非线性概率下行内负相协随机变量阵列的对数律

兰玉婷¹, 冯新伟^{2*}

1. 上海财经大学统计与管理学院, 上海 200433;

2. 香港中文大学统计系, 香港

E-mail: lan.yuting@mail.shufe.edu.cn, fengxw121@163.com

收稿日期: 2018-04-15; 接受日期: 2018-08-02; 网络出版日期: 2019-01-22; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11601280) 资助项目

摘要 本文在上概率空间中给出随机变量负相协的定义, 该定义弱于现有非线性概率下的某些独立性概念. 在此框架下, 本文通过对随机变量阵列收敛性质的研究, 得到上概率下行内负相协随机变量阵列的对数律, 并同时给出依容度收敛的弱对数律.

关键词 非线性概率 负相协随机变量 对数律 随机变量阵列

MSC (2010) 主题分类 60F15, 60F05

1 引言

经典概率论中的极限定理均建立在概率与期望可加性的基础之上, 然而随着社会发展, 许多不确定现象并不满足线性可加条件, 因此, 经典概率论的应用在一定程度上受到了限制. 以金融衍生品为例, 其风险行为多数不满足线性可加条件, 如何更加合理、准确地管理金融衍生品的风险, 成为金融业界以及学术界需要思考的核心问题之一. 从而, 学者们寻求更加贴切的度量方法, 试图应用非线性的数学理论来准确刻画风险并进行资产定价 (参见文献 [1]).

近期, Peng^[2,3] 提出了一般化的次线性期望空间理论. 次线性期望不依赖于相应的概率, 可以直接通过满足单调性、保常性、次可加性和正齐性的实值泛函来定义. 与非线性期望相呼应的即为非线性概率 (容度) 理论. Choquet^[4] 于 1954 年提出容度的概念, 这也是最早的成体系的非线性概率理论. 根据不同性质的容度可得到不同性质的 Choquet 期望, 许多经典概率论下的重要结论在容度框架下得到了推广与应用 (参见文献 [5–7]).

在不同非线性概率框架下, 学者们得到了不同形式的大数定律和重对数律. 在 Choquet 期望下, Maccheroni 和 Marinacci^[8] 及 Marinacci^[9] 得到了有界连续随机变量的大数定律, 其要求容度 ν 是 Polish 空间下的完全单调容度; Epstein 和 Schneider^[10] 在矩形 (rectangular) 容度下证明了相同形式的大数定律; De Cooman 和 Miranda^[11] 得到了一致有界随机变量的大数定律; Cozman^[12] 进一步推

英文引用格式: Lan Y T, Feng X W. Laws of the logarithm for arrays of rowwise negatively associated random variables under nonlinear probabilities (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 1087–1102, doi: 10.1360/N012018-00104

广了该定理, 其要求随机变量具有有界方差, 并且 $\mathbb{V}$ 满足从上连续性; Terán^[13] 在拓扑容度或者完全单调连续容度下得到了更加广泛的大数定律; Zhang^[14] 在连续的次线性期望下得到了大数定律成立的一个充分必要条件. 对于重对数律, 在次线性期望下, Chen 和 Hu^[15] 及 Zhang^[16,17] 分别在不同条件下得到了随机变量序列的不同形式的重对数律.

Chen 等^[18] 选择以上概率空间作为研究框架, 即设 $\mathcal{P}$ 为定义在可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 的一族概率测度, 定义由 $\mathcal{P}$ 诱导的上 - 下概率 $(\mathbb{V}, v)$:

$$\mathbb{V}(A) = \sup_{P \in \mathcal{P}} P(A), \quad v(A) = \inf_{P \in \mathcal{P}} P(A), \quad \text{对任意 } A \in \mathcal{F},$$

上 - 下期望 $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$:

$$\mathbb{E}[X] = \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P[X], \quad \mathcal{E}[X] = \inf_{P \in \mathcal{P}} E_P[X],$$

在上概率下得到大数定律:

$$v\left(\omega; \mathcal{E}[X_1] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \leq \mathbb{E}[X_1]\right) = 1. \quad (1.1)$$

其表明样本均值不再几乎处处收敛于一个点, 而是落在随机变量上 - 下期望构成的区间之中. 此区间包含于上 - 下 Choquet 期望构成的区间, 因此, Chen 的大数定律在一定意义上更为精确. 从而, 本文选择以上概率空间作为研究框架.

