基于两相浑水模型的三维水沙数值模拟

李肖男, 钟德钰*, 黄海, 张红武, 张磊

清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084

* E-mail: zhongdy@mails.tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2015-01-11; 接受日期: 2015-07-26

国家自然科学基金(批准号: 51379102)资助项目

摘要 本文针对悬移质泥沙输移, 采用两相浑水模型进行描述, 基于 SELFE 水动力学模型, 尝试通过三维数值格式对两相浑水模型进行探索性模拟. 建立了两相浑水模式的离散方程, 完善了相应的边界条件, 采用多组水槽资料率定并验证了模型的可靠性. 并以宁蒙黄河 2012 年洪水为例, 采用离散后的模型对宁蒙黄河青铜峡至石嘴山 200 km 河段进行了数值模拟. 并以该河段洪水的洪峰传播特性、不同河段的环流特性、河段泥沙输移及河床冲淤等为重点关注了改进后的模型. 结果表明: 计算水位、地形、含沙量等数据与实测资料有较好的吻合, 环流特性与理论分析一致. 综合表明改善后的模型能很好的应用于悬移质泥沙的模拟.

关键词悬移质输沙
宁蒙黄河
两相浑水模型
SELFE 模型

1 引言

在传统的河流计算中, 常将水沙两相混合体系视为单一的连续介质流体, 对于水流运动多借助于雷诺方程描述, 对于悬沙输移则采用对流扩散方程描述. 对流扩散理论综合了对流、重力和紊动扩散的作用, 可在一定程度上解释泥沙输移的机理, 尤其是在含沙量较低、泥沙颗粒较细时. 但一些研究指出挟沙水流流场与清水流场存在差异^[1-3]; 此外, 基于对流扩散方程的 Rouse 公式预测的垂向泥沙浓度分布与试验观测值也有明显不同^[4,5]. 差异性的出现是因为对流扩散理论忽略了泥沙对水流的作用, 也不能够描述由于惯性作用引起的颗粒和水流之间的相对运动^[6-8], 这些都限制了对流扩散理论的适用范围.

在此情况下, 近年来学者强调以两相流的角度来研究挟沙水流的运动^[9-12]. 水沙两相流模型顾名思义是把水流运动和悬移质颗粒运动分别进行数学描

述, 对于颗粒相的描述或采用连续介质方法或动理学方法^[13], 但都充分考虑了水流和泥沙颗粒之间、颗粒与颗粒之间的相互作用. 由于描述一个完整的两相流系统至少需要 8 个全耦合偏微分方程, 求解工作繁琐复杂, 对于大尺度天然河流的计算是不现实的. 而且, 随着方程数量的增加, 更多的未封闭项和系数需要确定, 这给两相流模型带来了困难和不确定性^[14]. 因此, 如何将两相流模型应用于天然河流的模拟计算成为研究的重难点.

一方面, 很多研究者尝试在保留双流体特性的基础上简化双流体模型. 例如, 由两相流模型推导而来的 drift-flux 模型^[14], 将水沙混合物视为一体同时考虑了相间作用的影响. 该方法简化了方程且不失准确性, 容易嵌入已经存在的程序中. 在其基础上, Cao 等人^[12]基于雷诺平均推导了两相浑水模型, 并从理论上研究水沙两相流中相对简单的定常、二维均匀流动, 应用表明近底高含沙流层流速明显偏离主流

引用格式: 李肖男, 钟德钰, 黄海, 等. 基于两相浑水模型的三维水沙数值模拟. 中国科学: 技术科学, 2015, 45: 1060-1072

Li X N, Zhong D Y, Huang H, et al. Simulation of suspended load transport based on two-phase mixture model (in Chinese). Sci Sin Tech, 2015, 45: 1060-1072, doi: 10.1360/N092015-00010

区对数分布特征. 但由于其中漂移速度项没有得到解决, 限制了模型的推广. Zhong 等人^[15]利用摄动法推出了漂移速度的解析解, 通过验证表明该解析解可以应用到两相流的泥沙分布预测中.

另一方面, 为使复杂两相流方程能应用于大尺度的河流计算, 选择合适的嵌套平台也很关键. 通过对比, 本文选择了稳定高效的 SELFE 模型^[16]作为两相浑水模型的嵌套平台. SELFE 模型近年来受到广泛关注^[16-18], 且该模型兼具并行计算的优点, 为两相流模型在大尺度水域中的应用提供了可能.

综合上述两点, 本文借助于 SELFE 模型的数值格式, 实现了对两相浑水模型的数值求解. 通过实验资料验证并率定了模型, 并将其应用于大尺度的天然河流.

2 控制方程和边界条件

2.1 基本方程

两相浑水模型(two-phase mixture model)^[15]具有形式简便、计算简单并可以很好地捕捉两相运动特性的优点, 同时考虑大于颗粒粒径的大尺度紊动影响. 其控制方程如下:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial \rho_m U_{mj}}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

$$\rho_m \frac{DU_{mi}}{Dt} = -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{mij}}{\partial x_j} + \frac{\partial T_{Dij}}{\partial x_j} + \rho_m b_i, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{\alpha}_p}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\alpha}_p U_{mi}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{\alpha}_p \frac{\rho_f}{\rho_m} \langle V_{pi} \rangle \right) = 0, \quad (3)$$

