有理齐性空间切面的一些几何性质

献给杨乐教授 80 华诞

付保华

中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190

E-mail: bhfu@math.ac.cn

收稿日期: 2019-01-01; 接受日期: 2019-03-11; 网络出版日期: 2019-08-01

国家自然科学基金 (批准号: 11431013) 资助项目

摘要 有理齐性空间是最简单的射影代数簇, 而对它的研究与刻画一直是代数几何的热点问题与灵感来源. 有理齐性空间的切面则提供了大量有趣的代数簇的例子, 而对它的系统研究才刚刚起步. 本文拟从以下几个方面概述最近在此方向上的进展: 自同构群与拟齐性、向量群的等变紧化和形变刚性.

关键词 有理齐性空间 自同构群 形变刚性

MSC (2010) 主题分类 14M17, 14J45

1 引言

本文的所有讨论都在复数域 $\mathbb{C}$ 上进行. 记 $\mathfrak{g}$ 为一个秩 ℓ 的复半单 Lie 代数 (如 $\mathfrak{sl}(\ell+1)$), G 为 $\mathfrak{g}$ 的伴随群 (如 $\mathrm{PGL}(\ell+1)$). 固定 G 的一个 Borel 子群 B 和根系 $\Pi := \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$. 这里沿用 Bourbaki 对 Dynkin 图中根的记号. 称群 G 的闭子群 P 为抛物子群, 如果 G/P 为射影代数簇. 此时称 G/P 为一有理齐性空间. 由于群 G 中的所有抛物子群的共轭类一一对应于 Π 中所有子集的集合, 每个有理齐性空间都同构于某个 G/P_I , 其中 P_I 为由子集 $I \subset \Pi$ 所对应的标准抛物子群.

有理齐性空间为代数几何和表示论提供了一类非常有趣的例子, 同时也对代数几何的发展有重要作用. 最简单的有理齐性空间是 $\mathbb{P}^n = \mathrm{PGL}(\ell+1)/P_{\alpha_1}$, 而对它的不同几何刻画一直是代数几何发展的动力. 例如, 森重文证明了如下的 Hartshorne 猜想: $\mathbb{P}^n$ 是唯一的有丰沛 (ample) 切丛的 n 维光滑射影簇. 这是代数几何中极小模型理论的基石. 进一步地, Campana 和 Peternell 的一个猜想则断言所有切丛具有数值有效 (nef) 性质的光滑射影 Fano 流形一定是 G/P . 迄今为止, 该猜想只在至多 5 维的情形被证明.

有理齐性空间 G/P_I 的 Picard 群同构于 $\mathbb{Z}^r$, 这里 r 是 I 中元素的个数. 在 $\mathrm{Pic}(G/P_I)$ 中存在唯一一个最小的丰沛线丛 $\mathcal{L}_0$, 它给出了 G/P_I 的唯一极小 G -等变嵌入 $G/P_I \rightarrow \mathbb{P}V_P^*$, 其中 V_P

英文引用格式: Fu B H. Some geometrical properties of linear sections of rational homogeneous spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 1303–1312, doi: 10.1360/N012019-00003

$= H^0(G/P_I, \mathcal{L}_0)$ 为 G 的一个不可约表示, 而 G/P_I 为 $\mathbb{P}V_P^*$ 中的闭 G 轨道. 有理齐性空间 G/P_I 的切面是指 G/P_I 与 $\mathbb{P}V_P^*$ 中的某个线性子空间的完全交. 本文的主要目的是, 综述最近我们把有理齐性空间几何的一些研究推广到其切面的工作.

为了行文方便, 我们都假设 G/P 的 Picard 数 r 为 1. 此时, $\mathfrak{g}$ 是一个复单 Lie 代数, 而 P 是一个极大抛物子群 (即 I 只有一个元素). 我们简记 G/P_i 为 $I = \{\alpha_i\}$ 所对应的有理齐性空间. 下面是一些 G/P_i 的通常记号: $\mathbb{Q}^n$ 表示 n 维二次光滑超曲面, 同构于 B_ℓ/P_1 ($n = 2\ell - 1$) 或 D_ℓ/P_1 ($n = 2\ell - 2$); $\text{Gr}(a, b)$ 表示 b 维向量空间中所有 a 维向量子空间所构成的 Grassmannian 簇, 同构于 A_{b-1}/P_a ; $\mathbb{S}_n$ 为 $2n$ 维正交空间中所有迷向 n 维子空间所构成的旋子簇的一个分支, 同构于 D_n/P_{n-1} ; $\text{Gr}_\omega(a, 2b)$ 为 $2b$ 维辛向量空间中所有 a 维迷向向量子空间所构成的辛 Grassmannian 簇, 同构于 C_b/P_a ; 记 $\text{Lag}(n, 2n) = \text{Gr}_\omega(n, 2n)$, 称为 Lagrange-Grassmannian 簇; 记 E_6/P_1 为 $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$, 称为 Cayley 平面, 这是一个 16 维的流形, 其最小嵌入是 $\mathbb{O}\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^{26}$.

2 极小有理切线簇

极小有理切线簇 (varieties of minimal rational tangents, VMRT) 是由 Hwang 和 Mok 所提出并发展起来的, 它给出了一个研究 Picard 数 1 的 Fano 流形的系统办法, 并解决了一系列这类 Fano 流形的难题 (如 Lazarsfeld 问题、 G/P 的形变刚性等). 关于此理论的一个概述可参见文献 [1] 及其后的参考文献.