在经典概率论中, 均值为 0 的独立同分布随机变量序列 $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} \sum_{i=1}^n X_i = 0 \quad \text{a.s.} \quad \text{当且仅当} \quad E[|X_1|^p] < \infty \quad (1 \leq p < 2).$$

若 $p = 1$, 则上式即为经典的 Kolmogorov 型大数定律; 若 $1 < p < 2$, 则为 Marcinkiewicz-Zygmund 型大数定律. 对于均值为 0 的独立同分布随机变量阵列 $\{X_{nk}\}_{k=1}^n$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & X_{11} \\ & & & & & & X_{21} \quad X_{22} \\ & & & & & & \dots \quad \dots \\ & & & & & & X_{n1} \quad X_{n2} \quad \dots \quad X_{nn} \\ & & & & & & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \end{array} \quad (1.2)$$

Hu 等^[19] 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=1}^n X_{nk} = 0, \quad \text{a.s.} \quad \text{当且仅当} \quad E[|X_{11}|^{2p}] < \infty \quad (1 \leq p < 2),$$

即对于随机变量阵列来说, 只需将矩条件加强为 $2p$ 阶矩存在, 即可将大数定律由随机变量序列推广到随机变量阵列. 但是, 对于重对数律, Hu 和 Weber^[20] 指出其对随机变量阵列并不成立, 而是得到对数律:

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n \log n}} \sum_{k=1}^n X_{nk} = 1\right) = 1,$$

其中, $\{X_{nk}\}_{k=1}^n$ 为均值为 0、方差为 1 且 4 阶矩存在的独立同分布随机变量阵列.

上概率下的强大数定律 (1.1) 要求 $\sup_{i \geq 1} \mathbb{E}[|X_i|^{1+\alpha}] < \infty$ ($\alpha > 0$). Lan 和 Zhang^[21] 将其推广, 在条件 $\sup_{i \geq 1} \mathbb{E}[|X_i|^{p+\alpha}] < \infty$ 下得到了 Marcinkiewicz-Zygmund 型大数定律. 若将矩条件加强为 $\sup_{i \geq 1} \mathbb{E}[|X_i|^{2+\alpha}] < \infty$, 则 Feng 和 Lan¹⁾ 得到上述非线性概率下的大数定律对于行内独立的随机变量阵列亦成立. 受以上结论启发, 本文进一步研究非线性概率下随机变量阵列的收敛定理, 类似于经典概率下得到的对数律, 本文跨过随机变量序列的重对数律, 直接得到随机变量阵列的如下形式的对数律, 即存在常数 M 使得

$$v\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) \leq M\right) = 1.$$

同时, 本文将经典概率论中随机变量负相协 (negative association)^[22] 的概念推广到非线性概率下, 该概念将弱于现存的非线性概率下的某些独立性概念, 从而, 本文得到的对数律可以直接推广到行内独立随机变量阵列.

本文结构如下: 第 2 节简单介绍上概率空间的概念与相关性质, 给出随机变量负相协的定义, 同时对负相协的相关性质进行初步分析. 第 3 节将给出本文的主要定理, 即行内负相协随机变量阵列的对数律. 第 4 节证明行内负相协随机变量的弱对数律, 由于下概率不满足从下连续性, 因此, 由拟必然收敛无法直接推得依容度收敛.

在本文中, 约定 $\log x = \ln(x \vee e)$, 其中 e 为自然常数.

2 上概率空间简介

设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为可测空间, $\mathcal{P}$ 为定义在该可测空间上的一族概率测度, 定义

$$\mathbb{V}(A) = \sup_{P \in \mathcal{P}} P(A), \quad v(A) = \inf_{P \in \mathcal{P}} P(A), \quad \text{对任意 } A \in \mathcal{F},$$

则称 $(\mathbb{V}, v)$ 分别为上概率与下概率, 称 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbb{V})$ 为上概率空间. 显然, 对任意 $A \in \mathcal{F}$, 均有 $\mathbb{V}(A) \geq v(A)$.

命题 2.1 (参见文献 [18, 引理 2.1]) (1) $\mathbb{V}(\emptyset) = v(\emptyset) = 0$, $\mathbb{V}(\Omega) = v(\Omega) = 1$;

(2) 单调性: 对任意 $A, B \in \mathcal{F}$, 若 $A \subset B$, 则有 $\mathbb{V}(A) \leq \mathbb{V}(B)$, $v(A) \leq v(B)$;

(3) 次可加性: 对任意 $A, B \in \mathcal{F}$, 均有 $\mathbb{V}(A \cup B) \leq \mathbb{V}(A) + \mathbb{V}(B)$;

(4) 共轭性: 对任意 $A \in \mathcal{F}$, 均有 $\mathbb{V}(A) + v(A^c) = 1$;

(5) $\mathbb{V}$ 满足从下连续性: 对于 $A_n, A \in \mathcal{F}$, 若 $A_n \uparrow A$, 则有 $\mathbb{V}(A_n) \uparrow \mathbb{V}(A)$;

(6) v 满足从上连续性: 对于 $A_n, A \in \mathcal{F}$, 若 $A_n \downarrow A$, 则有 $v(A_n) \downarrow v(A)$.