其中, ρ_m , U_{mi} 和 T_{mij} 分别为混合物的密度、速度和有效应力, 其具体形式可以参考文献[15]; 角标 k 代表水沙两相, $k=f$ 时表示水流相, $k=p$ 时为泥沙颗粒相; $\bar{\alpha}_k$ 为 k 相的系综平均的体积浓度, 满足 $\bar{\alpha}_f + \bar{\alpha}_p = 1$; t 为时间; ρ_k 为 k 相的密度; i, j 表示笛卡尔张量的方向; $x_i (i=1, 2, 3)$ 代表不同的坐标方向; $\langle u_{ki} \rangle$ 为 k 相 i 方向的质量平均速度; $\langle p \rangle$ 为压强; T_{Dij} 为弥散应力, 反应了由于相间相对运动所造成的影响, $T_{Dij} = -\sum \bar{\alpha}_k \rho_k (\langle u_{ki} \rangle - U_{mi})(\langle u_{kj} \rangle - U_{mj})$; $\langle V_{pi} \rangle$ 为颗粒相的漂移速度, 表征颗粒相与固液混合物的相对运动, $\langle V_{pi} \rangle = \langle u_{pi} \rangle - U_{vi}$; U_{vi} 为体积平均的混合物速度, $U_{vi} = \bar{\alpha}_f \langle u_{fi} \rangle$

$+ \bar{\alpha}_p \langle u_{pi} \rangle$; D_k/Dt 为 k 相的全导数, 满足 $D_k/Dt = \partial/\partial t + u_{kj} \partial/\partial x_j$; 上述字符中上标“-”表示系综平均, “ $\langle \rangle$ ”表示质量加权平均.

2.2 基本方程简化及边界条件

本研究尝试在 SELFE 模型^[16]的平台上对两相浑水模型进行离散, 而 SELFE 的研究对象为不可压缩流的三维浅水方程, 故在进行数值求解之前, 这里对两相浑水模型进行一定简化. 其中对连续方程(1)中密度时间导数项置于等号右侧作为源项处理.

$$\frac{\partial U_{mj}}{\partial x_j} = S1, \quad \text{其中, } S1 = -\frac{1}{\rho_m} \frac{D\rho_m}{Dt}. \quad (4)$$

对上述方程(4)沿水深方向积分可得自由水面方程

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{\eta} U_{mx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{\eta} U_{my} dz = \int_{z_b}^{\eta} S1 dz, \quad (5)$$

式中, η 为自由水面水位, m ; z_b 为河床底高程, m ; 对动量方程中的紊动应力的处理, Ahmadi 和 Ma^[19]将 boussinesq 假定扩展至颗粒相, 建立泥沙的紊动应力的表达式; Ungarish 和 Greenspan^[20]采用同样的处理并忽略了紊动能项的影响; 周新民^[21]把紊动应力与黏性应力合并为有效应力 T_{mij} , 类比单相流模化方法, 建立了其表达式; 本文借用其方法, 并忽略其中的紊动能项得到 T_{mij} 的表达式

$$T_{mij} = \mu_m \left(\frac{\partial U_{mi}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{mj}}{\partial x_i} \right), \quad (6)$$

μ_m 为混合物的有效黏性系数, $\mu_m = \mu_{mv} + \mu_{mk}$ 包含混合物的动力黏滞性系数和紊动涡黏系数. 在本研究中, 水平有效黏性系数取常数, 垂向有效黏性系数采用 $k-\epsilon$ 双方程模型模化.

对于弥散应力项, 根据 $\bar{\alpha}_p \langle V_{pi} \rangle + \bar{\alpha}_f \langle V_{fi} \rangle = 0$, 可将弥散应力进行转化

$$T_{Dij} = -\frac{\bar{\alpha}_p \rho_p \rho_f}{\rho_m \bar{\alpha}_f} \langle V_{pi} \rangle \langle V_{pj} \rangle. \quad (7)$$

此外对于大尺度水域, 满足静压假定, 因此垂向动量方程可以简化为

$$\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial z} = -\rho_m g. \quad (8)$$

将简化后的垂向动量方程沿水深方向积分并带入到水平动量方程中, 同时为降低问题复杂程度, 对水平动量方程中变密度的处理采用 boussinesq 近似,

可将水平动量方程转化为如下形式

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -g\nabla\eta - \frac{1}{\rho_m}\nabla p_A + \frac{1}{\rho_m}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_{mv}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}\right) + \frac{1}{\rho_m}\nabla\cdot(\mu_{mh}\nabla\mathbf{u}) + \mathbf{F}, \quad (9)$$

(9)式中, 向量 $\mathbf{u}=(U_{mx}, U_{my})$ 分别为 x 和 y 方向的混水流速, m/s ; p_A 为自由水面大气压强, N m^{-2} ; μ_{mh} 表示水平有效黏性系数, N s m^{-2} ; μ_{mv} 表示垂向有效黏性系数, N s m^{-2} ; $\mathbf{F}$ 表示弥散应力项, N s^{-2} ; 本文各变量均采用国际单位制。

两相浑水模型的边界条件借鉴了单流体模式。模型中对于开边界采用狄利克雷边界或纽曼边界条件, 对于固壁边界采用有滑动无穿透边界条件。在自由表面, 研究发现在水沙两相间速度差很小^[22], 水沙运动有很好的伴随, 鉴于此可令

$$\mu_{mv}\left(\frac{\partial U_{mx}}{\partial z}, \frac{\partial U_{my}}{\partial z}\right) = 0, \quad (z = \eta). \quad (10)$$

对于河床底, 由河床底的摩擦剪切应力和混水体底层的有效应力平衡的动力学边界条件给出

$$\mu_{mv}\left(\frac{\partial U_{mx}}{\partial z}, \frac{\partial U_{my}}{\partial z}\right) = (\tau_{bx}, \tau_{by}), \quad (z = z_b). \quad (11)$$

2.3 颗粒项质量守恒方程简化

颗粒项的质量守恒方程(3)求解的关键是确定等号左边第三项中的颗粒相的漂移速度 $\langle V_{pi} \rangle$ 。文献[15]利用摄动法求得了 $\langle V_{pi} \rangle$ 的1阶渐进解的无量纲表达式 $\langle V_{pi}^0 \rangle$ 。

$$\begin{aligned} \langle V_{pi}^0 \rangle = & \bar{\alpha}_f \omega^0 b_i^0 - \frac{D_{pi}^0}{\bar{\alpha}_p} \frac{\partial \bar{\alpha}_p}{\partial x_j^0} + \frac{\bar{\alpha}_f}{\bar{\alpha}_p} \left[-\bar{\alpha}_p \frac{D(U_{vi}^0 + \langle V_{Di}^{(0)} \rangle)}{Dt^0} \right. \\ & \left. - \bar{\alpha}_p \frac{\partial \langle p^0 \rangle}{\partial x_i^0} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \bar{\alpha}_p T_{pi}^0}{\partial x_j^0} + \bar{M}_{pi}^0 \right] St_b + O(St_b^2), \end{aligned} \quad (12)$$