设 $X \subset \mathbb{P}^N$ 为一个直线覆盖的代数流形, 即过 X 上的每一点都有一条在 $\mathbb{P}^N$ 中的直线落在 X 上. 固定一般点 $x \in X$, 记 X 上所有过 x 点的直线的集合为 $\mathcal{C}_x$. 可以证明 $\mathcal{C}_x$ 为一个光滑代数簇. 由于 $\mathbb{P}^N$ 中的直线由其在 x 点的切线所唯一确定, 我们有一个自然的嵌入: $\mathcal{C}_x \subset \mathbb{P}(T_x X)$. 这就是特殊情形下的极小有理切线簇 (VMRT).

一般情形, 设 X 为一个单直纹射影流形, 即过每一点都有一条有理曲线. 记 $\mathcal{K}$ 为一族 X 上的过一般点的极小有理曲线. 对于一般点 $x \in X$, 记 $\mathcal{C}_x \subset \mathbb{P}(T_x X)$ 为所有 $\mathcal{K}$ 中过 x 点且在 x 点光滑的有理曲线在 x 点切线的集合的闭包, 即

$$\mathcal{C}_x := \overline{\{[T_x C] \mid x \in C, [C] \in \mathcal{K}, C \text{ 在 } x \text{ 点光滑}\}} \subset \mathbb{P}(T_x X).$$

Hwang 和 Mok 的 VMRT 理论的指导思想是单直纹射影流形 X 的整体性质在很多情形都可以通过研究 X 中一般点的 VMRT 的射影几何性质来得到. 在处理 Picard 数 1 的情形, 这个理论是非常得心应手的.

考察 Picard 数 1 的有理齐性空间 G/P 及其极小 G -等变嵌入 $G/P \subset \mathbb{P}V_P^*$. 此时, G/P 由 $\mathbb{P}V_P^*$ 中的直线所覆盖, 并且其 VMRT 在每点都是同构的. 在 P 对应于 G 的长根 α 时, G/P 的 VMRT 也是一个有理齐性空间 G'/P' , 这里伴随群 G' 对应于在 G 的 Dynkin 图中把 α 节点去掉所得到的 Dynkin 图, 而 P' 则对应于 G 的 Dynkin 图中所有与 α 相连的单根的集合. 当 α 是短根时, G/P 的 VMRT 不再是齐性空间. 这也是在研究 G/P 的几何时要对 α 分长根、短根讨论的原因所在. 短根的情形一般会复杂很多.

例 2.1 称 Picard 数 1 的有理齐性空间 G/P 为不可约 Hermite 对称空间, 如果 P 在其切空间的表示是不可约的. 如下是所有的不可约 Hermite 对称空间及其相应的 VMRT:

- (1) $\text{Gr}(a, a+b)$ 的 VMRT 是 $\mathbb{P}^{a-1} \times \mathbb{P}^{b-1}$ 的 Segre 嵌入;
- (2) $\text{Lag}(n, 2n)$ 的 VMRT 是 $\mathbb{P}^n$ 的二重 Veronese 嵌入;

- (3) 旋子簇 S_n 的 VMRT 是 $\text{Gr}(2, n)$ 的 Plücker 嵌入;
- (4) $\mathbb{Q}^n$ 的 VMRT 是 $\mathbb{Q}^{n-2}$ 在 $\mathbb{P}^{n-1}$ 中的自然嵌入;
- (5) Cayley 平面 $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ 的 VMRT 是 10 维旋子簇 $S_5 \subset \mathbb{P}^{15}$;
- (6) E_7/P_7 的 VMRT 是 $\mathbb{O}\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^{26}$.

注 2.2 关于 VMRT 的射影几何性质的研究一直是 VMRT 理论的一个核心问题. 迄今为止已有不少的结果. 例如, 设 X 为一个 Picard 数 1 的 Fano 流形, 则在一般点的 VMRT 的正规化一定是光滑的 (参见文献 [2]), 但其自身不一定是光滑的 (参见文献 [3]). VMRT 也可以是可约的或退化的代数子簇. 一个关于 VMRT 的重要问题是, 如果 VMRT 不是线性子空间的并, 则其 Gauss 映射一定是非退化的吗? 这个问题迄今为止还没有实质性的进展. 若能够正面回答该问题, 则将对 VMRT 理论的发展有很大的推动作用.

下面这个定理则说明了 Picard 数 1 的 G/P 都可以从其 VMRT 重构出来. 在 G/P 为不可约 Hermite 对称空间或 Fano 切触齐性流形时, 这由 Mok^[4] 证明, 而后长根的情形由 Hong 和 Hwang^[5] 证明. C 类短根的情形最近被 Hwang 和 Li^[6] 证明, 而 F_4 短根的情形由 Hwang 等完成.

定理 2.3 设 X 为 Picard 数 1 的 Fano 流形. 如果 X 在一般点的 VMRT 与某个 Picard 数 1 的有理齐性空间 G/P 的 VMRT 射影同构, 则 X 同构于 G/P .

当一般点 $x \in X$ 变化时, 其 $\text{VMRT } \mathcal{C}_x \subset \mathbb{P}(T_x X)$ 也随之在不同的切空间中变化. 记 $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}T X$ 为这些子簇并的闭包, 由此得到一个自然的映射 $\pi: \mathcal{C} \rightarrow X$, 我们称之为 X 上的 VMRT 结构. 如下的 Cartan-Fubini 延拓定理是 VMRT 理论的应用基础, 也是从 VMRT 来重构 Picard 数 1 的 Fano 簇的基本定理.

定理 2.4^[7] 设 X 和 X' 为 Picard 数 1 的 Fano 流形, 且其一般点的 VMRT 的 Gauss 映射是非退化的 (例如, 其 VMRT 是光滑且非线性的). 假定存在两个解析开集 $U \subset X$ 和 $U' \subset X'$ 以及一个解析同构 $\phi: U \simeq U'$ 使得其切映射 $d\phi: TU \rightarrow TU'$ 保持 VMRT 结构, 即 $d\phi(\mathcal{C}|_U) = \mathcal{C}'|_{U'}$, 则存在同构 $\Phi: X \rightarrow X'$ 使得 $\phi = \Phi|_U$.

