有扭仿射李代数 $A_2^{(2)}$ 的不在范畴 θ 的一类可积模的结构及分类*

对于 2 阶广义 Cartan 矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

与之相对应的 Kac-Moody 代数是具有扭的仿射李代数 $A_2^{(2)}$. 设 $e_0, e_1, f_0, f_1, \alpha_0^\vee, \alpha_1^\vee$ 是其 Chevalley 生成元, 则 $h = C\alpha_0^\vee \oplus C\alpha_1^\vee \oplus Cd$ 是其 Cartan 子代数, 其中 d 是 scaling 元, 而标准中心元为 $c = \alpha_0^\vee + 2\alpha_1^\vee$. 令 $g_0 = Ce_0 \oplus C\alpha_0^\vee \oplus Cf_0$ 为三维单代数.

本文考虑满足下列条件 (1) 的模.

(1) V 是 $A_2^{(2)}$ 的可积模, 即 e_0, e_1, f_0, f_1 在 V 上的作用是局部幂零的. 并且

(i) $V = \bigoplus_{\lambda \in h^*} V_\lambda$ 为权空间分解, $\forall \lambda \in h^*$, $\dim V_\lambda < \infty$;

(ii) $\forall v \in V, v \neq 0, \exists i \in \{0, 1\}$, 使 $e_i v \neq 0$;

(iii) $c \cdot V = 0$, c 为 $A_2^{(2)}$ 的中心;

(iv) 对 $v \in V$, 若 $e_0 v = 0$ (或 $f_0 v = 0$), 则 $e_1 v$ (相应地 $f_1 v$) 在某个 g_0 的不可约子模中.

显然这类模不在 θ 中, 因为权集 $P(V)$ 无“上界”.

对于不在范畴 θ 的可积模, 目前还讨论得较少. 这里我们得到了如下的结果.

定理 满足 (1) 的模是完全可约的. 每个满足 (1) 的不可约模 V 可分解成 g_0 不可约子模的直和 $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V^{(n)}$, $V^{(n)}$ 是 g_0 的不可约子模. 且存在 $a \in \mathbb{C}$, 使 $d|_{V^{(n)}} = (n+a)I_{V^{(n)}}$, $n \in \mathbb{Z}$. 若设 $\dim V^{(0)} = \min \{\dim V^{(i)} | i \in \mathbb{Z}\} = m+1$. 则 $m > 0, m \in 2\mathbb{Z}_+$. 并且或者

(a) $\dim V^{(n)} = m+1$, 对 $\forall n \in \mathbb{Z}$; 或者

(b) $\dim V^{(2n)} = 3, \dim V^{(2n+1)} = 5, \forall n \in \mathbb{Z}$.

最后, 我们找出了所有满足 (1) 的不同构的不可约模.

苏育才

(中国科学院系统科学研究所, 北京)

* 国家自然科学基金资助项目.

局部对称的 Bochner-Kaehler 流形及其子流形

Bochner-Kaehler 流形是指 Bocher 曲率张量消失的 Kaehler 流形. 常全纯截曲率流形是局部对称的 Bochner-Kaehler 流形的特例. 郭孝英、沈一兵最近把 A. Ros 等证明的 Ogiue 猜测推广到局部对称的 Bochner-Kaehler 流形的 Kaehler 子流形 (本刊 1987 年第 2 期). 在本文中我们得到更好的结果. 首先, 我们证明了局部对称的 Bochner-

Kaehler 流形的局部几何结构定理.

定理 1 连通的复 n 维流形 M 为局部对称的 Bochner-Kaehler 流形的充要条件是 M 为下列两种流形之一:

(1) M 具有常数全纯截曲率;

(2) M 局部为黎曼乘积 $M^k(c) \times M^{n-k}(-c)$, 其中 $M^k(c)$ 表示全纯截曲率为常数 c 的复 k 维流形, 类似地表示 $M^{n-k}(-c)$,

且 $0 < k < n$.

