 方法 (2.2) 的 EB-, EBS- 及 EBSI- 稳定性分别蕴涵母方法 (2.1) 的 B-, BS- 及 BSI- 稳定性. 方法 (2.2) 的代数稳定性及对角稳定性分别等价于母方法 (2.1) 的代数稳定性及对角稳定性.

这里关于母方法 (2.1) 的各种稳定性概念可参见文献 [23, 25–27].

定理 3.1 若方法 (2.2) 是对角稳定的, 则它是 EBS- 稳定且 EBSI- 稳定的.

证明 方法 (2.2) 的对角稳定性意味着存在 $s \times s$ 对角矩阵 $B > 0$, 使得

$$E := BA + A^T B > 0. \quad (3.5)$$

由此显见矩阵 A 非奇, 且存在仅依赖于方法的常数 $\check{c}_4 > 0$, 使得

$$\check{E} := A^{-T} E A^{-1} - 2\check{c}_3 B > 0. \quad (3.6)$$

记

$$W = \hat{Y}^{(n+1)} - Y^{(n+1)}, \quad Q = h_n [F(\hat{Y}^{(n+1)}, \hat{y}^h, \hat{\mathbb{Y}}^h) - F(Y^{(n+1)}, y^h, \mathbb{Y}^h)]. \quad (3.7)$$

当 $\alpha h_n \leq \check{c}_4$ 时, 由 (1.2), (2.2) 和 (3.2) 及 (3.5)–(3.7) 可推出

$$\begin{aligned} & -2h_n \sqrt{s} \|B\| \|W\| \left(\beta \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|\hat{y}^h(t) - y^h(t)\| + \gamma \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|\hat{\mathbb{Y}}^h(t) - \mathbb{Y}^h(t)\| \right) \\ & \leq \langle W, 2\check{c}_3 B W \rangle + 2\langle Q, -B W \rangle \\ & = -\langle W, \check{E} W \rangle + 2\langle B A^{-1} W - B Q, W \rangle \\ & \leq -\lambda_{\min}^{\check{E}} \|W\|^2 + \|2B A^{-1}\| \|W\| \|R_2\|. \end{aligned}$$

由此及 (3.2), (2.2) 和 (2.5) 得

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}^{\check{E}} \|W\| & \leq \|2B A^{-1}\| \|R_2\| + 2h_n \beta \sqrt{s} \|B\| \left(\max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|\pi^h(t; \psi, y_1, y_2, \dots, y_n, \hat{y}_{n+1})\| \right. \\ & \quad \left. - \pi^h(t; \psi, y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1})\| + \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_0(t)\| \right) \\ & \quad + 2h_n \gamma \sqrt{s} \|B\| \left(\max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|\Pi^h(t; \psi', \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_n, \hat{\mathbb{Y}}_{n+1})\| \right. \\ & \quad \left. - \Pi^h(t; \psi', \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_n, \mathbb{Y}_{n+1})\| + \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_1(t)\| \right) \\ & \leq \|2B A^{-1}\| \|R_2\| + 2h_n \beta \sqrt{s} \|B\| \left(c_\pi \|\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}\| + \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_0(t)\| \right) \\ & \quad + 2h_n \gamma \sqrt{s} \|B\| \left(c_\Pi \|\hat{\mathbb{Y}}_{n+1} - \mathbb{Y}_{n+1}\| + \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_1(t)\| \right). \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} \|W\| & \leq \check{c}_1 \|R_2\| + \check{c}_2 \beta h_n \left(\max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_0(t)\| + c_\pi \|\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}\| \right) \\ & \quad + \check{c}_3 \gamma h_n \left(\max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_1(t)\| + c_\Pi \|\hat{\mathbb{Y}}_{n+1} - \mathbb{Y}_{n+1}\| \right), \end{aligned}$$

$$\alpha h_n \leq \check{c}_4, \quad (3.8)$$

这里

$$\check{c}_1 = \|2BA^{-1}\|/\lambda_{\min}^{\check{E}}, \quad \check{c}_2 = (2\sqrt{s}\|B\|)/\lambda_{\min}^{\check{E}}, \quad \check{c}_3 = (2\sqrt{s}\|B\|)/\lambda_{\min}^{\check{E}}.$$

至此方法的 EBSI- 稳定性得证. 其次由 (2.2), (3.2) 和 (3.8) 推出

$$\begin{aligned} \|\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}\| &= \|b^T Q + R_3\| = \|b^T A^{-1}(\hat{Y}^{(n+1)} - Y^{(n+1)} - R_2) + R_3\| \\ &\leq \|b^T A^{-1}\|(\|\hat{Y}^{(n+1)} - Y^{(n+1)}\| + \|R_2\|) + \|R_3\| \\ &\leq (1 + \check{c}_1)\|b^T A^{-1}\|\|R_2\| + \check{c}_2\beta h_n \|b^T A^{-1}\| \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_0(t)\| \\ &\quad + \check{c}_2 c_\pi \beta h_n \|b^T A^{-1}\| \|\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}\| + \|R_3\| \\ &\quad + \check{c}_3 \gamma h_n \|b^T A^{-1}\| \left(\max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_1(t)\| + c_\Pi \|\hat{Y}_{n+1} - Y_{n+1}\| \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

另一方面, 从条件 (1.2) 可得

$$\begin{aligned} \|\hat{Y}_{n+1} - Y_{n+1}\| &\leq L\|\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}\| + \beta \left(\max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_0(t)\| + c_\pi \|\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}\| \right) \\ &\quad + \gamma \left(\max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_1(t)\| + c_\Pi \|\hat{Y}_{n+1} - Y_{n+1}\| \right) + \|R_4\|. \end{aligned}$$

由此立得

$$\begin{aligned} \|\hat{Y}_{n+1} - Y_{n+1}\| &\leq \frac{L}{1 - \gamma c_\Pi} \|\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}\| \\ &\quad + \frac{\beta}{1 - \gamma c_\Pi} \left(\max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_0(t)\| + c_\pi \|\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}\| \right) \\ &\quad + \frac{\gamma}{1 - \gamma c_\Pi} \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_1(t)\| + \frac{1}{1 - \gamma c_\Pi} \|R_4\|. \end{aligned}$$

将上式代入 (3.9) 可得

$$\begin{aligned} \|\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}\| &\leq \hat{c}_1(\|R_2\| + \|R_3\|) + \hat{c}_2\beta h_n \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_0(t)\| + \frac{\hat{c}_4\gamma h_n}{1 - \gamma c_\Pi} \|R_4\| \\ &\quad + \hat{c}_3\gamma h_n \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_1(t)\|, \quad \alpha h_n \leq \hat{c}_5, \quad \frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_\Pi} h_n \leq \hat{c}_6, \end{aligned}$$

这里用到了 $\check{c}_2 = \check{c}_3$, 并且

$$\begin{aligned} \hat{c}_1 &= \frac{1}{c_0} \max\{(1 + \check{c}_1)\|b^T A^{-1}\|, 1\}, \quad \hat{c}_2 = \frac{\check{c}_2\|b^T A^{-1}\|}{c_0}, \\ \hat{c}_3 &= \frac{\check{c}_3\|b^T A^{-1}\|}{c_0}, \quad \hat{c}_4 = \frac{\check{c}_3 c_\Pi\|b^T A^{-1}\|}{c_0}, \quad \hat{c}_5 = \check{c}_4, \quad \hat{c}_6 = \frac{1 - c_0}{\check{c}_2 c_\Pi\|b^T A^{-1}\|}, \end{aligned}$$

其中常数 $c_0 \in (0, 1)$ 任给. 证毕. $\square$

从定理 3.1 的证明过程易知下面的命题成立.

命题 3.2 方法 (2.2) 的 EBSI- 稳定性蕴涵 EBS- 稳定性.