记

$$\mathcal{L} = \{X; X \text{ 为 } \mathcal{F} \text{ - 可测的随机变量, 且满足对任意 } P \in \mathcal{P}, \text{ 均有 } \mathbb{E}_P[|X|] < \infty.\}$$

现定义由 $\mathcal{P}$ 诱导的上 - 下期望 $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$:

$$\mathbb{E}[X] = \sup_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_P[X], \quad \mathcal{E}[X] = \inf_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_P[X], \quad \text{对任意 } X \in \mathcal{L}.$$

1) Feng X, Lan Y. Strong limit theorems for arrays of rowwise independent random variables under sublinear expectations. Submitted

对任意随机变量 $X \in \mathcal{L}$, 有

$$\mathcal{E}[X] = \inf_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_P[X] = - \sup_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_P[-X] = -\mathbb{E}[-X],$$

从而, 该上 - 下期望为一对共轭期望, 且满足下列性质.

命题 2.2 对任意随机变量 $X, Y \in \mathcal{L}$, 有

- (1) 单调性: 若 $X \geq Y$, 则有 $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$;
- (2) 保常性: 对任意 $c \in \mathbb{R}$, 均有 $\mathbb{E}[c] = c$;
- (3) 次可加性: $\mathbb{E}[X + Y] \leq \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$;
- (4) 正齐性: 对任意 $\lambda \geq 0$, 均有 $\mathbb{E}[\lambda X] = \lambda \mathbb{E}[X]$.

从而, 该上期望即为 Peng^[3] 提出的次线性期望, 其具有下列性质.

命题 2.3^[3] 对任意随机变量 $X, Y \in \mathcal{L}$, 有

- (1) $\mathbb{E}[X] \geq \mathcal{E}[X]$;
- (2) 对任意 $a \in \mathbb{R}$, 均有 $\mathbb{E}[aX] = a^+ \mathbb{E}[X] + a^- \mathbb{E}[-X]$;
- (3) $\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] \leq \mathbb{E}[X - Y]$;
- (4) 对任意 $c \in \mathbb{R}$, 均有 $\mathbb{E}[X + c] = \mathbb{E}[X] + c$.

命题 2.4 设 $X, Y \in \mathcal{L}$, 则

- (1) Hölder 不等式 (参见文献 [3, 命题 4.2]): 若 $p, q > 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq (\mathbb{E}[|X|^p])^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}[|Y|^q])^{\frac{1}{q}}.$$

- (2) Chebyshev 不等式 (参见文献 [18, 命题 2.1]): 设 $f(x) > 0$ 为 $\mathbb{R}$ 上单调递增函数, 则对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\mathbb{V}(X \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}[f(X)]}{f(x)}, \quad v(X \geq x) \leq \frac{\mathcal{E}[f(X)]}{f(x)}.$$

注 2.1 由 (1) Hölder 不等式知, 若 $0 < p < q$, 则 $(\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p} \leq (\mathbb{E}[|X|^q])^{1/q}$. 从而, 当 $0 < p < q$ 时, 若 $\mathbb{E}[|X|^q] < \infty$, 则 $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$.

定义 2.1 设 $D \in \mathcal{F}$, 若 $\mathbb{V}(D) = 0$, 则称 D 为一个极集. 若某性质在极集外均成立, 则称该性质拟必然 (quasi-surely, 简记为 q.s.) 成立.

经典概率论中, Borel-Cantelli 引理在极限理论中具有重要意义, Chen 等将其推广到上概率空间, 本文在此列出该引理, 证明过程参见文献 [18].

引理 2.1 (Borel-Cantelli 引理) 设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathcal{F}$ 中的一列事件, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{V}(A_n) < \infty$, 则有 $\mathbb{V}(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i) = 0$.

下面给出负相协随机变量的定义.

定义 2.2 (负相协) 设 X_1 和 X_2 为上概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbb{V})$ 中的随机变量, 若对任意非负有界且具有相同单调性的函数 $f_1(\cdot)$ 和 $f_2(\cdot)$, 均有

$$\mathbb{E}[f_1(X_1)f_2(X_2)] \leq \mathbb{E}[f_1(X_1)]\mathbb{E}[f_2(X_2)],$$

则称 X_1 与 X_2 负相协. 若对于任意非负有界且具有相同单调性的函数列 $\{f_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$, 对任意的 $n \geq 1$, 均有

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n+1} f_i(X_i)\right] \leq \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n f_i(X_i)\right]\mathbb{E}[f_{n+1}(X_{n+1})],$$

则称 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为上概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbb{V})$ 中的负相协随机变量列.