其中, St_b 为斯托克斯数^[5]; D_{pi}^0 为扩散系数; $\langle V_{Di}^{(0)} \rangle$ 为扩展系数; 上标0表示无量纲参数; 其他各项含义参见文献[15]。颗粒项速度则为 $\langle u_{pi}^0 \rangle = U_{vi}^0 + \langle V_{pi}^0 \rangle$ 。

从 $\langle V_{pi} \rangle$ 漂移速度表达式可明确地看出不同作用力对它的影响^[15]: 其中重力和紊动扩散力是非摄动扩散影响, 而流体惯性、颗粒间碰撞作用力和其他类似升力等作用力为一阶惯性修正项。为了方便数值

求解, 我们对上式进行一些简化: 考虑到水平耗散的存在, 这里忽略了水平扩散项或将其视为常数处理; 同时升力 $\bar{M}_{pi}$ 在明渠流中会迅速减小, 而且当泥沙颗粒离开床面一段距离后, 升力的值和其他作用在颗粒上的力对比可忽略不计。据此对(3)式等号左边第3项化简

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_p \frac{\rho_f}{\rho_m} \langle V_{pz} \rangle &= \bar{\alpha}_p \frac{\rho_f}{\rho_m} \langle V_{pz} \rangle \\ &= \bar{\alpha}_p \frac{\rho_f}{\rho_m} \left\{ -\bar{\alpha}_f \omega_s - \frac{D_{pz}}{\bar{\alpha}_p} \frac{\partial \bar{\alpha}_p}{\partial z} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\bar{\alpha}_f}{\bar{\alpha}_p} \left[-\bar{\alpha}_p \frac{D(U_{vz} + \langle V_{Dz}^{(0)} \rangle)}{Dt} + \frac{1}{\rho_p} \frac{\partial \bar{\alpha}_p \langle T_{pz} \rangle}{\partial z} \right] \bar{\tau}_p \right\} \\ &= -\bar{\alpha}_f \frac{\rho_f}{\rho_m} \underbrace{\left(1 + \frac{D(U_{vz} + \langle V_{Dz}^{(0)} \rangle)}{Dt} \frac{\bar{\tau}_p}{\omega_s} - \frac{\partial \langle T_{pz} \rangle}{\partial z} \frac{\bar{\tau}_p}{\omega_s \rho_p} \right)}_{\Psi} \omega_s \bar{\alpha}_p \\ &\quad - \underbrace{\frac{\rho_f}{\rho_m} \left(1 - \bar{\alpha}_f \frac{\langle T_{pz} \rangle}{D_{pz}} \frac{\bar{\tau}_p}{\rho_p} \right)}_{\beta} D_{pz} \frac{\partial \bar{\alpha}_p}{\partial z} \\ &= -\Psi \omega_s \bar{\alpha}_p - \beta D_{pz} \frac{\partial \bar{\alpha}_p}{\partial z}, \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $\bar{\tau}_p = \rho_p D^2 (1 - \bar{\alpha}_p)^n / 18 \nu \rho_f f(R_p)$, R_p 为颗粒雷诺数, 这里取 $f(R_p)=1$, $n=1.7$; 垂向扩散系数 $D_{pz} = \gamma_c \kappa_m u_* (1 - z/h) z$, κ_m 为浑水的卡门系数, 根据文献^[23]有 $\kappa_m = 0.4 - 1.68(0.365 - \alpha_p) \sqrt{\alpha_p}$, u_* 是摩阻流速; $\langle T_{pz} \rangle = -D_p [1 + 2\bar{\alpha}_p g_0 (1 + e)] \langle u_{fz}'' u_{fz}'' \rangle$, 具体可参考文献[15]。

$$\gamma_c = \left[1 + \left[C_\beta \beta_c \sqrt{\frac{3 \langle u_{ri} \rangle \langle u_{ri} \rangle}{2 k_f}} \right]^2 \right]^{-0.5}, \quad (14)$$

有 $C_\beta=2$, $\beta_c=1$; u_{ri} 为颗粒项与流体之间的相对速度。

把方程(13)带入方程(3)可转化为以下形式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\alpha}_p}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\alpha}_p U_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\alpha}_p U_{my}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\alpha}_p U_{mz}}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} (\Psi \bar{\alpha}_p \omega_s) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\beta D_{pz} \frac{\partial \bar{\alpha}_p}{\partial z} \right) + k_h \left(\frac{\partial^2 \bar{\alpha}_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\alpha}_p}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

该方程即为两相浑水模型的泥沙输运方程。式中, $\bar{\alpha}_p$ 为泥沙的体积比含沙量; D_{pz} 和 k_h 分别为垂向的、

水平的颗粒相扩散系数; ω_s 表示浑水中泥沙颗粒的沉速, 可根据清水中颗粒沉速结合张红武公式^[23]推求.

$$w_s = w_{s0}(1 - 1.25\alpha_p) \left[1 - \frac{\alpha_p}{2.25\sqrt{D}} \right]^{3.5}, \quad (16)$$

$$w_{s0} = \sqrt{\left(13.95 \frac{\nu}{D} \right)^2 + 1.09 \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma} gD - 13.95 \frac{\nu}{D}}, \quad (17)$$

上式中, w_{s0} 表示泥沙颗粒在静水中的沉速, 这里选用天然河道中应用较广的武水公式^[24]. γ_s, γ, ν, D 分别是泥沙颗粒的容重、清水容重、清水的黏滞系数、泥沙颗粒的中值粒径.