定理 3.2 若方法 (2.2) EBS- 稳定, 且它的母方法 (2.1) 是 B- 稳定的, 则方法 (2.2) 是 EB- 稳定的.

证明 考虑用方法 (2.2) 求解满足条件 (1.2) 的任何初值问题 (1.1) 时的任意两个平行的积分步 $(\psi, y_1, y_2, \dots, y_n, \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_n) \rightarrow (\psi, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}, \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_{n+1})$ 和 $(\chi, z_1, z_2, \dots, z_n, \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \dots, \mathbb{Z}_n) \rightarrow (\chi, z_1, z_2, \dots, z_{n+1}, \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \dots, \mathbb{Z}_{n+1})$, 前者由 (2.2) 确定, 后者由

$$\begin{cases} z^h(t) = \pi^h(t; \chi, z_1, z_2, \dots, z_{n+1}), \\ \mathbb{Z}^h(t) = \Pi^h(t; \chi', \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \dots, \mathbb{Z}_{n+1}), \\ Z^{(n+1)} = ez_n + h_n AF(Z^{(n+1)}, z^h), \\ z_{n+1} = z_n + h_n b^T F(Z^{(n+1)}, z^h), \\ \mathbb{Z}_{n+1} = f(t_{n+1}, z_{n+1}, z^h, \mathbb{Z}^h) \end{cases} \quad (3.10)$$

确定. 同时考虑用母方法 (2.1) 按步长 h_n 求解常微分方程

$$u'(t) = f(t, u(t), y^h, \mathbb{Y}^h), \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}$$

的相应的两个平行积分步 $(t_n, u_n) \rightarrow (t_{n+1}, u_{n+1})$:

$$\begin{cases} U^{(n+1)} = eu_n + h_n AF(U^{(n+1)}, y^h, \mathbb{Y}^h), \\ u_{n+1} = u_n + h_n b^T F(U^{(n+1)}, y^h, \mathbb{Y}^h) \end{cases} \quad (3.11)$$

及 $(t_n, v_n) \rightarrow (t_{n+1}, v_{n+1})$:

$$\begin{cases} V^{(n+1)} = ev_n + h_n AF(V^{(n+1)}, y^h, \mathbb{Y}^h), \\ v_{n+1} = v_n + h_n b^T F(V^{(n+1)}, y^h, \mathbb{Y}^h), \end{cases} \quad (3.12)$$

这里的 $y^h, \mathbb{Y}^h \in C_N[-\tau, t_{n+1}]$ 由方程 (2.2) 确定. 令 $u_n = y_n, v_n = z_n$. 则方程 (3.11) 可等价地写成

$$\begin{cases} y^h(t) = \pi^h(t, \psi, y_1, y_2, \dots, y_n, u_{n+1}) + R_u(t), & -\tau \leq t \leq t_{n+1}, \\ \mathbb{Y}^h(t) = \Pi^h(t; \psi', \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_n, \mathbb{U}_{n+1}) + R_U(t), & -\tau \leq t \leq t_{n+1}, \\ U^{(n+1)} = ey_n + h_n AF(U^{(n+1)}, y^h, \mathbb{Y}^h), \\ u_{n+1} = y_n + h_n b^T F(U^{(n+1)}, y^h, \mathbb{Y}^h), \\ \mathbb{U}_{n+1} = f(t_{n+1}, u_{n+1}, y^h, \mathbb{Y}^h), \end{cases} \quad (3.13)$$

其中

$$\begin{aligned} R_u(t) &= \pi^h(t; \psi, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) - \pi^h(t; \psi, y_1, y_2, \dots, y_n, u_{n+1}), \\ R_U(t) &= \Pi^h(t; \psi', \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_{n+1}) - \Pi^h(t; \psi', \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_n, \mathbb{U}_{n+1}). \end{aligned}$$

(3.13) 可视为积分步 (2.2) 的一个扰动步. 于是由 EBS- 稳定性及插值算子 π^h 和 Π^h 的正规性条件 (2.5) 和 (2.6) 得到

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - y_{n+1}\| &\leq \hat{c}_2 \beta h_n \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_u(t)\| + \hat{c}_3 \gamma h_n \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_U(t)\| \\ &\leq \hat{c}_2 c_\pi \beta h_n \|u_{n+1} - y_{n+1}\| + \hat{c}_3 c_\Pi \gamma h_n \|\mathbb{U}_{n+1} - \mathbb{Y}_{n+1}\|, \end{aligned}$$

$$\alpha h_n \leq \hat{c}_5, \quad \frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_\Pi} h_n \leq \hat{c}_6.$$

另一方面, 从条件 (1.2) 容易得到

$$\|\mathbb{U}_{n+1} - \mathbb{Y}_{n+1}\| \leq L \|u_{n+1} - y_{n+1}\|.$$

由此立得

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - y_{n+1}\| &\leq \hat{c}_2 c_\pi \beta h_n \|u_{n+1} - y_{n+1}\| + \hat{c}_3 c_\Pi \gamma L h_n \|u_{n+1} - y_{n+1}\| \\ &\leq \hat{c}_2 c_\Pi (r\beta + \gamma L) h_n \|u_{n+1} - y_{n+1}\|, \\ \alpha h_n &\leq \hat{c}_5, \quad \frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_\Pi} h_n \leq \hat{c}_6. \end{aligned}$$

任取 $\hat{c}_0 \in (0, 1)$, 则当 $\alpha h_n \leq \hat{c}_5$ 且 $\frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_\Pi} h_n \leq \min\{\hat{c}_6, \frac{1 - \hat{c}_0}{\hat{c}_2 c_\Pi}\}$ 时从上式易推出

$$u_{n+1} = y_{n+1}, \quad \alpha h_n \leq \hat{c}_5, \quad \frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_\Pi} h_n \leq \min\left\{\hat{c}_6, \frac{1 - \hat{c}_0}{\hat{c}_2 c_\Pi}\right\}. \quad (3.14)$$

方程 (3.12) 可等价地写成

$$\begin{cases} y^h(t) = \Pi^h(t; \chi, z_1, z_2, \dots, z_n, v_{n+1}) + R_v(t), & -\tau \leq t \leq t_{n+1}, \\ \mathbb{Y}^h(t) = \Pi^h(t; \chi', \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \dots, \mathbb{Z}_n, \mathbb{V}_{n+1}) + R_V(t), & -\tau \leq t \leq t_{n+1}, \\ V^{(n+1)} = e z_n + h_n A F(V^{(n+1)}, y^h, \mathbb{Z}^h), \\ v_{n+1} = z_n + h_n b^T F(V^{(n+1)}, y^h, \mathbb{Z}^h), \\ \mathbb{V}_{n+1} = f(t_{n+1}, v_{n+1}, y^h, \mathbb{Y}^h), \end{cases} \quad (3.15)$$

并可视为积分步 (3.10) 的一个扰动步, 带有扰动

$$\begin{aligned} R_v(t) &= R_0(t) + \pi^h(t; \chi, z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) - \pi^h(t; \chi, z_1, z_2, \dots, z_n, v_{n+1}), \\ R_U(t) &= R_1(t) + \Pi^h(t; \chi', \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \dots, \mathbb{Z}_{n+1}) - \Pi^h(t; \chi', \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \dots, \mathbb{Z}_n, \mathbb{V}_{n+1}), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} R_0(t) &= \pi^h(t; \psi, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) - \pi^h(t; \chi, z_1, z_2, \dots, z_{n+1}), \\ R_1(t) &= \Pi^h(t; \psi', \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_{n+1}) - \Pi^h(t; \chi', \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \dots, \mathbb{Z}_{n+1}). \end{aligned}$$