本文将给出下例来说明该定义的合理性.

例 2.1 (1) 若对任意概率测度 $P \in \mathcal{P}$, $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ 均为 P 下的独立随机变量列, 则 $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ 为上概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbb{V})$ 中的负相协随机变量列.

(2) 若对任意概率测度 $P \in \mathcal{P}$, $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ 均为 P 下的负相协 (negatively associated) ^[22] 随机变量列, 则 $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ 为上概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbb{V})$ 中的负相协随机变量列.

证明 在此, 只证明 (2). 由经典概率下随机变量负相协 ^[22] 的定义可知, 对任意 $P \in \mathcal{P}$, 均有

$$\mathbb{E}_P[f(X_i : i \in A)g(X_j : j \in B)] \leq \mathbb{E}_P[f(X_i : i \in A)] \cdot \mathbb{E}_P[g(X_j : j \in B)],$$

其中 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 为关于每一个变量均非增 (或非减) 的函数, A 和 B 为不相交的指标集. 对任意具有相同单调性的非负有界函数 $\{f_i(\cdot)\}_{i=1}^{n+1}$, 定义

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \triangleq \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \quad \text{和} \quad G(x) \triangleq f_{n+1}(x),$$

则 $F(\cdot)$ 和 $G(\cdot)$ 为关于每一个变量均非增 (或非减) 的函数. 从而,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^{n+1} f_i(X_i) \right] &= \sup_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_P[F(X_1, \dots, X_n) \cdot G(X_{n+1})] \leq \sup_{P \in \mathcal{P}} (\mathbb{E}_P[F(X_1, \dots, X_n)] \mathbb{E}_P[G(X_{n+1})]) \\ &\leq \sup_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_P[F(X_1, \dots, X_n)] \cdot \sup_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_P[G(X_{n+1})] = \mathbb{E}[F(X_1, \dots, X_n)] \mathbb{E}[G(X_{n+1})] \\ &= \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n f_i(X_i) \right] \mathbb{E}[f_{n+1}(X_{n+1})], \end{aligned}$$

其第二个不等号由 $F(\cdot)$ 和 $G(\cdot)$ 非负而得. 因此, $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ 为 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbb{V})$ 中负相协随机变量列. $\square$

从而, 本文给出的负相协定义可以涵盖经典概率下的负相协定义. 同时, 对于测试函数 $f_i(\cdot)$ 非负有界的要求可以使得该负相协定义弱于现存的非线性概率下的部分独立性定义, 如文献 [18, 定义 2.4] 以及下述定义.

定义 2.3 随机变量列 $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ 称为可向前分解 (forward factorization) ^[11] 的, 若对于任意有界函数 $f(\cdot)$ 和任意有界非负函数 $g(\cdot)$, 均有

$$\mathcal{E}[g(X_1, X_2, \dots, X_{n-1})(f(X_n) - \mathcal{E}[f(X_n)])] \geq 0, \quad \text{对任意 } n \geq 2.$$

我们将说明负相协可以由可向前分解推出, 即该负相协定义弱于可向前分解定义.

命题 2.5 若随机变量列 $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ 可向前分解, 则其负相协.

证明 设 $\{f_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ 为具有相同单调性的非负有界函数列, 由命题 2.3 和 $\mathbb{E}[f_i(X_i)]$ 非负可得

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(X_i) \right) \cdot f_n(X_n) \right] - \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^{n-1} f_i(X_i) \right] \cdot \mathbb{E}[f_n(X_n)] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(X_i) \right) (f_n(X_n) - \mathbb{E}[f_n(X_n)]) \right] \\ &= -\mathcal{E} \left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(X_i) \right) (-f_n(X_n) - \mathcal{E}[-f_n(X_n)]) \right] \end{aligned}$$

$$= -\mathcal{E} \left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(X_i) \right) (\bar{f}_n(X_n) - \mathcal{E}[\bar{f}_n(X_n)]) \right] \\ \leq 0,$$

其中 $\prod_{i=1}^{n-1} f_i(x_i)$ 和 $\bar{f}_n(x) = -f_n(x)$ 分别满足定义 2.3 中 $g(x_1, \dots, x_{n-1})$ 和 $f(x)$ 的假设条件. 因此, $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为一列负相协随机变量列. $\square$