称 X 上的 VMRT 结构是局部平坦的, 如果对一般点 $x \in X$, 都存在一个包含 x 的解析开集 U , 一个解析开浸入 $\phi: U \rightarrow \mathbb{C}^n$, $n = \dim X$, 以及射影子簇 $S \subset \mathbb{P}^{n-1}$ 使得 $d\phi: \mathbb{P}T(U) \rightarrow \mathbb{P}T(\mathbb{C}^n)$ 把 $\mathcal{C}|_U$ 映射到平凡射影丛 $\mathbb{P}T(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ 中的纤维丛 $\phi(U) \times S$. 作为前述定理的一个简单应用, 我们有下列的推论.

推论 2.5 设 X 和 X' 为 Picard 数 1 的 Fano 流形. 假设 X 和 X' 都具有局部平坦的 VMRT 结构且其 VMRT 在一般点是光滑且射影同构的, 则 $X \simeq X'$.

3 自同构群与拟齐性

对于射影簇 X , 记 $\text{Aut}(X)$ 为 X 的自同构群, 这是一个代数群. 记 $\text{aut}(X)$ 为其 Lie 代数. 则有典范同构 $\text{aut}(X) \simeq H^0(X, T_X)$.

根据 Demazure^[8] 的结果, 除了以下三种情形外, G/P_i 的自同构群的单位分支恰为 G : C_ℓ/P_1 、 B_ℓ/P_ℓ 和 G_2/P_1 . 事实上, 这三种情形例外的原因是它们都有另外一种有理齐性空间的表现形式:

$$C_\ell/P_1 \simeq \mathbb{P}^{2\ell-1} \simeq A_{2\ell}/P_1, \quad B_\ell/P_\ell \simeq \mathbb{S}_{\ell+1} \simeq D_{\ell+1}/P_\ell, \quad G_2/P_1 \simeq B_3/P_1.$$

因此, 在必要时把 G/P 换种表示, 我们总可以假定 G/P 满足 $\text{aut}(G/P) = \mathfrak{g}$.

由文献 [9] 知, G/P 的超平面切面是齐性空间当且仅当 G/P 是 $\mathbb{P}^n$ 、 $\mathbb{Q}^n$ 、 $\text{Gr}(2, 2n)$ 或 E_6/P_1 , 此时相应的超平面切面为 $\mathbb{P}^{n-1}$ 、 $\mathbb{Q}^{n-1}$ 、 $\text{Gr}_\omega(2, 2n)$ 和 F_4/P_4 . 这些超平面切面中的切面都可以看成更高维的有理齐性空间的切面, 而且 $\mathbb{P}^n$ 和 $\mathbb{Q}^n$ 的光滑切面都同构于 $\mathbb{P}^m$ 和 $\mathbb{Q}^m$. 因此, 我们可以不考虑这 4 类有理齐性空间. 称 G/P 满足条件 $\clubsuit$, 如果它不同构于 $\mathbb{P}^{n-1}$ 、 $\mathbb{Q}^{n-1}$ 、 $\text{Gr}_\omega(2, 2n)$ 或 F_4/P_4 .

命题 3.1 (参见文献 [10, 命题 3.2]) 假设 G/P 满足条件 $\clubsuit$ 和 $\text{aut}(G/P) = \mathfrak{g}$. 设 $L \subset \mathbb{P}V_P^*$ 为线性子空间使得 $X := G/P \cap L$ 为光滑 Fano 流形. 记 $\text{aut}(G/P, L)$ 为 $\text{aut}(G/P)$ 中所有保持 L 的元素的集合, 则 $\text{aut}(X) \simeq \text{aut}(G/P, L)$.

在 L 是 $\mathbb{P}V_P^*$ 中超平面时, Lie 代数 $\text{aut}(G/P, L)$ 可以具体计算出来. 此时, L 对应于 $\mathbb{P}V_P$ 中的一个点, 即对应于向量空间 V_P 中的一条过原点的直线 $\mathbf{l}$. 任取 $\mathbf{l}$ 上的非零点 v , 记 $\mathfrak{g}_v$ 为 $\mathfrak{g}$ 在 V_P 上表示的稳定子代数. 该 Lie 代数在 L 为一般超平面时, 在文献 [11] 中有具体计算 (也可参见文献 [10, 表 1]). 下面的结果则把 $\text{aut}(G/P, L)$ 与 $\mathfrak{g}_v$ 联系起来.

推论 3.2 (参见文献 [10, 命题 3.4]) 设 $L \subset \mathbb{P}(V_P^*)$ 为一般超平面. 记 $X = L \cap G/P$, 则

(i)

$$\text{aut}(X) = \begin{cases} \mathfrak{g}_v \oplus \mathbb{C}, & \text{若 } G/P = \text{Gr}(2, 2k+1) \text{ 或 } G/P = \mathbb{S}_5, \\ \mathfrak{g}_v, & \text{其他情形.} \end{cases}$$

(ii) 如果 $G/P \neq \text{Gr}(2, 2k+1)$ 或 $G/P \neq \mathbb{S}_5$, 则 $\text{aut}(X)$ 为半单 Lie 代数.

我们由此可以计算出 G/P 的超平面切面的自同构群的维数. 如果一个代数簇 X 的自同构群在其上的作用有一个开轨道, 则称 X 为拟齐性代数簇. 进一步地, 我们可以得到如下的分类.