于是由 EBS- 稳定性及插值算子 π^h 和 Π^h 的正规性条件 (2.5) 和 (2.6) 得到

$$\begin{aligned} \|v_{n+1} - z_{n+1}\| &\leq \hat{c}_2 \beta h_n \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_v(t)\| + \hat{c}_3 \gamma h_n \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_V(t)\| \\ &\leq \hat{c}_2 \beta h_n \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_0(t)\| + \hat{c}_2 c_\pi \beta h_n \|v_{n+1} - z_{n+1}\| \\ &\quad + \hat{c}_3 \gamma h_n \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_1(t)\| + \hat{c}_3 c_\Pi \gamma h_n \|\mathbb{V}_{n+1} - \mathbb{Z}_{n+1}\|, \\ \alpha h_n &\leq \hat{c}_5, \quad \frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_\Pi} h_n \leq \hat{c}_6. \end{aligned} \quad (3.16)$$

另一方面, 从条件 (1.2) 容易得到

$$\|\mathbb{V}_{n+1} - \mathbb{Z}_{n+1}\| \leq L\|v_{n+1} - z_{n+1}\|.$$

上式代入 (3.16) 立得

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - y_{n+1}\| &\leq \hat{c}_2 \beta h_n \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_0(t)\| + \hat{c}_2 c_\pi \beta h_n \|v_{n+1} - z_{n+1}\| \\ &\quad + \hat{c}_3 \gamma h_n \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_1(t)\| + \hat{c}_3 c_\Pi \gamma L h_n \|v_{n+1} - z_{n+1}\| \\ &\leq \hat{c}_2 \beta h_n \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_0(t)\| + \hat{c}_3 \gamma h_n \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_1(t)\| \\ &\quad + \hat{c}_2 c_\Pi (r\beta + \gamma L) h_n \|v_{n+1} - z_{n+1}\|, \\ \alpha h_n &\leq \hat{c}_5, \quad \frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_\Pi} h_n \leq \hat{c}_6. \end{aligned}$$

当 $\alpha h_n \leq \hat{c}_5$ 且 $\frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_\Pi} h_n \leq \min\{\hat{c}_6, \frac{1 - \hat{c}_0}{\hat{c}_2 c_\Pi}\}$ 时, 从上式易进一步推出

$$\begin{aligned} \|v_{n+1} - z_{n+1}\| &\leq \frac{\hat{c}_2}{\hat{c}_0} \beta h_n \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_0(t)\| + \frac{\hat{c}_3}{\hat{c}_0} \gamma h_n \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_1(t)\|, \\ \alpha h_n &\leq \hat{c}_5, \quad \frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_\Pi} h_n \leq \min\left\{\hat{c}_6, \frac{1 - \hat{c}_0}{\hat{c}_2 c_\Pi}\right\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

另一方面, 由于母方法 (2.1) 是 B- 稳定的, 故有 (参见文献 [25, 27, 28])

$$\|u_{n+1} - v_{n+1}\| \leq (1 + \delta_1 \alpha_+ h_n)^{\frac{1}{2}} \|y_n - z_n\|, \quad \alpha h_n \leq \delta_2, \quad (3.18)$$

这里 $\delta_1, \delta_2 > 0$ 是仅依赖于方法的常数. 由 (3.14), (3.17) 和 (3.18) 立得

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - z_{n+1}\| &\leq \|u_{n+1} - v_{n+1}\| + \|v_{n+1} - z_{n+1}\| \\ &\leq (1 + \delta_1 \alpha_+ h_n)^{\frac{1}{2}} \|y_n - z_n\| + \frac{\hat{c}_2}{\hat{c}_0} \beta h_n \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_0(t)\| \\ &\quad + \frac{\hat{c}_3}{\hat{c}_0} \gamma h_n \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_1(t)\|, \\ \alpha h_n &\leq \min\{\hat{c}_5, \delta_2\}, \quad \frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_\Pi} h_n \leq \min\left\{\hat{c}_6, \frac{1 - \hat{c}_0}{\hat{c}_2 c_\Pi}\right\}. \end{aligned}$$

定理 3.2 得证. $\square$

从定理 3.1, 3.2 和命题 3.1, 3.2, 并注意代数稳定性和 BSI- 稳定性蕴涵母方法 (2.1) 的 B- 稳定性 (参见文献 [25, 27, 28]), 可得以下命题.

命题 3.3 若方法 (2.2) 是代数稳定且 EBSI- 稳定的, 则该方法为 EB- 稳定的.

命题 3.4 若方法 (2.2) 是代数稳定且对角稳定的, 则该方法为 EB- 稳定的.

定理 3.3 若方法 (2.2) 是 EB- 稳定的, 则对于任何满足条件 (1.2) 和 $\gamma c_\Pi < 1$ 的初值问题 (1.1)、任何网格 $\Delta_h \in \{\Delta_h\}$ 及任意两个平行的积分步 $(\psi, y_1, y_2, \dots, y_n, \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_n) \rightarrow (\psi, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}, \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_{n+1})$ 和 $(\chi, z_1, z_2, \dots, z_n, \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \dots, \mathbb{Z}_n) \rightarrow (\chi, z_1, z_2, \dots, z_{n+1}, \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \dots, \mathbb{Z}_{n+1})$, 其中 $\mathbb{Y}_k$ 和 $\mathbb{Z}_k, 1 \leq j \leq k \leq n$, 分别是由

$$\mathbb{Y}_k = f(t_k, y_k, y^h, \mathbb{Y}^h), \quad (3.19)$$

及

$$\mathbb{Z}_k = f(t_k, z_k, z^h, \mathbb{Z}^h) \quad (3.20)$$

算出, 有

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - z_{n+1}\| &\leq (1 + ch_n) \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \|y_i - z_i\|, \|\psi(t) - \chi(t)\|_{[-\tau, 0]} \max_{0 \leq i \leq j-1} \|\mathbb{Y}_i - \mathbb{Z}_i\| \right\}, \\ \alpha h_n &\leq \bar{c}_4, \quad \frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_\Pi} h_n \leq \bar{c}_5, \end{aligned} \quad (3.21)$$

特别地, 若 $j = 1$, 则有

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - z_{n+1}\| &\leq (1 + ch_n) \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \|y_i - z_i\|, \|\psi(t) - \chi(t)\|_{[-\tau, 0]} \right\}, \\ \alpha h_n &\leq \bar{c}_4, \quad \frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_\Pi} h_n \leq \bar{c}_5, \end{aligned} \quad (3.22)$$

这里 $c = \bar{c}_1 \alpha_+ + \bar{c}_2 \max\{r\beta + \gamma, \frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_\Pi}\}$, 常数 $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_4, \bar{c}_5 > 0$ 仅依赖于方法.

证明 由于方法是 EB- 稳定的, 存在仅依赖于方法的常数 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 > 0$, 使得不等式 (3.1) 成立. 由此及插值算子 π^h 和 Π^h 的正规性条件 (2.5) 和 (2.6) 易知, 当 $\alpha h_n \leq c_4$ 且 $\frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_\Pi} h_n \leq c_5$ 时有

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - z_{n+1}\| &\leq (1 + c_1 \alpha_+ h_n)^{\frac{1}{2}} \|y_n - z_n\| + c_2 c_\pi \beta h_n \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n+1} \|y_i - z_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi(t) - \chi(t)\| \right\} \\ &\quad + c_2 c_\Pi \gamma h_n \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n+1} \|\mathbb{Y}_i - \mathbb{Z}_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi'(t) - \chi'(t)\| \right\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

我们分三种情形来讨论.