引理 2.2 若 X_1 和 X_2 负相协, 则对任意常数 a 和 b , 均有

$$\mathbb{V}(X > a, Y > b) \leq \mathbb{V}(X > a) \cdot \mathbb{V}(Y > b), \\ \mathbb{V}(X < a, Y < b) \leq \mathbb{V}(X < a) \cdot \mathbb{V}(Y < b).$$

证明 在此只证第一式. 对任意常数 a 和 b , 令 $f(x) = I_{\{x>a\}}$, $g(x) = I_{\{x>b\}}$, 则 f 和 g 非负有界且单调递增. 从而, 由负相协定义可得

$$\mathbb{V}(X > a, Y > b) = \mathbb{E}[I_{\{X>a\}} \cdot I_{\{Y>b\}}] \leq \mathbb{E}[I_{\{X>a\}}] \cdot \mathbb{E}[I_{\{Y>b\}}] = \mathbb{V}(X > a) \cdot \mathbb{V}(Y > b).$$

证毕. $\square$

引理 2.3 设 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为上概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbb{V})$ 中的负相协随机变量列, $\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ 为一列具有相同单调性的函数, 则 $\{f_i(X_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 亦为一列负相协随机变量.

证明 不妨假设 $\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ 为单调递增函数列, 则对任意非负有界且具有相同单调性的函数列 $\{F_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$, 复合函数 $\{F_i \circ f_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ 均非负有界且具有相同单调性. 由 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ 负相协的定义可得

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^{n+1} F_i(f_i(X_i)) \right] \leq \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n F_i(f_i(X_i)) \right] \cdot \mathbb{E}[F_{n+1}(f_{n+1}(X_{n+1}))],$$

引理得证. $\square$

引理 2.4 设 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为上概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbb{V})$ 中的负相协随机变量列, $\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ 为有界且具有相同单调性的函数列, 则对任意 $n \geq 1$, 均有

$$\mathbb{E} \left[\exp \left\{ \sum_{i=1}^n f_i(X_i) \right\} \right] \leq \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{f_i(X_i)}].$$

证明 不妨设 $\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ 为一列有界单调递增函数. 对任意 $i \geq 1$, 令 $F_i(x) = e^{f_i(\cdot)}$. 由于 $f_i(x)$ 均有界, 所以, $F_i(x) = e^{f_i(\cdot)}$ 均为非负有界单调递增函数, 从而, 将 $F_i(x)$ 代入定义 2.2 即证. $\square$

3 行内负相协随机变量阵列的对数律

本节研究对象为行内负相协随机变量阵列, 即形如 (1.2) 的随机变量阵列, 其每一行行内随机变量 $X_{n1}, \dots, X_{nn}$ 负相协, 不同行的随机变量不作要求.

定理 3.1 设 $\{X_{nk}\}_{k=1}^n$ 为上概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbb{V})$ 中的行内负相协随机变量阵列, 若存在常数 $\alpha \in (0, 1)$ 使得

$$\sup_{n, k \geq 1} \mathbb{E}[|X_{nk}|^{4+\alpha}] < \infty,$$

则存在常数 $M > 0$, 有

$$v\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) \leq M\right) = 1, \quad (3.1)$$

$$v\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) \geq -M\right) = 1. \quad (3.2)$$

证明 由上 - 下概率的共轭性可知, $v(A^c) = 1 - \mathbb{V}(A)$. 从而, 要证 (3.1) 成立, 只需证明

$$\mathbb{V}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) > M\right) = 0. \quad (3.3)$$

若 (3.3) 成立, 由引理 2.3 知, $\{-X_{nk}\}_{k=1}^n$ 亦为行内负相协随机变量阵列, 则

$$\mathbb{V}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (-X_{nk} - \mathbb{E}[-X_{nk}]) > M\right) = 0.$$

由 $\mathbb{E}[-X_{nk}] = -\mathbb{E}[X_{nk}]$ 可知, 上式等价于 (3.2), 从而只需证 (3.3) 成立即可.

现分两步证明 (3.3). 其中, $M > 0$ 为常数, 其具体取值将在证明过程中给出.

第 1 步 假设存在常数 $C > 0$, 使得对任意 $n \geq 1$ 和 $1 \leq k \leq n$, 均有

$$|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| \leq C \sqrt{\frac{n}{\log n}}, \quad (3.4)$$

由于 $\sup_{n,k \geq 1} \mathbb{E}[|X_{nk}|^{4+\alpha}] < \infty$, 不妨设 $\sup_{n,k \geq 1} \mathbb{E}[|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|^2] < K$, 其中 K 为常数.