定理 3.3 (参见文献 [10, 定理 1.2]) 设 G/P 为一个 Picard 数 1 的有理齐性空间. 设 $X \subset G/P$ 为 G/P 的一般超平面切面, 则 X 为拟齐性代数簇当且仅当 G/P 同构于下列有理齐性空间之一:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}^n, \mathbb{Q}^n, \text{Gr}(2, n), \text{Gr}(3, 6), \text{Gr}(3, 7), \\ &\mathbb{S}_5, \mathbb{S}_6, \mathbb{S}_7, \text{Gr}_\omega(2, 6), \text{Lag}(3, 6), F_4/P_4, E_6/P_1, E_7/P_7. \end{aligned}$$

对于特殊的光滑超平面切面, 需要进一步研究. 对于高余维数的切面, 情形会变得比较复杂. 我们有下面这个非常有趣的例子.

例 3.4 考虑 10 维的旋子簇 $\mathbb{S}_5 \subset \mathbb{P}^{15}$, 我们知道其光滑超平面切面都是同构的, 并且都是拟齐性的. 对于光滑的余 2 维的切面, Kuznetsov^[12] 证明了此时有两个同构类, 分别记为 X_g (一般切面) 和 X_s (特殊切面). X_g 的自同构群的 Lie 代数为 $\text{aut}(X_g) \simeq \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$. 文献 [10] 证明了 X_g 的自同构群在其上的作用有一个开轨道, 从而 X_g 是拟齐性的. 有意思的是, 我们在之前的工作 [13] 中已经证明了 X_s 的自同构群不是半单的, 其包含一个向量群 $\mathbb{C}^8$, 而且此向量群在 X_s 上的作用有一个开轨道同构于 $\mathbb{C}^8$ (此时称 X_s 是一个向量群的等变紧化). 由此得到 $\mathbb{S}_5$ 的光滑余 2 维的切面都是拟齐性的.

更进一步地, 考虑 $\mathbb{S}_5$ 的余 3 维的光滑切面. 此时有 4 个同构类. 对于最一般的切面, 其自同构群的维数为 6, 从而不是拟齐性的. 对于其最特殊的切面, 与 X_s 类似, 其上有一个 $\mathbb{C}^7$ 的作用且使之成为一个向量群的等变紧化, 从而也是拟齐性的. 对于中间两种情形, 我们现在还不清楚.

注 3.5 一般情形的定理 2.3 是不对的: X_s 和 X_g 都是拟齐性的 Picard 数 1 的 Fano 流形, 而且其 VMRT 在一般点都同构于 $\text{Gr}(2, 5)$ 的余 2 维的光滑切面.

下面考虑如下问题: 给定 n 维射影代数流形 X , 其自同构群的维数有没有只依赖于 n 的上界? 这个问题的答案是否定的. 例如, Hirzebruch 曲面 $S_m := \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m))$, 其自同构群的维数为 $m+5$,

所以没有只依赖于维数的上界. 但是, 如果我们限制到 Picard 数 1 的 Fano 流形上, 则它们构成一个有界族, 从而这样的上界是存在的. 如何找到一个有效的上界?

Hwang^[14] 证明了任意 n 维 Picard 数 1 的 Fano 流形 X 上的向量场的零点阶数至多为 n , 由此可以得到有效上界 $\dim \operatorname{aut}(X) \leq n \binom{2n}{n}$ ($n \geq 2$). 显而易见, 该上界不是最优的. 在该文献中, 他还证明了如果假定 X 的 VMRT 是 0 维的, 则 $\dim \operatorname{aut}(X) \leq n$. 这个上界是精确的, 例如, 对于 3 维的 Mukai-Umemura 簇, 该不等式成为等式. 文献 [14] 提出的问题 2 问, 是否对 n 维 Picard 数 1 的 Fano 流形 X , 总是有 $\dim \operatorname{aut}(X) \leq \dim \operatorname{aut}(\mathbb{P}^n)$? 在文献 [15] 中, 该问题被重新提为如下猜想.

猜想 3.6 (参见文献 [15, 猜想 2]) 设 X 为 n 维 Picard 数 1 的 Fano 流形, 则 $\dim \operatorname{aut}(X) \leq n^2 + 2n$, 且等式成立当且仅当 $X \simeq \mathbb{P}^n$.

文献 [15] 在假定 X 的 VMRT 满足光滑、不可约、非退化以及线性正规的条件时证明了该猜想. 其证明思路与文献 [14] 类似: 通过对 X 上向量场的零点阶数估计来给出 $\dim \operatorname{aut}(X)$ 的上界. 关键之处在于把零点阶数与 VMRT 自同构 Lie 代数的延拓联系起来.

定义 3.7 记 V 为向量空间, $\mathfrak{g} \subset \operatorname{End}(V)$ 为 Lie 子代数. $\mathfrak{g}$ 的 k -次延拓 (记为 $\mathfrak{g}^{(k)}$) 是指所有满足如下条件的多重对称线性映射 $A: \operatorname{Sym}^{k+1} V \rightarrow V$ 的集合: 对任意给定 $v_1, \dots, v_k \in V$, 由如下等式定义的映射: $A_{v_1, \dots, v_k}: V \rightarrow V$ 落在 $\mathfrak{g}$ 中:

$$v \in V \mapsto A_{v_1, \dots, v_k, v} := A(v, v_1, \dots, v_k) \in V.$$

换言之,

$$\mathfrak{g}^{(k)} = \operatorname{Hom}(\operatorname{Sym}^{k+1} V, V) \cap \operatorname{Hom}(\operatorname{Sym}^k V, \mathfrak{g}).$$

给定向量空间 V , 对于光滑非退化射影子代数簇 $S \subset \mathbb{P}V$, 记 $\hat{S} \subset V$ 为 S 的仿射锥. 定义 $\operatorname{aut}(\hat{S}) \subset \operatorname{End}(V)$ 为 $\operatorname{End}(V)$ 中保持 $\hat{S}$ 的元素的集合. 注意与之前定义的 $\operatorname{aut}(X)$ 区分开来. 如果 S 是非退化的, 则有一个自然的单射: $\operatorname{aut}(\hat{S}) \rightarrow \operatorname{aut}(\hat{S})$. 文献 [15] 研究了 Lie 子代数 $\operatorname{aut}(\hat{S}) \subset \operatorname{End}(V)$ 的延拓. 特别地, 他们证明了对任意 $k \geq 2$, 除非 $S = \mathbb{P}V$, 总有 $\operatorname{aut}(\hat{S})^{(k)} = 0$. 由此可以得到如下的估计.