情形 1 若

$$\max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n+1} \|\mathbb{Y}_i - \mathbb{Z}_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi'(t) - \chi'(t)\| \right\} = \|\mathbb{Y}_{n+1} - \mathbb{Z}_{n+1}\|,$$

则

$$\begin{aligned} &\max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n+1} \|\mathbb{Y}_i - \mathbb{Z}_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi'(t) - \chi'(t)\| \right\} \\ &= \|\mathbb{Y}_{n+1} - \mathbb{Z}_{n+1}\| \\ &\leq L \|y_{n+1} - z_{n+1}\| + \beta c_\pi \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n+1} \|y_i - z_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi(t) - \chi(t)\| \right\} \\ &\quad + \gamma c_\Pi \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n+1} \|\mathbb{Y}_i - \mathbb{Z}_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi'(t) - \chi'(t)\| \right\}. \end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned} &\max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n+1} \|\mathbb{Y}_i - \mathbb{Z}_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi'(t) - \chi'(t)\| \right\} \\ &\leq \frac{L}{1 - \gamma c_\Pi} \|y_{n+1} - z_{n+1}\| + \frac{\beta c_\pi}{1 - \gamma c_\Pi} \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n+1} \|y_i - z_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi(t) - \chi(t)\| \right\}. \end{aligned}$$

将上式代入 (3.23) 可得

$$\|y_{n+1} - z_{n+1}\| \leq (1 + c_1 \alpha_+ h_n)^{\frac{1}{2}} \|y_n - z_n\| + \frac{c_2 c_\Pi \gamma L h_n}{1 - \gamma c_\Pi} \|y_{n+1} - z_{n+1}\|$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{c_2 c_\pi \beta h_n}{1 - \gamma c_\Pi} \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n+1} \|y_i - z_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi(t) - \chi(t)\| \right\} \\
& \leq (1 + c_1 \alpha_+ h_n)^{\frac{1}{2}} \|y_n - z_n\| + \frac{c_2 c_\Pi (r\beta + \gamma L) h_n}{1 - \gamma c_\Pi} \|y_{n+1} - z_{n+1}\| \\
& + \frac{c_2 c_\pi \beta h_n}{1 - \gamma c_\Pi} \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \|y_i - z_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi(t) - \chi(t)\| \right\}.
\end{aligned}$$

由此立得

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{c_2 c_\Pi (r\beta + \gamma L) h_n}{1 - \gamma c_\Pi} \right) \|y_{n+1} - z_{n+1}\| \\
& \leq \left[(1 + c_1 \alpha_+ h_n)^{\frac{1}{2}} + \frac{c_2 c_\pi \beta h_n}{1 - \gamma c_\Pi} \right] \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \|y_i - z_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi(t) - \chi(t)\| \right\}.
\end{aligned}$$

情形 2 若

$$\max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n+1} \|\mathbb{Y}_i - \mathbb{Z}_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi'(t) - \chi'(t)\| \right\} = \|\mathbb{Y}_k - \mathbb{Z}_k\|, \quad 1 \leq j \leq k \leq n,$$

则

$$\begin{aligned}
& \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \|\mathbb{Y}_i - \mathbb{Z}_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi'(t) - \chi'(t)\| \right\} \\
& = \|\mathbb{Y}_k - \mathbb{Z}_k\| \\
& \leq L \|y_k - z_k\| + \beta c_\pi \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq k} \|y_i - z_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi(t) - \chi(t)\| \right\} \\
& + \gamma c_\Pi \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq k} \|\mathbb{Y}_i - \mathbb{Z}_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi'(t) - \chi'(t)\| \right\}.
\end{aligned}$$

由此立得

$$\begin{aligned}
& \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \|\mathbb{Y}_i - \mathbb{Z}_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi'(t) - \chi'(t)\| \right\} \\
& \leq \frac{L}{1 - \gamma c_\Pi} \|y_k - z_k\| + \frac{\beta c_\pi}{1 - \gamma c_\Pi} \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq k} \|y_i - z_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi(t) - \chi(t)\| \right\}.
\end{aligned}$$

将上式代入 (3.23) 可得

$$\begin{aligned}
\|y_{n+1} - z_{n+1}\| & \leq (1 + c_1 \alpha_+ h_n)^{\frac{1}{2}} \|y_n - z_n\| + c_2 c_\pi \beta h_n \|y_{n+1} - z_{n+1}\| \\
& + c_2 c_\pi \beta h_n \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \|y_i - z_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi(t) - \chi(t)\| \right\} + \frac{c_2 c_\Pi \gamma L h_n}{1 - \gamma c_\Pi} \|y_k - z_k\| \\
& + \frac{c_2 c_\Pi \gamma c_\pi \beta h_n}{1 - \gamma c_\Pi} \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq k} \|y_i - z_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi(t) - \chi(t)\| \right\} \\
& \leq (1 + c_1 \alpha_+ h_n)^{\frac{1}{2}} \|y_n - z_n\| + \frac{c_2 c_\Pi (r\beta + \gamma L) h_n}{1 - \gamma c_\Pi} \|y_{n+1} - z_{n+1}\| \\
& + \frac{c_2 c_\Pi (r\beta + \gamma L) h_n}{1 - \gamma c_\Pi} \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \|y_i - z_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi(t) - \chi(t)\| \right\}.
\end{aligned}$$

因而

$$\left(1 - \frac{c_2 c_\Pi (r\beta + \gamma L) h_n}{1 - \gamma c_\Pi} \right) \|y_{n+1} - z_{n+1}\|$$

$$\leq \left[(1 + c_1 \alpha_+ h_n)^{\frac{1}{2}} + \frac{c_2 c_{\Pi} (r\beta + \gamma L) h_n}{1 - \gamma c_{\Pi}} \right] \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \|y_i - z_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi(t) - \chi(t)\| \right\}.$$

情形 3 若

$$\max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n+1} \|\mathbb{Y}_i - \mathbb{Z}_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi'(t) - \chi'(t)\| \right\} = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq j-1} \|\mathbb{Y}_i - \mathbb{Z}_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi'(t) - \chi'(t)\| \right\},$$

则在这种情形下, 从 (3.23) 易得

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - z_{n+1}\| &\leq (1 + c_1 \alpha_+ h_n)^{\frac{1}{2}} \|y_n - z_n\| + c_2 c_{\Pi} \beta h_n \|y_{n+1} - z_{n+1}\| \\ &\quad + c_2 c_{\Pi} \beta h_n \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \|y_i - z_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi(t) - \chi(t)\| \right\} \\ &\quad + c_2 c_{\Pi} \gamma h_n \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq j-1} \|\mathbb{Y}_i - \mathbb{Z}_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi'(t) - \chi'(t)\| \right\} \\ &\leq (1 + c_1 \alpha_+ h_n)^{\frac{1}{2}} \|y_n - z_n\| + \frac{c_2 c_{\Pi} (r\beta + \gamma L) h_n}{1 - \gamma c_{\Pi}} \|y_{n+1} - z_{n+1}\| \\ &\quad + c_2 c_{\Pi} (r\beta + \gamma) h_n \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \|y_i - z_i\|, \|\psi - \chi\|_{[-\tau, 0]}, \max_{1 \leq i \leq j-1} \|\mathbb{Y}_i - \mathbb{Z}_i\| \right\}. \end{aligned}$$

对上述任意一种情况, 任意取定 $c_0 \in (0, 1)$, 并令 $\bar{c}_4 = c_4, \bar{c}_5 = \min\{c_5, \frac{1-c_0}{c_2 c_{\Pi}}\}$. 则当 $\alpha h_n \leq \bar{c}_4$ 且 $\frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_{\Pi}} h_n \leq \bar{c}_5$ 时, 由上式可以推出

$$\|y_{n+1} - z_{n+1}\| \leq (1 + c h_n) \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \|y_i - z_i\|, \|\psi(t) - \chi(t)\|_{[-\tau, 0]}, \max_{1 \leq i \leq j-1} \|\mathbb{Y}_i - \mathbb{Z}_i\| \right\},$$

这里 $c = \bar{c}_1 \alpha_+ + \bar{c}_2 \max\{r\beta + \gamma, \frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_{\Pi}}\}$, $\bar{c}_1 = c_1/c_0$, $\bar{c}_2 = 2c_2 c_{\Pi}/c_0$.