3 方程的数值离散

本文采用的数值格式是由 Zhang 和 Baptista^[16] 在 SELFE 中发展的有限元法、有限差分法和有限体积法相结合的格式, 引入有限元法提高了模型对不规则边界的适应能力. 本研究借助于其原有的离散形式, 添加了弥散应力项和漂移速度项, 以下为两相浑水模型的网格布置和离散形式.

3.1 网格布置

天然河流通常具有边界复杂多样、地形变化剧烈的特点. 传统的正交网格和垂向 Z 坐标分层对于边界和水面贴合能力差. 因此本文模型平面上采用三角形网格为基本单元, 空间上采用对地形具有良好适应性的 S 坐标^[25]离散垂向分层, 据此形成了以三棱柱为基本控制体的计算区域.

对于模型变量的位置定义如下: 水位 η 定义在节点上, 水平流速 (U_{mx}, U_{my}) 定义在三角形单元的边中点上, 垂向流速 U_{mz} 定义在三角形单元中心, 含沙量定义在三棱柱控制体的中心;

3.2 连续方程和动量方程离散

模型控制方程采用有限差分法、有限单元法和有限体积法相结合求解. 其中, 自由水面方程中流速散度项采用 θ 半隐式差分离散; 密度的时间导数项采用显式后差分离散; 动量方程中的水位梯度项采用 θ 半隐式差分离散, 对流项采用欧拉-拉格朗日方法^[26] (ELM) 计算; 垂向扩散性项采用隐式离散, 水平扩散性项和弥散应力项采用全显格式离散. 方程具体离散形式如下:

$$\frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\Delta t} + \theta \nabla \cdot \int_{-h}^{\eta} \mathbf{u}^{n+1} dz + (1 - \theta) \nabla \cdot \int_{-h}^{\eta} \mathbf{u}^n dz = \int_{z_b}^{\eta} \left(-\frac{1}{\rho_m^n} \frac{\rho_m^n - \rho_m^{n-1}}{\Delta t} \right) dz, \quad (18)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -g(1 - \theta) \nabla \eta^n - g\theta \nabla \eta^{n+1} + \frac{1}{\rho_m^n} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{mv}^n \frac{\partial \mathbf{u}^{n+1}}{\partial z} \right) + \mathbf{H}_{dif}^n + \mathbf{F}^n. \quad (19)$$

对于边界条件, 离散形式如下:

$$\begin{cases} \mu_{mv}^n \frac{\partial \mathbf{u}^{n+1}}{\partial z} = 0, & (z = \eta^n), \\ \mu_{mv}^n \frac{\partial \mathbf{u}^{n+1}}{\partial z} = \chi^n \mathbf{u}_b^{n+1}, & (z = z_b), \end{cases} \quad (20)$$

式中, Δt 表示时间步长; $0 \leq \theta \leq 1$ 代表隐式因子; $\mathbf{u}^*$ 为通过 ELM 方法计算对流项后的浑水流速更新值; $\chi^n = \rho_m C_D |\mathbf{u}_b^n|$, C_D 为河床底部阻力系数, $\mathbf{u}_b$ 是河底流速; $\mathbf{H}_{dif}^n$ 为水平扩散项; $\mathbf{F}^n$ 为弥散应力项.

关于水平扩散项的离散

$$\mathbf{H}_{dif}^n = \nabla \cdot (\mu_{mh} \nabla \mathbf{u}) \Big|_A^n = \frac{\oint_A \mu_{mh} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} d\Gamma_A}{\int_A dA}. \quad (21)$$

关于弥散应力项的离散

$$\mathbf{F}^n = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{\bar{\alpha}_p \rho_p \rho_f}{\rho_m \bar{\alpha}_f} \langle V_{pi} \rangle \langle V_{pj} \rangle \right) \Big|_A^n. \quad (22)$$

在完成方程离散后, 采用 Garlerkin 加权余量法对方程引入的权函数, 利用分部积分和边界条件得到方程的弱形式. 弱形式的特点在于: 首先可以使微分方程降阶, 使未知量的连续性要求减弱; 同时相比有限差分法, Garlerkin 加权余量法对于自然边界条件处理比较方便.

首先对连续方程引入 Garlerkin 权函数 ϕ_i , 化简得到方程的弱形式:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \phi_i \frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\Delta t} d\Omega + \theta \left[-\int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \mathbf{U}^{n+1} d\Omega + \int_{\Gamma_v} \phi_i \hat{\mathbf{U}}_n^{n+1} d\Gamma_v + \right. \\ & \left. \int_{\bar{\Gamma}_v} \phi_i \mathbf{U}_n^{n+1} d\bar{\Gamma}_v \right] + (1 - \theta) \left[-\int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \mathbf{U}^n d\Omega + \int_{\Gamma} \phi_i \mathbf{U}_n^n d\Gamma \right] + \\ & \int_{\Omega} \phi_i \frac{H^n}{\Delta t} d\Omega = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N_p), \end{aligned} \quad (23)$$

式中, N_p 为所有节点数; $\Gamma \equiv \Gamma_v + \bar{\Gamma}_v$ 代表求解域 Ω 的边界 $\partial\Omega$, 其中 Γ_v 是自然边界, $\bar{\Gamma}_v$ 是强制边界; $\mathbf{U} = \int_{z_b}^{\eta} \mathbf{u} dz$ 为流速 $\mathbf{u}$ 沿水深积分结果, $\mathbf{U}_n$ 是 $\mathbf{U}$ 的外法线方向分量, $\hat{\mathbf{U}}_n$ 是 $\mathbf{U}$ 中满足自然边界条件的部分; 权函数 ϕ_i 这里采用单元内线性分布的基函数; $H^n = \int_{z_b}^{\eta} \left(1 - \frac{\rho_m^{n-1}}{\rho_m^n}\right) dz$.