推论 3.8 设 X 为 n 维 Picard 数 1 的 Fano 流形. 假定 X 在一般点的 VMRT $\mathcal{C}_x \subsetneq \mathbb{P}(T_x X)$ 是光滑、不可约及非退化的, 则有

$$\dim \operatorname{aut}(X) \leq n + \dim \operatorname{aut}(\hat{\mathcal{C}}_x) + \dim \operatorname{aut}(\hat{\mathcal{C}}_x)^{(1)},$$

等号成立当且仅当 X 的 VMRT 结构是局部平坦的.

在假设 VMRT 为线性正规时, 文献 [15] 证明了 $\dim \operatorname{aut}(\hat{\mathcal{C}}_x)^{(1)} \leq \dim X$, 由此得到了这种情形下的猜想 3.6. 在此方法的基础上, 最近得到了下面更强的结论.

定理 3.9^[16] 设 X 为 n 维 Picard 数 1 的 Fano 流形. 假设 X 在一般点的 VMRT 是光滑、不可约及非退化的, 则有

(1) $\dim \operatorname{aut}(X) \leq n(n+1)/2$ 除非 X 同构于 $\mathbb{P}^n$ 、 $\mathbb{Q}^n$ 或 $\operatorname{Gr}(2, 5)$;

(2) 等式 $\dim \operatorname{aut}(X) = n(n+1)/2$ 成立当且仅当 X 同构于 $\operatorname{Lag}(3, 6)$ 或者 $\operatorname{Gr}(2, 5)$ 的光滑超平面切面.

证明的思路是根据推论 3.8. 首先对于 $\dim \operatorname{aut}(\hat{\mathcal{C}}_x)$ 证明了除非 $\mathcal{C}_x$ 为一个光滑二次超曲面, 总有如下的上界估计:

$$\dim \operatorname{aut}(\hat{\mathcal{C}}_x) \leq \frac{n(n-1)}{2} - 2.$$

由此得到, 如果 $\text{aut}(\hat{\mathcal{C}}_x)^{(1)} = 0$, 则有

$$\dim \text{aut}(X) \leq n + \frac{n(n-1)}{2} - 2 < \frac{n(n+1)}{2},$$

从而证明了此时的猜想 3.6.

当 $\text{aut}(\hat{\mathcal{C}}_x)^{(1)} \neq 0$ 时, 我们有完全分类 (参见文献 [13, 17]). 通过对这些分类的逐个验算, 我们可以得到如下结果.

命题 3.10 (参见文献 [16, 命题 3.8]) 设 $S \subsetneq \mathbb{P}V$ 为一个光滑不可约非退化射影代数簇并且满足 $\text{aut}(\hat{S})^{(1)} \neq 0$. 记 $n = \dim V$, 则

(1) $\dim \text{aut}(\hat{S}) + \dim \text{aut}(\hat{S})^{(1)} \leq \frac{n(n-1)}{2}$ 除非 $S \subset \mathbb{P}V$ 射影同构于 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ 的 Segre 嵌入或 $\mathbb{Q}^{n-2} \subset \mathbb{P}^{n-1}$ ($n \geq 3$) 的自然嵌入;

(2) 前述等号成立当且仅当 $S \subset \mathbb{P}V$ 射影同构于 $\mathbb{P}^2$ 的二重 Veronese 嵌入或 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ 的 Segre 嵌入的一个超平面切面.

为了完成定理 3.9 的证明, 我们只需要把 VMRT 满足命题 3.10 的这些 Fano 流形 X 重构出来. 此时我们只需要应用定理 2.3 和推论 2.5.

4 向量群的等变紧化

记 $\mathbb{G}_a^n$ 为 n 维向量群, 它的等变紧化是指一个 n 维光滑射影代数簇 X , 其上有一个几乎处处可迁的 $\mathbb{G}_a^n$ 的作用. 易见, 此时 X 包含一个同构于 $\mathbb{C}^n$ 的开轨道. 一个基本的等变紧化的例子是射影空间 $\mathbb{P}^n = \mathbb{G}_a^n \cup \mathbb{P}^{n-1}$, 此时 $\mathbb{G}_a^n$ 逐点固定超平面 $\mathbb{P}^{n-1}$. 如果任取光滑子代数簇 $S \subset \mathbb{P}^{n-1}$, 则 $\mathbb{P}^n$ 沿着 S 的胀开 $\text{Bl}_S(\mathbb{P}^n)$ 也是向量群的等变紧化. 由此构造可以得到非常多的向量群等变紧化的例子. 这些例子都是 Picard 数至少为 2 的. 然而, Picard 数 1 的等变紧化则少得多. 下面问题首先在文献 [18] 中被提出并研究.

问题 4.1 分类 Picard 数 1 的向量群的等变紧化.