对于 $j = 1$ 的情形, 只要注意情况 3, 此时

$$\max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n+1} \|\mathbb{Y}_i - \mathbb{Z}_i\|, \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi'(t) - \chi'(t)\| \right\} = \max_{-\tau \leq t \leq 0} \|\psi'(t) - \chi'(t)\|,$$

于是同理易得 (3.22). 证毕. $\square$

必须强调指出, 尽管 Runge-Kutta 法是单步方法, 但当试图使用高阶方法并通过分段插值来构造两个高阶相容的插值算子 π^h 和 Π^h 时, 在每个分段上构造插值函数往往需要较多的插值基点及被插值函数在这些基点上的多个逼近值, 这就导致方法 (2.2) 在此情形下具有多步方法的特征, 参见文献 [23]. 事实上, 在方法起步时, 如果需要在某个区间 $[0, \delta]$ ($\delta > 0$) 上构造高阶插值函数, 则除了需要用到起始函数外, 还需要用到进行插值所必须的若干个 (设为 k 个) 事先通过其他方法算出的具有足够精度的附加起始值.

定理 3.4 若方法 (2.2) 是 EB- 稳定的, 则用该方法分别从任给两组不同起始数据 $\{\psi(t), y_1, y_2, \dots, y_k, \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_k\}$ 和 $\{\chi(t), z_1, z_2, \dots, z_k, \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \dots, \mathbb{Z}_k\}$ (其中设 $\mathbb{Y}_j$ 和 $\mathbb{Z}_j$, $0 \leq l < j \leq k$ 分别由 (3.19) 及 (3.20) 确定; 这里及以后, 我们用 $l = k$ 表示 $\mathbb{Y}_j$ 和 $\mathbb{Z}_j$, $j = 1, 2, \dots, k$, 不是由 (3.19) 或 (3.20) 确定) 出发, 在同样的网格 $\Delta_h \in \{\Delta_h\}$ 上求解满足条件 (1.2) 的同一初值问题 (1.1) 时, 所得到的两个逼近序列 $\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 满足

$$\begin{aligned} \|y_n - z_n\| &\leq \exp(c(t_n - t_k)) \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq k} \|y_i - z_i\|, \|\psi - \chi\|_{[-\tau, 0]}, \max_{1 \leq i \leq l} \|\mathbb{Y}_i - \mathbb{Z}_i\| \right\}, \\ \alpha \max_{k \leq i \leq n-1} h_i &\leq \bar{c}_4, \quad \frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_{\Pi}} \max_{k \leq i \leq n-1} h_i \leq \bar{c}_5. \end{aligned} \quad (3.24)$$

特别地, 若 $l = 0$, 则有

$$\begin{aligned} \|y_n - z_n\| &\leq \exp(c(t_n - t_k)) \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq k} \|y_i - z_i\|, \|\psi - \chi\|_{[-\tau, 0]} \right\}, \\ \alpha \max_{k \leq i \leq n-1} h_i &\leq \bar{c}_4, \quad \frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_{\Pi}} \max_{k \leq i \leq n-1} h_i \leq \bar{c}_5, \end{aligned} \quad (3.25)$$

这里 $c = \bar{c}_1 \alpha_+ + \bar{c}_2 \max\{r\beta + \gamma, \frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_{\Pi}}\}$, 常数 $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_4, \bar{c}_5 > 0$ 仅依赖于方法, $n = k + 1, k + 2, \dots, N_T$.

证明 令

$$X_n = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \|y_i - z_i\|, \|\psi - \chi\|_{[-\tau, 0]}, \max_{1 \leq i \leq l} \|\mathbb{Y}_i - \mathbb{Z}_i\| \right\}.$$

从方法的 EB- 稳定性不等式 (3.21) 易推出

$$X_n \leq (1 + ch_{n-1})X_{n-1}, \quad \alpha h_{n-1} \leq \bar{c}_4, \quad \frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_{\Pi}} h_{n-1} \leq \bar{c}_5,$$

当 $\alpha \max_{k \leq i \leq n-1} h_i \leq \bar{c}_4, \frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_{\Pi}} \max_{k \leq i \leq n-1} h_i \leq \bar{c}_5$ 时, 由上式递归立得

$$\begin{aligned} \|y_n - z_n\| &\leq X_n \leq \prod_{i=k}^{n-1} (1 + ch_i) X_k \leq \prod_{i=k}^{n-1} \exp(ch_i) X_k \\ &= \exp(c(t_n - t_k)) \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq k} \|y_i - z_i\|, \|\psi - \chi\|_{[-\tau, 0]}, \max_{1 \leq i \leq l} \|\mathbb{Y}_i - \mathbb{Z}_i\| \right\}, \\ \alpha \max_{k \leq i \leq n-1} h_i &\leq \bar{c}_4, \quad \frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_{\Pi}} \max_{k \leq i \leq n-1} h_i \leq \bar{c}_5. \end{aligned}$$

至于 (3.25), 易从 (3.22) 同理推得. 证毕. $\square$

注意对于在起步时不需要用到附加起始值的特殊情形, 亦即 $k = 0$ 的情形, 不等式 (3.24) 和 (3.25) 可简化为

$$\begin{aligned} \|y_n - z_n\| &\leq \exp(ct_n) \|\psi - \chi\|_{[-\tau, 0]}, \quad \alpha \max_{0 \leq i \leq n-1} h_i \leq \bar{c}_4, \\ \frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_{\Pi}} \max_{0 \leq i \leq n-1} h_i &\leq \bar{c}_5, \quad n = 1, 2, \dots, N_T. \end{aligned} \quad (3.26)$$

(3.21) (或 (3.22)) 和 (3.24) (或 (3.25) 或 (3.26)) 分别表征着方法 (2.2) 的逐步稳定性和关于初始数据的稳定性, 称它们为 EB- 稳定性不等式.

4 EB- 相容性和 EB- 收敛性

从本节开始, 如无特别说明, 则恒设问题 (1.1) 中的映射 f 及初始函数 ϕ 充分光滑, 并设真解 $y(t)$ 在区间 $[0, T]$ 上充分光滑, 且具有后文中需要用到的各阶连续导数, 满足

$$\left\| \frac{d^i y(t)}{dt^i} \right\| \leq M_i, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.1)$$

现在按照文献 [26–30] 的思想给出下列定义.

定义 4.1 称方法 (2.2) 的级阶为 p , 如果 p 是具有下面性质的最大非负整数: 对于任给的满足条件 (1.2), (4.1) 及 $\gamma c_{\Pi} < 1$ 的初值问题 (1.1) 及任何网格 $\Delta_h \in \{\Delta_h\}$, 有

$$\max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_0(t)\| \leq d_0 \left(\max_{0 \leq i \leq n} h_i \right)^p, \quad \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_1(t)\| \leq d_1 \left(\max_{0 \leq i \leq n} h_i \right)^p,$$

$$\|R_2\| \leq d_2 h_n^{p+1}, \quad \|R_3\| \leq d_3 h_n^{p+1}, \quad (4.2)$$

这里 $R_0(t)$, $R_1(t)$ 和 R_2 及 R_3 由方程组

$$\begin{cases} y(t) = \pi^h(t; \phi, y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_{n+1})) + R_0(t), & -\tau \leq t \leq t_{n+1}, \\ y'(t) = \Pi^h(t; \phi', y'(t_1), y'(t_2), \dots, y'(t_{n+1})) + R_1(t), & -\tau \leq t \leq t_{n+1}, \\ Y(t_n, h_n) = ey(t_n) + h_n AF(Y(t_n, h_n), y, y') + R_2, \\ y(t_{n+1}) = y(t_n) + h_n b^T F(Y(t_n, h_n), y, y') + R_3, \\ y'(t_{n+1}) = f(t_{n+1}, y(t_{n+1}), y, y') \end{cases} \quad (4.3)$$

确定, 每个常数 d_i ($i = 0, 1, 2, 3$) 仅依赖于方法和问题真解 $y(t)$ 的某些导数界 M_i (不依赖于 n 和 Δ_h).