考虑基本不等式 $e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} e^{|x|}$, 对任意常数 $t > 0$, 取 $x = t \cdot \frac{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]}{\sqrt{Kn \log n}}$, 则有

$$\exp\left\{t \cdot \frac{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]}{\sqrt{Kn \log n}}\right\} \leq 1 + t \cdot \frac{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]}{\sqrt{Kn \log n}} + \frac{t^2}{2} \cdot \frac{(X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}])^2}{Kn \log n} \cdot \exp\left\{t \cdot \frac{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|}{\sqrt{Kn \log n}}\right\}.$$

对上式两端同时取上期望, 并将 (3.4) 代入, 则由命题 2.2 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\exp\left\{t \cdot \frac{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]}{\sqrt{Kn \log n}}\right\}\right] &\leq 1 + \frac{t^2}{2Kn \log n} \cdot \exp\left\{\frac{tC}{\sqrt{K} \log n}\right\} \cdot \mathbb{E}[(X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}])^2] \\ &\leq 1 + \frac{t^2}{2n \log n} \cdot \exp\left\{\frac{tC}{\sqrt{K} \log n}\right\} \\ &\leq \exp\left\{\frac{t^2}{2n \log n} \cdot \exp\left\{\frac{tC}{\sqrt{K} \log n}\right\}\right\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

对于给定 n 和 k , 定义函数

$$f_{nk}(x) = \frac{t}{\sqrt{Kn \log n}} \cdot (x - \mathbb{E}[X_{nk}])$$

和

$$\begin{aligned} \hat{f}_{nk}(x) &= \frac{t}{\sqrt{Kn \log n}} \cdot (x - \mathbb{E}[X_{nk}]) I_{\{|x - \mathbb{E}[X_{nk}]| \leq C \sqrt{\frac{n}{\log n}}\}} \\ &\quad + \frac{Ct}{\sqrt{K} \log n} \cdot I_{\{x - \mathbb{E}[X_{nk}] > C \sqrt{\frac{n}{\log n}}\}} - \frac{Ct}{\sqrt{K} \log n} \cdot I_{\{x - \mathbb{E}[X_{nk}] < -C \sqrt{\frac{n}{\log n}}\}}, \end{aligned}$$

则 $\{\hat{f}_{nk}(x)\}_{k=1}^n$ 均为有界单调递增函数. 由 (3.4) 知,

$$f_{nk}(X_{nk}) = \hat{f}_{nk}(X_{nk}), \quad 1 \leq k \leq n.$$

因此, 由引理 2.4 可知,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \frac{t}{\sqrt{Kn \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} [e^{f_{n1}(X_{n1})} e^{f_{n2}(X_{n2})} \cdots e^{f_{nn}(X_{nn})}] \\ &= \mathbb{E} [e^{\hat{f}_{n1}(X_{n1})} e^{\hat{f}_{n2}(X_{n2})} \cdots e^{\hat{f}_{nn}(X_{nn})}] \\ &\leq \prod_{k=1}^n \mathbb{E} [e^{\hat{f}_{nk}(X_{nk})}] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E} [e^{f_{nk}(X_{nk})}] \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \frac{t}{\sqrt{Kn \log n}} (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) \right\} \right]. \end{aligned}$$

上式结合 (3.5) 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \frac{t}{\sqrt{Kn \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) \right\} \right] &\leq \prod_{k=1}^n \exp \left\{ \frac{t^2}{2n \log n} \cdot \exp \left\{ \frac{tC}{\sqrt{K} \log n} \right\} \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{t^2}{2 \log n} \cdot \exp \left\{ \frac{tC}{\sqrt{K} \log n} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

上式对任意 $t > 0$ 均成立, 取 $t = \log n$, 由命题 2.4(2) 可知, 对任意 $\epsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\frac{1}{\sqrt{Kn \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) > 1 + \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{C}{\sqrt{K}} \right\} + \epsilon \right) \\ &\leq \exp \left\{ -t \left(1 + \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{C}{\sqrt{K}} \right\} + \epsilon \right) \right\} \cdot \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \frac{t}{\sqrt{Kn \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) \right\} \right] \\ &\leq \exp \left\{ -t \left(1 + \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{C}{\sqrt{K}} \right\} + \epsilon \right) + \frac{t^2}{2 \log n} \cdot \exp \left\{ \frac{tC}{\sqrt{K} \log n} \right\} \right\} \\ &= \frac{1}{n^{1+\epsilon}}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

由 $\epsilon > 0$ 可知,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(\frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) > \sqrt{K} \left(1 + \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{C}{\sqrt{K}} \right\} + \epsilon \right) \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}} < \infty.$$