对动量方程沿垂向积分, 并把显式部分进行合并可得

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{G}^n - g\theta H^n \Delta t \nabla \eta^{n+1} - \chi^n \Delta t \mathbf{u}_b^{n+1}, \quad (24)$$

$$\mathbf{G}^n = \mathbf{U}_* + \Delta t \left[-g(1-\theta) H^n \nabla \eta^n + \mathbf{S}^n \right], \quad (25)$$

$H^n = h + \eta^n$; $\mathbf{U}_* = \int_{z_b}^{\eta} \mathbf{u}_* dz$; $\mathbf{S}^n$ 为 n 时刻的水平扩散项和弥散应力项垂向积分结果; 其他变量定义同前.

为求解上式中的 $\mathbf{u}_b^{n+1}$, 通过对动量方程在近底处施加垂向边界条件有

$$\mathbf{u}_b^{n+1} = \mathbf{u}_{*b} - g\Delta t(1-\theta)\nabla \eta^n + \Delta t(\mathbf{H}_{dif}^n + \mathbf{F}^n)_b - g\Delta t\theta \nabla \eta^{n+1}. \quad (26)$$

汇总上述方程, 整理可以得到如下形式:

$$\begin{cases} \mathbf{U}^{n+1} = \hat{\mathbf{G}}^n - g\theta \hat{H}^n \Delta t \nabla \eta^{n+1}; \\ \hat{\mathbf{G}}^n = \mathbf{G}^n - \chi^n \Delta t \left[\mathbf{u}_{*b} - g\Delta t(1-\theta)\nabla \eta^n + \Delta t(\mathbf{H}_{dif}^n + \mathbf{F}^n)_b \right]; \\ \hat{H}^n = H^n - \chi^n \Delta t. \end{cases}$$

把方程(26)代入(23)中得

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\phi_i \eta^{n+1} + g\theta^2 \Delta t^2 \hat{H}^n \nabla \phi_i \cdot \nabla \eta^{n+1} \right] d\Omega \\ & - g\theta^2 \Delta t^2 \int_{\bar{\Gamma}_v} \phi_i \hat{H}^n \frac{\partial \eta^{n+1}}{\partial n} d\bar{\Gamma}_v + \theta \Delta t \int_{\Gamma_v} \phi_i \hat{\mathbf{U}}_n^{n+1} d\Gamma_v = I^n. \end{aligned} \quad (27)$$

方程右侧的 I^n 为显式项; 方程左边仅有 η^{n+1} 为未知量; 带入边界条件, 可以求出 $n+1$ 时刻的水位 η^{n+1} . 这里采用预处理的共轭梯度法(PCCG), 通过 SELF 自带的基于 jacobi 预处理共轭梯度法的并行求解器求解, 性能良好且效率高, 而前文对弥散应力项和密度导数项的显式处理并不影响水位求解的系数矩阵, 因而是可行的.

同样利用 Garlerkin 加权余量法建立水平动量方程沿垂向的弱形式

$$\int_{z_b}^{\eta} \psi_l \left[\mathbf{u}^{n+1} - \Delta t \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \mathbf{u}^{n+1}}{\partial z} \right) \right] dz = \int_{z_b}^{\eta} \psi_l, \quad (28)$$

$$\left\{ \mathbf{u}_* + \Delta t \left[-g\theta \nabla \eta^{n+1} - g(1-\theta) \nabla \eta^n + \mathbf{H}_{dif}^n + \mathbf{F}^n \right] \right\} dz,$$

式中, 形函数 ψ_l 这里取线性函数; l 为垂向分层编号; 式中弥散应力项和水平扩散项显式离散; 垂直扩散项全隐式离散. 对上述方程离散后可建立三对角矩阵, 利用追赶法求解. 需要注意的是, 水平流速定义在单元各边中点, 对于 ELM 中所用到单元流速或者节点流速可以通过插值获得.

获取水平流速后, 根据连续方程求解垂向流速. 这里采用守恒性好的有限体积法求垂向流速 U_{mz} . 假设 U_{mz} 在各单元内是常数, 可得

$$\begin{aligned} & \hat{S}_{k+1} \left(\bar{u}_{k+1}^{n+1} n_{k+1}^x + \bar{v}_{k+1}^{n+1} n_{k+1}^y + U_{mz,k+1} n_{k+1}^z \right) - \hat{S}_k \left(\bar{u}_k^{n+1} n_k^x + \bar{v}_k^{n+1} n_k^y \right. \\ & \left. + U_{mz,k} n_k^z \right) + \sum_{m=1}^3 \hat{P} \left(\hat{q}_k^{n+1} + \hat{q}_{k+1}^{n+1} \right) / 2 + \frac{V}{\rho_{m,k}^n} \frac{\rho_{m,k}^n - \rho_{m,k}^{n-1}}{\Delta t} = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

V 是三棱柱的体积; $\hat{S}, \hat{P}$ 分别三棱柱顶面和侧面的面积; (n^x, n^y, n^z) 单位外法线向量; k 表示垂向分层数目; $\bar{u}, \bar{v}$ 分别表示控制体上下层面的浑水流速 (U_{mx}, U_{my}) 的平均值; $\hat{q}$ 表示三角形单元边中心的外法线方向的流速. 结合边界条件, 可依次求解河床底至水面处的垂向流速 U_{mz} . 至此, 浑水模型流速场求解完毕.

3.3 泥沙输运方程离散

在连续方程和动量方程的求解完毕后, 利用更新后的浑水流速可求解泥沙输运方程, 进而对浑水密度进行更新.