定义 4.2 方法 (2.2) 中的插值算子 π^h 称为是 p 阶相容的, 如果对于任何网格 $\Delta_h \in \{\Delta_h\}$, 任何充分光滑的函数 $y: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ 及 $\phi \in C_N^1[-\tau, 0]$ 满足 $\phi(0) = y(0)$, 有

$$\max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|\tilde{y}(t) - \pi^h(t; \phi, y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_{n+1}))\| \leq d_\pi \left(\max_{0 \leq i \leq n} h_i \right)^p, \quad (4.4)$$

这里

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y(t), & 0 \leq t \leq T, \\ \phi(t), & -\tau \leq t \leq 0, \end{cases}$$

常数 d_π 仅依赖于函数 $y(t)$ 的某些导数界 M_i (不依赖于 n 和 Δ_h).

定义 4.3 方法 (2.2) 中的插值算子 Π^h 称为是 p 阶相容的, 如果对于任何网格 $\Delta_h \in \{\Delta_h\}$, 任何充分光滑的函数 $y: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ 及 $\phi \in C_N^1[-\tau, 0]$ 满足 $\phi'(0) = y'(0)$, 有

$$\max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|\tilde{y}'(t) - \Pi^h(t; \phi', y'(t_1), y'(t_2), \dots, y'(t_{n+1}))\| \leq d_\Pi \left(\max_{0 \leq i \leq n} h_i \right)^p, \quad (4.5)$$

这里

$$\tilde{y}'(t) = \begin{cases} y'(t), & 0 \leq t \leq T, \\ \phi'(t), & -\tau \leq t \leq 0, \end{cases}$$

常数 d_Π 仅依赖于函数 $y(t)$ 的某些导数界 M_i (不依赖于 n 和 Δ_h).

定义 4.4 方法 (2.2) 称为是 p 阶 EB- 相容的, 如果对于任何满足条件 (1.2) 和 (4.1) 及 $\gamma_{c\Pi} < 1$ 的初值问题 (1.1), 任何网格 $\Delta_h \in \{\Delta_h\}$ 及任何虚拟积分步 $(\phi, y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n), y'(t_1), y'(t_2), \dots, y'(t_n)) \rightarrow (\phi, y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n), \tilde{y}_{n+1}, y'(t_1), y'(t_2), \dots, y'(t_n), \tilde{Y}_{n+1})$,

$$\begin{cases} \tilde{y}^h(t) = \pi^h(t; \phi, y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n), \tilde{y}_{n+1}), & -\tau \leq t \leq t_{n+1}, \\ \tilde{Y}^h(t) = \Pi^h(t; \phi', y'(t_1), y'(t_2), \dots, y'(t_n), \tilde{Y}_{n+1}), & -\tau \leq t \leq t_{n+1}, \\ \tilde{Y} = ey(t_n) + h_n AF(\tilde{Y}, \tilde{y}^h, \tilde{Y}^h), \\ \tilde{y}_{n+1} = y(t_n) + h_n b^T F(\tilde{Y}, \tilde{y}^h, \tilde{Y}^h), \\ \tilde{Y}_{n+1} = f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}, \tilde{y}^h, \tilde{Y}^h), \end{cases} \quad (4.6)$$

有

$$\|y(t_{n+1}) - \tilde{y}_{n+1}\| \leq \tilde{d} \left(\max_{0 \leq i \leq n} h_i \right)^p h_n, \quad h_n \leq \tilde{h}, \quad (4.7)$$

这里常数 $\tilde{d}$ 仅依赖于方法、 β, γ 及问题真解 $y(t)$ 的某些导数界 M_i , 常数 $\tilde{h}$ 仅依赖于 $\alpha, \beta, \gamma, \gamma L$ 和方法 (它们都不依赖于 n 和网格 Δ_h).

定义 4.5 方法 (2.2) 称为是 p 阶最佳 EB- 收敛的, 如果以该方法从任给起始 $\psi \in C_N^1[-\tau, 0]$, $y_1, y_2, \dots, y_k, \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_k \in \mathbb{R}^N$ (其中设 $\mathbb{Y}_j, j = l+1, l+2, \dots, k, l = 0, 1, \dots, k$ 由 (3.19) 确定) 出发, 在任给网格 $\Delta_h \in \{\Delta_h\}$ 上数值求解任给的满足条件 (1.2) 和 (4.1) 及 $\gamma c_{\Pi} < 1$ 的初值问题 (1.1) 时, 所得到的逼近序列 $\{y_n\}$ 的整体误差有估计

$$\begin{aligned} \|y_n - y(t_n)\| \leq & C_0(t_n) \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq k} \|y_i - y(t_i)\|, \|\psi - \phi\|_{[-\tau, 0]}, \max_{1 \leq i \leq l} \|\mathbb{Y}_i - y'(t_i)\| \right\} \\ & + C(t_n) \left(\max_{0 \leq i \leq n-1} h_i \right)^p, \quad \max_{k \leq i \leq n-1} h_i \leq H_0, \quad n > k, \end{aligned} \quad (4.8)$$

这里 $y_1, y_2, \dots, y_k, \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_k \in \mathbb{R}^m$ 是事先通过其他方法算出的附加起始值, 连续函数 $C_0(t)$ 及 $C(t)$ 仅依赖于方法、 $\alpha, \beta, \gamma, \gamma L$ 及问题真解 $y(t)$ 的某些导数界 M_i , 最大容许步长 H_0 仅依赖于 $\alpha, \beta, \gamma, \gamma L$ 和方法 (它们都不依赖于 n 和网格 Δ_h).

注 4.1 对于 $l = k$, 前面已指出, 其意是 $\mathbb{Y}_j, j = 1, l+2, \dots, k$ 不是由 (3.19) 确定. 若 $l = 0$, 则 (4.8) 意味着

$$\begin{aligned} \|y_n - y(t_n)\| \leq & C_0(t_n) \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq k} \|y_i - y(t_i)\|, \|\psi - \phi\|_{[-\tau, 0]} \right\} \\ & + C(t_n) \left(\max_{0 \leq i \leq n-1} h_i \right)^p, \quad \max_{k \leq i \leq n-1} h_i \leq H_0, \quad n > k. \end{aligned} \quad (4.9)$$

注意对于不需要附加起始值的特殊情形, 亦即 $k = 0$ 的特殊情形, (4.8) 可简化为

$$\begin{aligned} \|y_n - y(t_n)\| \leq & C_0(t_n) \|\psi - \phi\|_{[-\tau, 0]} + C(t_n) \left(\max_{0 \leq i \leq n-1} h_i \right)^p, \\ & \max_{k \leq i \leq n-1} h_i \leq H_0, \quad n = 1, 2, \dots, N_T. \end{aligned} \quad (4.10)$$

从定义 4.1–4.3 直接得到以下命题.

命题 4.1 方法 (2.2) 的级阶为 p 的充分必要条件是插值算子 π^h 和 Π^h 都是 p 阶相容的, 且其母方法 (2.1) 的级阶为 p .

定理 4.1 若方法 (2.2) 是 EBS- 稳定的, 且其级阶为 p , 则该方法是 p 阶 EB- 相容的.