3 维 Picard 数 1 的向量群的等变紧化由文献 [18] 得到: 只有 $\mathbb{P}^3$ 和 $\mathbb{Q}^3$, 而高维的情形则复杂许多. 文献 [19] 开始系统地研究这些等变紧化. 为此我们引入了 Euler 对称簇的概念, 即射影代数簇 $Z \subset \mathbb{P}^n$ 使得对于 Z 的每个一般点 $z \in Z$, 都存在一个保持 Z 的 $\mathbb{C}^*$ -子群 $E_z \subset \text{PGL}(n+1)$ 且满足下面两个条件: (1) z 是 E_z 在 Z 上作用的一个孤立固定点; (2) E_z 在 $T_z Z$ 上诱导的作用为向量空间中的数乘. 文献 [19] 证明了 Euler 对称簇都是向量群的等变紧化 (不一定光滑). 反之, 如果一个 Picard 数 1 的向量群的 (光滑) 等变紧化的 VMRT 是光滑的, 则它必定为一个 Euler 对称簇. 从而, 我们把问题 4.1 转化为 Euler 对称簇的分类问题.

文献 [19] 证明了 Euler 对称簇由其对应的符号系统 (symbol system) 唯一确定. 然而问题的难点在于如何把几何性质 (如光滑性、Picard 数 1 等) 转化为符号系统的代数性质. 文献 [19] 还证明了 Picard 数 1 的向量群的等变紧化的 VMRT 结构都是局部平坦的. 从而, 由推论 2.5 可知, Picard 数 1 的向量群的等变紧化唯一地由其在一一般点的 VMRT 所决定.

Arzhantsev^[20] 证明了 Picard 数 1 的 G/P 是向量群的等变紧化当且仅当 G/P 是不可约的 Hermite 对称空间 (参见例 2.1). 进一步地, 一个自然的问题是, 哪些 G/P 的切面是向量群的等变紧化?

命题 4.2 (1) 设 X 为 Picard 数 1 的向量群的等变紧化. 如果 $\text{aut}(X)$ 是简约 Lie 代数, 则 X 是不可约 Hermite 对称空间.

(2) 设 G/P 为 Picard 数 1 的有理齐性空间, $X \subset G/P$ 为一个一般超平面切面, 则 X 为向量群的等变紧化当且仅当 $G/P \simeq \mathbb{P}^n$, $G/P \simeq \mathbb{Q}^n$, $G/P \simeq \text{Gr}(2, 5)$ 或 $G/P \simeq \mathbb{S}_5$.

证明 (1) 是文献 [21, 命题 1] 的直接推论. 下证 (2). 由推论 3.2 知, 如果 G/P 不同构于 $\text{Gr}(2, 2k+1)$ 或 $\mathbb{S}_5$, 则 X 的自同构群是简约的, 从而, 由 (1) 知, X 必为不可约 Hermite 对称空间. 由于 X 是齐性空间只有 4 种情形 (参见文献 [9]), 故得 $G/P \simeq \mathbb{P}^n, \mathbb{Q}^n$. 如果 G/P 为 $\mathbb{S}_5$, 则 X 为一个向量群的等变紧化. 下面假设 G/P 同构于 $\text{Gr}(2, 2k+1)$. 如果 X 为向量群的等变紧化, 则 X 的 VMRT 结构是局部平坦的, 从而推论 3.8 中不等式取等式. 据推论 3.2 知, $\text{aut}(X)$ 的维数为 $2k^2 + 3k + 1$. 根据文献 [17, 命题 3.8], 可得

$$\dim X + \dim \text{aut}(\hat{\mathcal{C}}_x) + \dim \text{aut}(\hat{\mathcal{C}}_x)^{(1)} = (4k - 3) + (4k^2 - 8k + 7) + 3 = 4k^2 - 4k + 7.$$

从而, $2k^2 + 3k + 1 = 4k^2 - 4k + 7$ 成立当且仅当 $k = 2$, 故而 X 是 $\text{Gr}(2, 5)$ 的一般超平面切面. $\square$

注 4.3 类似地, 我们可以证明辛 Grassmannian 簇 $\text{Gr}_\omega(k, 2k+m)$ 是向量群的等变紧化当且仅当 $m = 0$ 或 $m = 1$.

文献 [13] 分类了所有特殊 $(2, 1)$ 型双有理变换, 而其像必为向量群的等变紧化. 由此可以得到圆锥曲线连通的向量群的等变紧化的完全分类. 迄今为止, 如下是我们所知道的 Picard 数 1 的向量群的等变紧化的所有例子:

- (1) 不可约 Hermite 对称空间;
- (2) 奇 Lagrange-Grassmannian 簇 $\text{Gr}_\omega(n, 2n+1)$;
- (3) $\text{Gr}(2, 5)$ 的余 1 维或余 2 维的光滑切面;
- (4) $\mathbb{S}_5$ 的余 k ($k = 1, 2, 3$) 维的 $\mathbb{P}^4$ -一般的切面,

这里 $\mathbb{S}_5$ 的 $\mathbb{P}^4$ -一般的切面是指包含 $\mathbb{S}_5$ 中某个 $\mathbb{P}^4$ -子簇的一般线性切面 (参见文献 [13, 命题 2.12]).

问题 4.4 这些就是所有的 Picard 数 1 的向量群的等变紧化吗?

这个问题比较难. 我们可以尝试对 X 加一些限制条件来考虑. 在假设 X 的指数很大时, 我们最近的工作 [22] 正面地回答了该问题.

对于 Fano 流形 X , 定义 X 的指数为 $i(X) = \max\{r \mid \exists H \in \text{Pic}(X) \text{ 使得 } -K_X = rH\}$. 文献 [22] 分类了指数至少是 $n-2$ 的 n 维向量群的等变紧化. 主要思路是, 此时对于这种高指数的 Fano 流形有分类, 而我们的工作是在这些分类中甄别出哪些是向量群的等变紧化. 在 Picard 数 1 的情形, 我们有如下的结果.