由于 ELM 算法本身不具守恒性, 因此这里选用守恒性较好的有限体积法来计算泥沙输运方程. 其中, 水平对流项采用显式迎风格式, 垂直对流项采用隐式离散; 垂直扩散项采用隐式离散, 水平扩散项采用显式离散. 如此从 n 到 $n+1$ 时刻, 泥沙输运方程的离散形式为

$$\begin{aligned} & V_i \frac{\bar{\alpha}_{pi}^{n+1} - \bar{\alpha}_{pi}^n}{\Delta t} + \sum_{j \in \partial V} u_j S_j \bar{\alpha}_{pj}^n = Q_{i,k}^n + A_i \\ & \left[\beta^k D_{pzz}^k \frac{\bar{\alpha}_{p,k+1}^{n+1} - \bar{\alpha}_{p,k}^{n+1}}{\Delta z_{k+1/2}} - \beta^{k-1} D_{pzz}^{k-1} \frac{\bar{\alpha}_{p,k}^{n+1} - \bar{\alpha}_{p,k-1}^{n+1}}{\Delta z_{k-1/2}} \right] \\ & + V_i \sum_{j=1}^3 (k_h) \frac{\bar{\alpha}_{pj}^n - \bar{\alpha}_{pi}^n}{\delta_{ij}} S_j, \end{aligned} \quad (30)$$

式中, u_j 表示控制体各面的外法向流速; S_j 为棱柱体各面的面积; $\bar{\alpha}_{pj^*} = \bar{\alpha}_{pi}$, $j \in S^+$ 和 $\bar{\alpha}_{pj^*} = \bar{\alpha}_{pj}$, $j \in S^-$; $Q_{i,k}^n = A_i (\Psi^k \omega_s^k \alpha_{k+1/2}^n - \Psi^{k-1} \omega_s^{k-1} \alpha_{k-1/2}^n)$; 界面上的浓度 $\alpha_{k+1/2}^n$ 和 $\alpha_{k-1/2}^n$ 可通过迎风插值获得.

为了求解上述泥沙输运方程, 还需要给定水面、床面边界条件. 在水面, 通常应用 0 通量边界条件, 床面边界条件同样采用通量条件

$$\left[w_s \bar{\alpha}_p + \beta D_{pzz} \frac{\partial \bar{\alpha}_p}{\partial z} \right]_{z=\delta} = \frac{\alpha w_s}{\rho_p} (S_b - S_{b^*}), \quad (31)$$

α 为泥沙恢复饱和系数; S_b 为近底泥沙浓度; S_{b^*} 为近底挟沙力; δ 为推移质活动层厚度, 一般 $\delta = (0.01 \sim 0.05)h$; 近底泥沙浓度 S_b 的计算根据 Wu 等人^[27]的方法得:

$$S_b = S_m + \left[1 - \exp \left(-\frac{\omega_s}{D_{pzz}} (z_m - \delta) \right) \right] S_{b^*}, \quad (32)$$

z_m 为最底层网格中心相对河床底的高度; S_m 为最底层网格中心的浓度. 与方程(32)相对应的河床变形方程为:

$$\rho' \frac{\partial Z}{\partial t} = \alpha w_s (S_b - S_{b^*}), \quad (33)$$

其中, ρ' 为河床组成物质的干密度, 采用国际单位. 边界条件方面, 在进口处给定泥沙的级配和体积比含沙量分布; 在出口处, 一般设定为含沙量的梯度为 0.

4 模型验证

4.1 弯道环流的模拟

弯道环流具有典型的三维特征. 本文选取 Chang^[28]的试验资料对模型进行验证. 试验水槽的示意图如图 1, 由 2 个 90° 的弯道组成, 其半径为 8.53 m, 中间通过 4.27 m 长的直线段连接, 此外, 在进出口段分别布设长 2.13 m 的直线过渡段, 整个水槽的断面形态均为矩形断面, 断面宽 2.34 m. 试验的进口平均水深 $H=0.115$ m, 水深平均流速为 0.366 m/s.

选取 PI/8 断面的计算结果与实测资料进行对比, 以该断面凸岸为起点, 提取了起点距与断面宽之比为 0.049, 0.174, 0.348, 0.554, 0.652 和 0.912 等 6 个点的计算结果.

图 2 为上述点的主流流速和二次流的验证结果, 可以看出除在边壁处误差较大外, 模型计算的流速

图 1 Chang 的弯道试验布置示意图(单位: m)

分布与实测结果吻合较好, 表明模型可以模拟弯道环流.

4.2 净冲刷试验验证

Van Rijn^[29]采用水槽试验对清水冲刷松散泥沙床面进行了模拟, 试验示意图如图 3 所示, 试验水槽长 30, 宽 0.5, 高 0.7, 水深 0.25 m, 平均流速为 0.67 m/s. 试验水槽前 10 m 设为刚性底板以保证不可冲刷, 其后部分设为松散泥沙床面, 其中 $D_{50}=0.23$ mm, $D_{90}=0.32$ mm. 同时, 在进口给定流量条件, 在出口给定水位边界条件; 泥沙的边界条件设定为进口含沙量为 0、出口含沙量的水平梯度为 0.

在水流作用下, 床面泥沙不断被携带至水流中, 且含沙量沿程不断增大并逐渐形成稳定的浓度场. 图 4 为距进口不同距离处各断面含沙量沿垂线的分布情况, 图中计算值 1 为改进后两相浑水模型的计算结果, 计算值 2 为 SELFE 原模型基于单流体模式的计算结果. 可以看出改进后的模型的计算值与实测值吻合的非常好, 而原模型的计算结果与实测值偏差较大. 表明改进后的两相浑水模型较之前的单流体模式确有明显改善, 可以用于悬沙输移的模拟.

4.3 净淤积试验验证

Wang 和 Ribberink^[30]开展了纯淤积情况下的水槽试验, 并采用数学模型对实测数据进行了验证. 试验示意图如图 5, 水槽长 30, 宽 0.5 m, 坡降 0.97×10^{-3} , 进口处加沙, 然后经过 10 m 长的无底孔段的调节后进入 16 m 长的有底孔段. 试验水槽水深 0.215 m, 水流平均流速 0.56 m/s, 摩阻流速 0.033 m/s; 进口泥沙颗粒的特征粒径为: $D_{10}=0.075$ mm, $D_{50}=0.095$ mm, $D_{90}=0.105$ mm. 本文按照均匀沙进行处理, 沉速取 0.0065 m/s, 干容重取 2650 kg/m³, 床面粗糙高度取 0.0025 m.