证明 由级阶的定义可知, 对于任给的满足条件 (1.2) 及 (4.1) 的初值问题 (1.1) 及任何网格 $\Delta_h \in \{\Delta_h\}$, 不等式 (4.2) 成立, 且其中 $R_0(t), R_1(t)$ 和 R_2 及 R_3 满足方程 (4.3). 由 EBS- 稳定性知, 存在仅依赖于方法的常数 $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, \hat{c}_4, \hat{c}_5, \hat{c}_6 > 0$, 它们满足定义 3.2 的要求. 于是对于任何由 (4.6) 确定的虚拟积分步, 当 $\alpha h_n \leq \hat{c}_5$ 且 $\frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_{\Pi}} h_n \leq \hat{c}_6$ 时, 或即当

$$h_n \leq \tilde{h} := \begin{cases} \min \left\{ \frac{\hat{c}_5}{\alpha}, \frac{\hat{c}_6(1 - \gamma c_{\Pi})}{r\beta + \gamma L} \right\}, & \text{当 } \alpha > 0, \\ \frac{\hat{c}_6(1 - \gamma c_{\Pi})}{r\beta + \gamma L}, & \text{当 } \alpha \leq 0 \end{cases}$$

时, 由 BS- 稳定性及 (4.2), (4.3) 和 (4.6) 推出

$$\begin{aligned} \|\tilde{y}_{n+1} - y(t_{n+1})\| & \leq \hat{c}_1(\|R_2\| + \|R_3\|) + \hat{c}_2\beta h_n \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_0(t)\| + \hat{c}_3\gamma h_n \max_{-\tau \leq t \leq t_{n+1}} \|R_1(t)\| \\ & \leq \hat{c}_1(d_2 + d_3)h_n^{p+1} + \hat{c}_2\beta h_n d_0 \left(\max_{0 \leq i \leq n} h_i \right)^p + \hat{c}_3\gamma h_n d_1 \left(\max_{0 \leq i \leq n} h_i \right)^p \end{aligned}$$

$$\leq \tilde{c} \left(\max_{0 \leq i \leq n} h_i \right)^p h_n,$$

这里

$$\tilde{c} = \hat{c}_1(d_2 + d_3) + \hat{c}_2\beta d_0 + \hat{c}_3\gamma d_1.$$

注意对于 $\beta = 0$ 的特殊情形, 表达式 $\hat{c}_4/\beta$ 应当用任给的正的常数去代替. 由于常数 $\tilde{c}$ 和 $\tilde{h}$ 显然都满足定义 4.4 的要求, 定理得证. $\square$

定理 4.2 若方法 (2.2) 是 EB- 稳定的且 p 阶 EB- 相容的, 则该方法是 p 阶最佳 EB- 收敛的.

证明 以方法 (2.2) 在任给网格 $\Delta_h \in \{\Delta_h\}$ 上从任给起始数据 $\psi \in C_N^1[-\tau, 0], y_1, y_2, \dots, y_k, \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_k \in \mathbb{R}^N$ 出发数值求解任给的满足条件 (1.2) 和 (4.1) 的初值问题 (1.1), 所得的逼近序列记为 $\{y_n\}$. 由于方法是 p 阶 EB- 相容的, 对于由 (4.6) 确定的任何虚拟积分步 $(\phi, y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n), y'(t_1), y'(t_2), \dots, y'(t_n)) \rightarrow (\phi, y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n), \tilde{y}_{n+1}, y'(t_1), y'(t_2), \dots, y'(t_n), \tilde{\mathbb{Y}}_{n+1})$, 当 $h_n \leq \tilde{h}$ 时不等式 (4.7) 成立, 且其中常数 $\tilde{h}$ 和 $\tilde{d}$ 满足定义 4.4 的要求. 另一方面, 由于方法 EB- 稳定, 从定理 3.3 知, 存在仅依赖于方法的常数 $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4, \bar{c}_5 > 0$, 使得当 $\alpha h_n \leq \bar{c}_4, \frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_\Pi} h_n \leq \bar{c}_5$ 时有

$$\|\tilde{y}_{n+1} - y_{n+1}\| \leq (1 + ch_n) \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \|y(t_i) - y_i\|, \|\phi - \psi\|_{[-\tau, 0]}, \max_{1 \leq i \leq l} \|y'(t_i) - \mathbb{Y}_i\| \right\}, \quad (4.11)$$

其中常数 $c = \bar{c}_1\alpha + \bar{c}_2 \max\{r\beta + \gamma, \frac{r\beta + \gamma L}{1 - \gamma c_\Pi}\} \geq 0$. 当

$$h_n \leq H_0 := \begin{cases} \min \left\{ \tilde{h}, \frac{\bar{c}_5(1 - \gamma c_\Pi)}{r\beta + \gamma L}, \frac{\bar{c}_4}{\alpha} \right\}, & \text{当 } \alpha > 0, \\ \min \left\{ \tilde{h}, \frac{\bar{c}_5(1 - \gamma c_\Pi)}{r\beta + \gamma L} \right\}, & \text{当 } \alpha \leq 0. \end{cases}$$

从 (4.7) 和 (4.11) 可得

$$\|y(t_{n+1}) - y_{n+1}\| \leq \tilde{d} \left(\max_{0 \leq i \leq n} h_i \right)^p h_n + (1 + ch_n) \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \|y(t_i) - y_i\|, \|\phi - \psi\|_{[-\tau, 0]}, \max_{1 \leq i \leq l} \|y'(t_i) - \mathbb{Y}_i\| \right\},$$

及

$$X_{n+1} \leq \tilde{d} \left(\max_{0 \leq i \leq n} h_i \right)^p h_n + (1 + ch_n) X_n, \quad h_n \leq H_0, \quad (4.12)$$

这里

$$X_n = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \|y(t_i) - y_i\|, \|\phi - \psi\|_{[-\tau, 0]}, \max_{1 \leq i \leq l} \|y'(t_i) - \mathbb{Y}_i\| \right\}.$$

当 $\max_{k \leq i \leq n-1} h_i \leq H_0$ 时, 由 (4.12) 递归立得

$$\begin{aligned} \|y(t_n) - y_n\| &\leq X_n \leq \tilde{d} \left[\left(\max_{0 \leq i \leq n-1} h_i \right)^p h_{n-1} + (1 + ch_{n-1}) \left(\max_{0 \leq i \leq n-2} h_i \right)^p h_{n-2} \right. \\ &\quad \left. + \dots + \prod_{i=k+1}^{n-1} (1 + ch_i) \left(\max_{0 \leq i \leq k} h_i \right)^p h_k \right] + \prod_{i=k}^{n-1} (1 + ch_i) X_k \\ &\leq \tilde{d} \left(\max_{0 \leq i \leq n-1} h_i \right)^p \prod_{i=k}^{n-1} (1 + ch_i) [h_{n-1} + h_{n-2} + \dots + h_k] + \prod_{i=k}^{n-1} (1 + ch_i) X_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \prod_{i=k}^{n-1} \exp(ch_i) \left[\tilde{d}(t_n - t_k) \left(\max_{0 \leq i \leq n-1} h_i \right)^p + X_k \right] \\
&= \exp(c(t_n - t_k)) \left[\tilde{d}(t_n - t_k) \left(\max_{0 \leq i \leq n-1} h_i \right)^p + X_k \right] \\
&= C_0(t_n) \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq k} \|y(t_i) - y_i\|, \|\phi - \psi\|_{[-\tau, 0]}, \max_{1 \leq i \leq l} \|y'(t_i) - \mathbb{Y}_i\| \right\} \\
&\quad + C(t_n) \left(\max_{0 \leq i \leq n-1} h_i \right)^p,
\end{aligned}$$

这里 $C_0(t) = \exp(c(t - t_k))$, $C(t) = \tilde{d}(t - t_k) \exp(c(t - t_k))$. 以上误差函数 $C_0(t)$ 和 $C(t)$ 及最大容许步长 H_0 显然满足定义 4.5 的要求. 定理证毕. $\square$

从定理 3.1, 3.3, 3.4, 4.1, 4.2, 命题 3.1, 3.3, 3.4 和定义 4.5 可直接得到下面更为实用的结果.