应用上述定理我们证得

定理 2 设 M 是局部对称的 Bochner-Kaehler 流形 $\bar{M}$ 的完备 Kaehler 子流形. 若下列条件之一被满足:

$$(1) H > \frac{1}{2} \tilde{H}, (2) K > \frac{1}{8} \tilde{H},$$

$$(3) Q > \frac{n}{2} \tilde{H},$$

其中 $\tilde{H}$ 是 $\bar{M}$ 的全纯截曲率的最大值, H, K, Q 分别为 M 的全纯截曲率、截曲率和 Ricci 曲率, n 表示 M 的复维数, 则 M 是全测地的并有正常数全纯截曲率.

定理 3 设 M 是复 n 维局部对称的 Bochner-Kaehler 流形 $\bar{M}$ 的 n 维紧全实极小子流形. 若 M 的截曲率恒正, 则 $\bar{M}$ 的全纯

截曲率为正常数且 M 是全测地的.

注 1. 当 $\bar{M}$ 为复射影空间时, 定理 2 就是 A. Ros 等证实的 K. Ogiue 猜测, 定理 3 就是 F. Urbano 证明的定理.

注 2. 定理 2 中,

$$\tilde{H} = \frac{4}{n+p+2} \left[\tilde{Q} - \frac{\bar{\rho}}{4(n+p+1)} \right],$$

其中 p 为 M 的复余维数, $\tilde{Q}$ 为 $\bar{M}$ 的 Ricci 曲率最大值, $\bar{\rho}$ 为 $\bar{M}$ 的数量曲率. 显然, $\bar{M}$ 的 Ricci 曲率最小值 $\tilde{Q}_{\min} \leq \frac{\bar{\rho}}{2(n+p)}$, 因此, 我们的条件弱于郭孝英和沈一兵的条件.

欧阳崇珍 黎镇琦
(江西大学数学系, 南昌)

完备 Lie 代数分解的唯一性

文献 [1] 定义了完备 Lie 代数. 文献 [2] 指出一个完备 Lie 代数可分解为单完备 Lie 代数的直和. 但是, 这种分解的唯一性并未讨论, 现来讨论这一问题. 假定所讨论 Lie 代数的维数有限.

定义 如果 Lie 代数 $\mathfrak{V}$ 的自同态 φ 满足

$$\varphi \text{ad} x = \text{ad} x \varphi, \forall x \in \mathfrak{V}$$

则称 φ 是 $\mathfrak{V}$ 的 $\mathfrak{V}$ -自同态.

引理 1 如果 φ 是 Lie 代数 $\mathfrak{V}$ 的 $\mathfrak{V}$ 自同态. 则有 k 使得

(i) $\mathfrak{V}$ 有理想直和分解

$$\mathfrak{V} = \text{Ker} \varphi^k \oplus \text{Im} \varphi^k,$$

(ii) 若 $\mathfrak{V}$ 是不可分解的 (即不能分解成两个非平凡理想的直和), 则或 $\varphi^k = 0$, 或 $\varphi \in \text{Aut} \mathfrak{V}$.

引理 2 设 $\mathfrak{V}$ 是不可分解的非零 Lie 代数. 又 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 是 $\mathfrak{V}$ 的 $\mathfrak{V}$ -自同态, 对

$j = 1, 2, \dots, n$, $\sum_{i=1}^j \varphi_i$ 也是 $\mathfrak{V}$ 的 $\mathfrak{V}$ -自同态,

且 $\sum_{i=1}^n \varphi_i = \text{id}_{\mathfrak{V}}$. 则有 i 使得 $\varphi_i \in \text{Aut} \mathfrak{V}$.

利用这两个引理及文献 [3] 中一些结果, 可得

定理 1 设 Lie 代数 $\mathfrak{V}$ 的中心 $C(\mathfrak{V}) = 0$. 并有理想直和分解

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{S}_1 \oplus \mathfrak{S}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{S}_m,$$

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{R}_n,$$

其中 $\mathfrak{S}_i, 1 \leq i \leq m, \mathfrak{R}_j, 1 \leq j \leq n$ 是不可分解的 Lie 代数. 则 $m = n$, 且适当排列顺序后有 $\mathfrak{S}_i = \mathfrak{R}_i$.

将此定理用于完备 Lie 代数就有

定理 2 设 $\mathfrak{V}$ 为完备 Lie 代数, 并有单完备理想的直和分解

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 \oplus \mathfrak{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{V}_m,$$

则除 $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \dots, \mathfrak{V}_m$ 的次序外, 分解是唯一