由于多孔床面可以很好地捕捉下沉的泥沙, 使

图2 PI/8断面垂向流速分布的验证结果

(a) 主流; (b) 二次流 “•”为实测结果, “—”为计算结果

图3 净冲刷试验示意图

其无法重新悬浮,含沙量从 $x=0$ 处开始逐渐减小.图6为断面计算浓度与实测浓度的比较,同前一样,计算值1为改进后两相浑水模型的计算结果,计算值2为原模型的计算结果.可以看出除了 $x=4$ 和8断面的上部浓度计算偏大外,改进后模型的计算值与实测值较为一致,同时还能有效模拟在近底处含沙量梯度等于0的现象.而原模型的计算值与实测值的偏差普遍较大,近底处的模拟结果也不太理想.

5 模型应用

在完成模型验证和参数率定后,采用改善后模

型对黄河宁夏段2012年洪水进行了计算.黄河宁夏河段多年平均流量 $900\text{ m}^3/\text{s}$,多年平均水位 1231.08 m .2012年入汛以来,宁夏地区接连暴雨,黄河宁夏段迎来1989年以来持续时间最长、流量最大的洪峰.为验证数学模型的准确性,本文选取部分河段的2012年汛期洪水过程作为典型洪水系列开展了验证计算.计算区域为青铜峡到石嘴山河段,全长196公里,平面采用三角形网格,单元总数279488个;垂线方向采用S坐标,共分11层;洪水历时为2012年7月24日~2012年8月6日共12d,计算时间步长为20秒,计算选取的悬沙特征粒径分别为: 0.025 mm , 0.05 mm , 0.25 mm ;床沙的中值粒径为 0.2 m ;计算条件在进口处给定青铜峡测站的流量过程和含沙量过程,出口条件为石嘴山测站的水位过程(图7).

该河段有青铜峡与石嘴山2个水文测站和叶盛、石坝、高仁、陶乐、五堆子与红崖子等6个水位测站.为了验证模型对于洪峰传播模拟的可靠性,本文分别比较了6个水文站的水位随时间变化过程.

图8为各水位站的实测水位与计算水位的比较

图 4 各断面含沙量沿水深分布的计算值与实测值比较

(a) $x=11.0$ m; (b) $x=12.5$ m; (c) $x=15.0$ m; (d) $x=20.0$ m

图 5 净淤积试验示意图

结果. 可以看到, 各测站的计算水位与实测水位吻合良好, 且对洪峰也有很好的刻画, 可以表明模型能有效模拟洪水过程和洪峰传播.

两相浑水模型的相比传统的单流体模式, 突出之处在于对悬沙输移的模拟. 因此, 能否有效的对天然河流中输沙过程和河床变形进行模拟是检验模型应用的关键. 根据现有实测资料, 首先对石嘴山测站的含沙量随时间变化过程(图 9)进行了比对, 并在计

算河段的上中下游选取了 4 个典型断面来比较河床变形(图 10), 它们的位置分别距离进口分别为 21 km (断面 1)、68 km (断面 2), 100 km (断面 3), 160 km (断面 4); 图 9 和 10 的比对表明改进后的模型能很好的模拟河床的冲淤变形和悬沙的输移.

为了刻画模型的三维特征, 本文还提取了洪水末时刻的 6 个水位测站的含沙量的垂线分布(图 11)和典型的弯道环流结构(图 12). 从图 11 可以发现, 含沙量分布的梯度较小, 这与张瑞瑾^[24]对天然河流中高含沙紊流含沙量分布的分析结果一致, 从定性角度符合含沙水流的含沙量分布特征, 同时随着往下游的推移, 含沙量梯度逐渐减小, 这是因为悬沙输移而逐渐趋于稳定状态, 与河床上段冲刷下段淤积保持一致. 此外, 图 12 提取的典型河弯处环流结构, 模型能反映出垂向流速“凸岸向上、凹岸向下”的三维特征.

图6 不同断面计算浓度与实测浓度的比较

(a) $x=0.0$ m; (b) $x=1.0$ m; (c) $x=2.0$ m; (d) $x=4.5$ m; (e) $x=8.0$ m; (f) $x=16.0$ m

6 结论

本文旨在实现对两相浑水模型的三维数值求解。所研究的两相浑水模型较为全面的考虑了水流对颗粒相的作用, 同时保留了对流扩散方程的形式。模型嵌套选择的 SELFE 模型具有稳定高效的特点, 兼具

并行功能。利用 SELFE 水动力学模块的数值格式, 将浑水流速取代了原有的清水流速, 同时在动量方程中添加了弥散应力项的影响, 在固相质量守恒方程中借助于漂移速度项的摄动解通过有限体积法实现了悬沙输移的求解, 从而实现对两相浑水模型的数值模拟。

图 7 计算边界条件

(a) 进口流量和含沙量过程; (b) 出口水位过程

图 8 各水位站实测水位与计算水位比较

(a) 叶盛站; (b) 石坝站; (c) 高仁站; (d) 陶乐站; (e) 五堆子站; (f) 红崖子站

图9 石嘴山测站含沙量时间过程

图10 典型断面地形冲淤比较

(a) 断面1; (b) 断面2; (c) 断面3; (d) 断面4

图11 洪水末时刻不同测站的含沙量垂线分布

图12 典型河湾段的环流结构

在此基础上, 通过对典型弯道环流实验、净冲刷实验、净淤积实验的验证计算, 表明模型能够实现三维水沙的数值模拟, 并比 SELFE 原有单流体模式有更好的精度. 进而, 将模型应用于宁夏黄河段的模拟, 根据计算水位、典型环流结构、断面含沙量垂线分布和断面冲淤对比验证, 表明改善后的模型对高含沙洪水有较好的模拟, 可以应用于大尺度天然河流的三维水沙模拟中.