定理 4.3 设母方法 (2.1) 代数稳定和对角稳定, 且级阶为 p , 并设正规插值算子 π^h 和 Π^h 都是 p 阶相容的, 则用于求解问题 (1.1) 的 Runge-Kutta 法 (2.2) 是 EB- 稳定且 p 阶 EB- 相容的, 因而是 p 阶最佳 EB- 收敛的. 因而对于由方法 (2.1) 分别从任给两组不同起始数据 $\{\psi(t), y_1, y_2, \dots, y_k, \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_k\}$ 和 $\{\chi(t), z_1, z_2, \dots, z_k, \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \dots, \mathbb{Z}_k\}$ (或者 $\psi(t)$ 和 $\chi(t)$) 出发在同一网格 $\Delta_h \in \{\Delta_h\}$ 上求解满足条件 (1.2) 和 $\gamma_{c\Pi} < 1$ 的同一初值问题 (1.1) 所得到的两个逼近序列 $\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$, 稳定性不等式 (3.21) 和 (3.24) (或 (3.26)) 成立; 对于由方法 (2.2) 从任给起始数据 $\psi \in C_N^1[-\tau, 0]$ 和 $y_1, y_2, \dots, y_k, \mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \dots, \mathbb{Y}_k \in \mathbb{R}^N$ (或者 $\psi \in C_N^1[-\tau, 0]$) 出发在任给网格 $\Delta_h \in \{\Delta_h\}$ 上求解满足条件 (1.2) 和 (4.1) 及 $\gamma_{c\Pi} < 1$ 的任给初值问题 (1.1) 所得到的逼近序列 $\{y_n\}$, 整体误差估计 (4.8) (或 (4.10)) 成立.

需要指出的是, 常微分方程和 Volterra 泛函微分方程 B- 理论中的稳定性不等式及误差估计都不依赖于刚性, 即不依赖于经典 Lipschitz 常数 L . 但是本文所获的稳定性和收敛性结果都间接地依赖于 L , 因此不符合 B- 理论的初衷, 也就不能称之为 B- 理论. 而另一方面, 当中立型泛函微分方程退化为常微分方程或 Volterra 泛函微分方程时, 本文所获结果与已有的常微分方程或 Volterra 泛函微分方程 B- 理论结果是完全一致的, 因而可以认为本文所获结果是常微分方程和 Volterra 泛函微分方程 B- 理论的进一步推广, 故名 EB- 理论.

致谢 衷心感谢评审人的仔细审阅和宝贵意见.

参考文献

- 1 李森林, 温立志. 泛函微分方程. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1985
- 2 Hale J K, Verduyn-Lunel S M. Introduction to Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1993
- 3 Kolmanovskii V B, Myshkis A. Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations. Dordrecht: Kluwer Academy Publishers, 1999
- 4 Wu J H. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1996
- 5 Bellen A, Zennaro M. Numerical Methods for Delay Differential Equations. Oxford: Oxford University Press, 2003
- 6 Kuang J X, Cong Y H. Stability of Numerical Methods for Delay Differential Equations. Beijing: Science Press, 2005
- 7 Bellen A, Guglielmi N, Zennaro M. Numerical stability of nonlinear delay differential equations of neutral type. J Comput Appl Math, 2000, 125: 251–263
- 8 Zhang C J. Nonlinear stability of natural Runge-Kutta methods for neutral delay differential equations. J Comput Math, 2002, 20: 583–590
- 9 余越听, 李寿佛. 非线性中立型延迟积分微分方程 Runge-Kutta 方法的稳定性. 中国科学 A 辑, 2006, 36: 1343–1354
- 10 Wang W S, Zhang Y, Li S F. Nonlinear stability of one-leg methods for delay differential equations of neutral type. Appl Numer Math, 2008, 58: 122–130
- 11 Wang W S, Li S F, Su K. Nonlinear stability of Runge-Kutta methods for neutral delay differential equations. J Comput Appl Math, 2008, 214: 175–185

- 12 Wang W S, Li S F. Stability analysis of θ -methods for nonlinear neutral functional differential equations. *SIAM J Sci Comput*, 2008, 30: 2181–2205
- 13 王晚生, 李寿佛. 非线性中立型延迟积分微分方程单支方法的收敛性. *中国科学 A 辑*, 2009, 39: 344–356
- 14 Wang W S, Li S F. Convergence of Runge-Kutta methods for neutral Volterra delay-integro-differential equations. *Front Math China*, 2009, 4: 195–216
- 15 Bellen A, Maset S, Zennaro M, et al. Recent trends in the numerical solution of retarded functional differential equations. *Acta Numer*, 2009, 18: 1–110
- 16 Wang W S, Zhang C J. Preserving stability implicit Euler method for nonlinear Volterra and neutral functional differential equations in Banach space. *Numer Math*, 2010, 115: 451–474
- 17 Zhang C J, Zhou S Z. Nonlinear stability and D-convergence of Runge-Kutta methods for delay differential equations. *J Comput Appl Math*, 1997, 85: 225–237
- 18 Zhang C J, Zhou S Z, Liao X X. D-convergence and GDN-stability of Runge-Kutta methods for a class of delay systems. *Appl Numer Math*, 2001, 37: 161–170
- 19 Huang C M, Fu H Y, Li S F, et al. Stability analysis of Runge-Kutta methods for non-linear delay differential equations. *BIT*, 1999, 39: 270–280
- 20 Huang C M, Fu H Y, Li S F, et al. D-convergence of Runge-Kutta methods for stiff delay differential equations. *J Comput Math*, 2001, 19: 259–268
- 21 Zhang C J, Vandewalle S. Stability analysis of Runge-Kutta methods for nonlinear Volterra delay-integro-differential equations. *IMA J Numer Anal*, 2004, 24: 193–214
- 22 Zhang C J. Nonlinear stability of Runge-Kutta methods applied to infinite-delay-differential equations. *Math Comput Modelling*, 2004, 39: 495–503
- 23 李寿佛. 刚性 Volterra 泛函微分方程 Runge-Kutta 法的 B-理论. *中国科学 A 辑*, 2003, 33: 124–135
- 24 Li S F. B-theory of general linear methods for stiff Volterra functional differential equations. *Appl Numer Math*, 2005, 53: 57–72
- 25 Frank R, Schneid J, Ueberhuber C W. Stability properties of implicit Runge-Kutta methods. *SIAM J Numer Anal*, 1985, 22: 497–514
- 26 Li S F. Stability and B-convergence of general linear methods. *J Comput Appl Math*, 1989, 28: 281–296
- 27 Li S F. Stability and B-convergence properties of multistep Runge-Kutta methods. *Math Comp*, 2000, 69: 1481–1504
- 28 李寿佛. 刚性常微分方程及刚性泛函微分方程数值分析. 湘潭: 湘潭大学出版社, 2010
- 29 Frank R, Schneid J, Ueberhuber C W. Order results for implicit Runge-Kutta methods applied to stiff systems. *SIAM J Numer Anal*, 1985, 22: 515–534
- 30 Li S F. B-convergence properties of multistep Runge-Kutta methods. *Math Comp*, 1994, 62: 565–575

Stability and convergence of Runge-Kutta methods for nonlinear neutral functional differential equations

WANG WanSheng & SUN Rui

Abstract This paper concerns the stability and convergence of Runge-Kutta methods for nonlinear neutral functional differential equations (NFDEs). Based on the B-theory of Runge-Kutta methods for Volterra functional differential equations (VFDEs), we introduce the concepts of EB-stability and EB-convergence of Runge-Kutta methods for NFDEs and obtain EB-stability and EB-convergence results on variable stepsize Runge-Kutta methods for this class of equations. These results are new even for neutral delay differential equations and neutral delay integro-differential equations.

Keywords nonlinear neutral functional differential equations, Runge-Kutta methods, stability, algebraical stability, convergence

MSC(2010) 65L05, 65L06, 65L20

doi: 10.1360/012012-488