从而, 由引理 2.1 可知,

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{m \log m}} \sum_{k=1}^m (X_{mk} - \mathbb{E}[X_{mk}]) > \sqrt{K} \left(1 + \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{C}{\sqrt{K}} \right\} + \epsilon \right) \right\} \right) = 0.$$

又因为集合

$$\left\{ \omega; \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) > \sqrt{K} + \frac{\sqrt{K}}{2} \exp \left\{ \frac{C}{\sqrt{K}} \right\} + \epsilon \sqrt{K} \right\}$$

$$\subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{m \log m}} \sum_{k=1}^m (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{mk}]) > \sqrt{K} + \frac{\sqrt{K}}{2} \exp \left\{ \frac{C}{\sqrt{K}} \right\} + \epsilon \sqrt{K} \right\},$$

从而由上概率的单调性可知,

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) > \sqrt{K} + \frac{\sqrt{K}}{2} \exp \left\{ \frac{C}{\sqrt{K}} \right\} + \epsilon \sqrt{K} \right) = 0.$$

令 $\epsilon \downarrow 0$, 由上概率的从下连续性, 取 $M = \sqrt{K} + \frac{\sqrt{K}}{2} \exp \left\{ \frac{C}{\sqrt{K}} \right\}$, 则可得 (3.3) 成立.

第 2 步 对于一般情形, 给定常数 $C > 0$, 对于给定 n 和 k , 记

$$b_{nk} = \mathbb{E}[X_{nk}], \quad c_n = C \sqrt{\frac{n}{\log n}},$$

$$d_{nk} = \mathbb{E}[X_{nk}] - \mathbb{E}[(X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}])I_{\{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| \leq c_n\}}] + c_n \cdot I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n\}} - c_n \cdot I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] < -c_n\}},$$

则 $b_{nk}, c_n > 0$ 和 d_{nk} 均为常数. 定义 $\{h_{nk}(x)\}_{k=1}^n$ 为

$$h_{nk}(x) = (x - b_{nk})I_{\{|x - b_{nk}| \leq c_n\}} + c_n I_{\{x - b_{nk} > c_n\}} - c_n I_{\{x - b_{nk} < -c_n\}} + d_{nk},$$

则 $\{h_{nk}(x)\}_{k=1}^n$ 为一列关于自变量 x 的有界单调递增函数. 记

$$\begin{aligned} Y_{nk} &= (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}])I_{\{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| \leq c_n\}} + c_n I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n\}} - c_n I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] < -c_n\}} + \mathbb{E}[X_{nk}] \\ &\quad - \mathbb{E}[(X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}])I_{\{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| \leq c_n\}}] + c_n I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n\}} - c_n I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] < -c_n\}}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

则可知 $Y_{nk} = h_{nk}(X_{nk})$. 由于 $\{h_{nk}(x)\}_{k=1}^n$ 为一列单调递增函数, 由引理 2.3 知, $\{Y_{nk}\}_{k=1}^n$ 为行内负相协随机变量阵列. 下证 $\{Y_{nk}\}_{k=1}^n$ 满足第 1 步的所有条件.

易证 $\mathbb{E}[Y_{nk}] = \mathbb{E}[X_{nk}]$. 另外,

$$\begin{aligned} |Y_{nk} - \mathbb{E}[Y_{nk}]| &= |Y_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| \\ &\leq |(X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}])I_{\{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| \leq c_n\}}| + |c_n I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n\}}| + |c_n I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] < -c_n\}}| \\ &\quad + \mathbb{E}[|(X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}])I_{\{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| \leq c_n\}}|] + \mathbb{E}[|c_n I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n\}}|] \\ &\quad + \mathbb{E}[|c_n I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] < -c_n\}}|] \\ &\leq 6c_n, \end{aligned}$$

即存在 $C' = 6C$ 使得 $|Y_{nk} - \mathbb{E}[Y_{nk}]| \leq C' \sqrt{\frac{n}{\log n}}$ 对于 $k, n \geq 1$ 均成立. 又因为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|Y_{nk} - \mathbb{E}[Y_{nk}]|^{4+\alpha}] &\leq \mathbb{E}[(|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|I_{\{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| \leq c_n\}} + c_n I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n\}} \\ &\quad + \mathbb{E}[|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|I_{\{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| \leq c_n\}} + c_n I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n\}}])^{4+\alpha}] \\ &\leq \mathbb{E}[(|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|I_{\{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| \leq c_n\}} + |X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|I_{\{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| > c_n\}} \\ &\quad + \mathbb{E}[|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|I_{\{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| \leq c_n\}} + |X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|I_{\{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| > c_n\}}])^{4+\alpha}] \\ &= \mathbb{E}[(|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| + \mathbb{E}[|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|])^{4+\alpha}] < \infty. \end{aligned}$$