定理 4.5 [22] 设 X 为 Picard 数 1 且指数至少是 $n-2$ 的 n 维向量群的等变紧化, 则 X 同构于下列代数簇之一:

- (1) 6 个有理齐性空间: $\mathbb{P}^n$ 、 $\mathbb{Q}^n$ 、 $\text{Gr}(2, 5)$ 、 $\text{Gr}(2, 6)$ 、 $\mathbb{S}_5$ 和 $\text{Lag}(6)$;
- (2) $\text{Gr}(2, 5)$ 的余 1 维或余 2 维的光滑切面;
- (3) $\mathbb{S}_5$ 的余 k 维 $\mathbb{P}^4$ -一般的切面, $k = 1, 2, 3$.

作为推论, 我们得到低维情形问题 4.1 的一个回答.

推论 4.6 设 X 为 Picard 数 1 的向量群的等变紧化. 假设 X 在一般点的 VMRT 是光滑的 (例如, X 是直线覆盖的), 且 $\dim X \leq 5$, 则 X 同构于 $\mathbb{P}^n$ 、 $\mathbb{Q}^n$ 、或 $\text{Gr}(2, 5)$ 的余 1 维或余 2 维的光滑切面.

5 形变刚性

回顾射影流形 X 是局部刚性的, 如果对于 X 的任意光滑形变 $\mathcal{X} \rightarrow B$, 满足 $\mathcal{X}_o \simeq X$, 则存在

$o \in B$ 的一个解析开邻域 Δ 使得对任意 $t \in \Delta$, 有 $\mathcal{X}_t \simeq X$. 根据 Kodaira-Spencer 的形变理论, 如果 $H^1(X, T_X) = 0$, 则 X 是局部刚性的. 反过来, 如果 $H^2(X, T_X) = 0$, 则 X 是局部刚性的当且仅当 $H^1(X, T_X) = 0$. 如果 X 是 Fano 流形, 则 $H^2(X, T_X) = 0$ 自动成立, 从而, Fano 流形的局部刚性等价于 $H^1(X, T_X) = 0$.

Bott 在 1957 年证明了对于任意 $i \geq 1$, 都有 $H^i(G/P, T_{G/P}) = 0$, 从而有理齐性空间都是局部刚性的. 那么 G/P 中的 Fano 切面什么时候是局部刚性的呢? 文献 [10] 对此问题给出了完全解答.

定理 5.1 设 G/P 为 Picard 数 1 的有理齐性空间, $X \subset G/P$ 为一个 Fano 光滑完全交, 则 X 是局部刚性的当且仅当它同构于下列代数簇之一:

- (1) $\mathbb{P}^n$ 或 $\mathbb{Q}^n$;
- (2) 下列有理齐性空间的一般超平面切面:

$$\begin{aligned} &\text{Gr}(2, n), \text{Gr}(3, 6), \text{Gr}(3, 7), \text{Gr}(3, 8), \\ &\mathbb{S}_5, \mathbb{S}_6, \mathbb{S}_7, \text{Gr}_\omega(2, 6), \text{Lag}(3, 6), F_4/P_4, E_6/P_1, E_7/P_7; \end{aligned}$$

- (3) $\text{Gr}(2, 2k+1)$ ($k \geq 2$) 的余 2 维的一般切面;
- (4) $\mathbb{S}_5$ 的余 2 维或余 3 维的一般切面;
- (5) $\text{Gr}(2, 5)$ 的余 3 维或余 4 维的一般切面.

注意到定理 5.1(2) 中的有理齐性空间包含了定理 3.3 中所有的例子, 我们由此得到 G/P 的一般超平面切面 X 是局部刚性的当且仅当 X 是拟齐性的或者 $G/P \simeq \text{Gr}(3, 8)$. 一般情形下, 局部刚性与拟齐性没有相互的包含关系.

这个定理中的这些代数簇从哪儿来的呢? 其实它们与 Vinberg 的抛物预齐性向量空间理论有密切关系. 我们来回顾 Vinberg 的构造. 先取定 Dynkin 图 D 中的某个节点 α 使得去掉该节点之后 D 变成一个 A_{k-1} 型 Dynkin 图 (可以是空集) 以及一个连通的 Dynkin 图 D_0 的并. 显然, D_0 有唯一一个与 α 相连的节点, 记为 α_0 , 则 (D_0, α_0) 唯一确定了一个 Picard 数 1 的有理齐性空间 $G/P \subset \mathbb{P}V_P^*$. Vinberg 的结果说明 $G \times \text{GL}_k$ 在 $V_P \otimes \mathbb{C}^k$ 上的作用只有有限多个轨道. 特别地, G 在 $\text{Gr}(k, V_P)$ 上的作用只有有限多个轨道, 从而, G/P 的余 k 维切面只有有限多个同构类. 由此我们可以想象 G/P 的余 k 维的一般切面应该具有局部刚性, 而事实上也的确如此.

下面是从 E_8 出发、我们可以得到的各种具有形变刚性的 G/P 的切面的例子 (上标表示切面的余维数):

由此构造, 我们可以得到定理 5.1 的所有例子, 除了 $\text{Gr}(2, 2k+1)$ ($k \geq 4$) 的余 2 维的一般切面 (而这个例子来源于非 Dynkin 图 E_{2k+2}).

下面考虑 Kähler 形变的整体刚性. 称射影流形 X 是刚性的, 如果对于 X 的任意光滑 Kähler 形变 $\mathcal{X} \rightarrow B$ 满足对任意 $t \neq o$ 都有 $\mathcal{X}_t \simeq X$, 则 $\mathcal{X}_o \simeq X$. 局部刚性是一个开性质, 而刚性则是一个闭性质. 刚性是非常难以验证的一个性质. 对于 Picard 数 1 的有理齐性空间 G/P , Hwang 和 Mok^[15] 证

明除了 B_3/P_2 (即 $\text{Gr}_o(2, 7)$), 它们都是刚性的. 初始的证明比较复杂 (尤其是在处理短根时), 而根据最近从 G/P 的 VMRT 来重构 G/P 的结果 (定理 2.3), 可以得到相对简单的证明. 下面一个自然的问题是, 哪些 G/P 的光滑切面具有刚性?