参考文献

- 1 Einstein H A, Chien N. Effects of Heavy Sediment Concentration Near the Bed on Velocity and Sediment Distribution. Missouri River: US Army Corps Of Engineers, 1955
- 2 Parker G, Coleman N L. Simple-model of sediment-laden flows. *J Hydraul Eng*, 1986, 112: 356–375
- 3 Cao Z X, Egashira S J, Carling P A. Role of suspended-sediment particle size in modifying velocity profiles in open channel flows. *Water Resour Res*, 2003, 1029: 1–16
- 4 Hunt J N. The turbulent transport of suspended sediment in open channels. *Proc R Soc London Ser A*, 1954, 4: 322–335
- 5 Greimann B P, Muste M, Holly F M. Two-phase formulation of suspended sediment transport. *J Hydraul Res*, 1999, 37: 479–500
- 6 李勇, 余锡平. 基于两相紊流模型的悬移质泥沙运动数值模拟. *清华大学学报*, 2007, 47: 805–808
- 7 傅旭东, 王光谦. 传统泥沙扩散方程的误差分析. *泥沙研究*, 2004, 4: 33–38
- 8 张磊, 钟德钰, 吴保生, 等. 明渠中悬移质的弥散-对流方程及悬浮机理. *力学学报*, 2013, 45: 83–93
- 9 Drew D A. Turbulent sediment transport over a flat bottom using momentum balance. *J Appl Mech*, 1975, 42: 38–44
- 10 Wu W M, Wang S Y. Mathematical models for liquid-solid two-phase flow. *Int J Sediment Res*, 2000, 15: 288–298
- 11 Hsu T J, Jenkins J T, Liu P L F. On two-phase sediment transport: Dilute flow. *J Geophys Res*, 2003, 108: 33057
- 12 Cao Z X, Wei L Y, Xie J H. Sediment-laden flow in open channels from two-phase flow viewpoint. *J Hydraul Eng*, 1995, 121: 725–735
- 13 Wang G Q, Ni J R. The kinetic theory for dilute solid/liquid two-phase flow. *Int J Multiphase Flow*, 1991, 17: 273–281
- 14 Ishii M, Hibiki T. *Thermo-fluid Dynamics of Two-phase Flow*. New York: Springer, 2006
- 15 Zhong D Y, Wang G Q, Wu B S. Drift velocity of suspended sediment in turbulent open channel flows. *J Hydraul Eng*, 2014, 1: 35–47
- 16 Zhang Y, Baptista A M. SELFE: A semi-implicit Eulerian-Lagrangian finite-element model for cross-scale ocean circulation. *Ocean Model*, 2008, 21: 71–96
- 17 倪培桐, 韦惺, 吴超羽, 等. 珠江河口潮能通量与耗散. *海洋工程*, 2011, 29: 67–75
- 18 Zhang Y J, Baptista A M. An efficient and robust tsunami model on unstructured grids. Part I: Inundation benchmarks. *Pure Appl Geophys*, 2008, 165: 2229–2248
- 19 Ahmadi G, Ma D. A thermodynamical formulation for dispersed multiphase turbulent flows-I. Basic theory. *Int J Multiphase Flow*, 1990, 16: 323–340
- 20 Ungarish M, Greenspan H P. On centrifugal separation of particles of two different sizes. *Int J Multiphase Flow*, 1984, 10: 133–148
- 21 周新民. 水沙两相流湍流模式及其应用. 博士学位论文. 成都: 四川大学, 2001
- 22 傅旭东, 王光谦. 明渠挟沙水流的颗粒相平均速度及速度滑移. *泥沙研究*, 2003, 6: 52–59
- 23 张红武. 黄河水流挟沙力的计算公式. *人民黄河*, 1992, 11: 7–9
- 24 张瑞瑾. *河流泥沙动力学*. 第 2 版. 北京: 中国水利水电出版社, 1998
- 25 Song Y, Haidvogel D. A semi-implicit ocean circulation model using a generalized topography-following coordinate system. *J Comput Phys*, 1994, 115: 228–244
- 26 Dimou K. 3-D hybrid Eulerian-Lagrangian / particle tracking model for simulating mass transport in coastal water bodies. Dissertation for the Doctoral Degree. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1992
- 27 Wu W, Rodi W, Wenka T. 3D numerical modeling of flow and sediment transport in open channels. *J Hydraul Eng*, 2000, 126: 4–15
- 28 Chang Y C. Lateral mixing in meandering channels. *River Meandering*. ASCE, 1971. 598–610
- 29 Van Rijn. Sediment transport, part II: Suspended load transport. *J Hydraul Eng*, 1984, 110: 1431–1455
- 30 Wang Z B, Ribberink J S. The validity of a depth-integrated model. *J Hydraul Eng ASCE*, 1990, 116: 1270–1288

Simulation of suspended load transport based on two-phase mixture model

LI XiaoNan, ZHONG DeYu, HUANG Hai, ZHANG HongWu & ZHANG Lei

State Key Laboratory of Hydrosience and Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China

This paper aims at simulation of suspended load transport through three-dimensional numerical model. Based on the hydrodynamic model of SELFE and two-phase mixture flow, the transport equation is completed and discrete equation with relevant boundary conditions is set up. To verify the new model, different calibration tests are carried, moreover whose results satisfy. Finally, the three-dimensional model is used to study the flood of 2012th year between the Qingtongxia & Shizuishan in Ningxia-Inner Mongolia Yellow River. In addition, this study mainly focuses the character of the flood propagation, circulation features, sediment transport as well as river-bed erosion and deposition. The results reveal that the computed water levels, landform and sediment concentration show good agreement with the measured data. The circulation features are also in accordance with the theoretical analysis. All these indicate that the modified model can effectively simulate the suspended load transport.

suspended load transport, Ningxia-Inner Mongolia Yellow River, two-phase mixture flow, SELFE model

doi: 10.1360/N092015-00010