回顾 S_5 的光滑余 2 维切面有两个同构类, 分别记为 X_g 和 X_s . 我们知道 X_g 是有局部刚性的, 但不是刚性的, 因为它可以退化到 X_s , 而 X_s 是没有局部刚性的. 下面来说明 X_s 是刚性的. 设 $\mathcal{X} \rightarrow B$ 为 X_s 的光滑 Kähler 形变, 使得对任意 $t \neq o$ 都有 $\mathcal{X}_t \simeq X_s$, 则 $\mathcal{X}_o$ 的指数仍然为 6, 从而, $\mathcal{X}_o$ 是一个 Mukai 簇. 由 Mukai 的分类工作, 我们知道 $\mathcal{X}_o$ 同构于 S_5 的余 2 维切面, 所以, $\mathcal{X}_o$ 同构于 X_g 或 X_s . 如果 $\mathcal{X}_o$ 同构于 X_g , 则 $\mathcal{X}_o$ 具有局部刚性, 这样其附近的形变也是 X_g , 与假设矛盾. 由此得到 X_s 是刚性的. 类似地, 我们可以说明 $\text{Gr}(2, 5)$ 的光滑切面都是刚性的.

参考文献

- 1 莫毅明. 有界全纯函数与 VMRT 几何理论在刚性问题上的应用. 见: 多复变在中国的研究与发展. 北京: 科学出版社, 2009, 492–554
- 2 Hwang J M, Mok N. Birationality of the tangent map for minimal rational curves. *Asian J Math*, 2004, 8: 51–64
- 3 Hwang J M, Kim H. Varieties of minimal rational tangents on double covers of projective space. *Math Z*, 2013, 275: 109–125
- 4 Mok N. Recognizing certain rational homogeneous manifolds of Picard number 1 from their varieties of minimal rational tangents. *AMS/IP Stud Adv Math*, 2008, 42: 41–61
- 5 Hong J, Hwang J M. Characterization of the rational homogeneous space associated to a long simple root by its variety of minimal rational tangents. In: *Algebraic Geometry in East Asia—Hanoi 2005*. Tokyo: Math Soc Japan, 2008, 217–236
- 6 Hwang J M, Li Q F. Characterizing symplectic and odd-symplectic Grassmannians by varieties of minimal rational tangents. *ArXiv:1901.00357*, 2019
- 7 Hwang J M, Mok N. Cartan-Fubini type extension of holomorphic maps for Fano manifolds of Picard number 1. *J Math Pures Appl* (9), 2001, 80: 563–575
- 8 Demazure M. Automorphismes et déformations des variétés de Borel. *Invent Math*, 1977, 39: 179–186
- 9 Ahiezer D. Equivariant completions of homogenous algebraic varieties by homogenous divisors. *Ann Global Anal Geom*, 1983, 1: 49–78
- 10 Bai C Y, Fu B H, Manivel L. On Fano complete intersections in rational homogeneous varieties. *Math Z*, 2019, in press
- 11 Èlašvili A G. Canonical form and stationary subalgebras of points in general position for simple linear Lie groups. *Funct Anal Appl*, 1972, 6: 51–62
- 12 Kuznetsov A. On linear sections of the spinor tenfold, I. *Izv Ross Akad Nauk Ser Mat*, 2018, 82: 53–114
- 13 Fu B H, Hwang J M. Special birational transformations of type $(2, 1)$. *J Algebraic Geom*, 2018, 27: 55–89
- 14 Hwang J M. On the vanishing orders of vector fields on fano varieties of Picard number 1. *Compos Math*, 2001, 125: 255–262
- 15 Hwang J M, Mok N. Prolongations of infinitesimal linear automorphisms of projective varieties and rigidity of rational homogeneous spaces of Picard number 1 under Kähler deformation. *Invent Math*, 2005, 160: 591–645
- 16 Fu B H, Ou W H, Xie J Y. On Fano manifolds of Picard number one with big automorphism groups. *ArXiv:1809.10623*, 2018
- 17 Fu B H, Hwang J M. Classification of non-degenerate projective varieties with non-zero prolongation and application to target rigidity. *Invent Math*, 2012, 189: 457–513
- 18 Hassett B, Tschinkel Y. Geometry of equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$. *Int Math Res Not IMRN*, 1999, 22: 1211–1230
- 19 Fu B H, Hwang J M. Euler-symmetric projective varieties. *ArXiv:1707.06764*, 2017
- 20 Arzhantsev I. Flag varieties as equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$. *Proc Amer Math Soc*, 2011, 139: 783–786
- 21 Arzhantsev I, Popovskiy A. Additive actions on projective hypersurfaces. In: *Automorphisms in Birational and Affine*

Geometry. Cham: Springer, 2014, 17–33

- 22 Fu B H, Montero P. Equivariant compactifications of vector groups with high index. C R Math Acad Sci Paris, 2019, 357: 455–461

Some geometrical properties of linear sections of rational homogeneous spaces

Baohua Fu

Abstract Rational homogeneous spaces are among the simplest algebraic varieties, the study and characterization of which is one of the key problems and sources of inspiration in algebraic geometry. Linear sections of rational homogeneous varieties provide many interesting examples of algebraic varieties, a systematic study of which is just beginning. We report recent progress on this subject from the following perspectives: automorphism groups and quasi-homogeneity, equivariant compactifications of vector groups, deformation rigidity.

Keywords rational homogeneous spaces, automorphisms, deformation rigidity

MSC(2010) 14M17, 14J45

doi: 10.1360/N012019-00003