所以, $\{Y_{nk}\}_{k=1}^n$ 满足证明第 1 步中的所有假设条件, 从而, 存在常数 M' 使得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (Y_{nk} - \mathbb{E}[Y_{nk}]) \leq M', \quad \text{q.s.} \quad (3.8)$$

由 (3.7) 和 $\mathbb{E}[X_{nk}] = \mathbb{E}[Y_{nk}]$ 可得

$$\begin{aligned} & X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] - (Y_{nk} - \mathbb{E}[Y_{nk}]) \\ &= X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] - (Y_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) \\ &= (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}])I_{\{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| > c_n\}} - c_n I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n\}} + c_n I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] < -c_n\}} \\ &\quad + \mathbb{E}[(X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}])I_{\{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| \leq c_n\}}] + c_n I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n\}} - c_n I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] < -c_n\}}. \end{aligned}$$

从而可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (Y_{nk} - \mathbb{E}[Y_{nk}]) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}])I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n\}} + \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}])I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] < -c_n\}} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n c_n I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n\}} + \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n c_n I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] < -c_n\}} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}])I_{\{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| \leq c_n\}}] + c_n I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n\}} - c_n I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] < -c_n\}}] \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (Y_{nk} - \mathbb{E}[Y_{nk}]) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}])I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n\}} + \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}])I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] < -c_n\}} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n c_n I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n\}} + \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n c_n I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] < -c_n\}} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}])I_{\{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| \leq c_n\}}] \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[c_n I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n\}}] + \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[c_n I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] < -c_n\}}]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

由上期望次可加性和单调性可知,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}])I_{\{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| \leq c_n\}}] \\ &\leq \mathbb{E}[X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]] + \mathbb{E}[(\mathbb{E}[X_{nk}] - X_{nk})I_{\{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| > c_n\}}] \\ &\leq \mathbb{E}[|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|I_{\{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| > c_n\}}]. \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} J_1(n) &= \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}])I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n\}}, \\ J_2(n) &= \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}])I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] < -c_n\}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_3(n) &= \frac{C}{\log n} \sum_{k=1}^n I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n\}}, \\
J_4(n) &= \frac{C}{\log n} \sum_{k=1}^n I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] < -c_n\}}, \\
J_5(n) &= \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| I_{\{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| > c_n\}}], \\
J_6(n) &= \frac{C}{\log n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n\}}], \\
J_7(n) &= \frac{C}{\log n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[I_{\{X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] < -c_n\}}].
\end{aligned}$$

将上述 $J_1(n)$ 、 $J_2(n)$ 、 $J_3(n)$ 、 $J_4(n)$ 、 $J_5(n)$ 、 $J_6(n)$ 、 $J_7(n)$ 和 $c_n = C\sqrt{\frac{n}{\log n}}$ 代入 (3.9) 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (Y_{nk} - \mathbb{E}[Y_{nk}]) + J_1(n) + J_2(n) + J_3(n) + J_4(n) + J_5(n) + J_6(n) + J_7(n). \quad (3.10)
\end{aligned}$$

考虑 $J_1(n)$ 和 $J_2(n)$. 对任意 $\epsilon > 0$, 定义集合

$$\begin{aligned}
A_\epsilon(n) &= \left\{ \omega \in \Omega; \text{对任意 } k \in \{1, \dots, n\}, \text{均有 } \frac{X_{nk}(\omega) - \mathbb{E}[X_{nk}]}{\sqrt{n \log n}} \leq \epsilon \right\}, \\
B_\epsilon(n) &= \{\omega \in \Omega; \text{至多存在一个 } k \in \{1, \dots, n\} \text{ 使得 } X_{nk}(\omega) - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n\}.
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
A_\epsilon^c(n) &= \left\{ \omega \in \Omega; \text{存在 } k \in \{1, \dots, n\} \text{ 使得 } \frac{X_{nk}(\omega) - \mathbb{E}[X_{nk}]}{\sqrt{n \log n}} > \epsilon \right\}, \\
B_\epsilon^c(n) &= \{\omega \in \Omega; \text{至少存在两个 } k \in \{1, \dots, n\} \text{ 使得 } X_{nk}(\omega) - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n\}.
\end{aligned}$$

从而, 由 $\{\omega; J_1(n) \leq \epsilon\} \supset A_\epsilon \cap B_\epsilon$ 可推出 $\{\omega; J_1(n) > \epsilon\} \subset A_\epsilon^c \cup B_\epsilon^c$. 因此, 由命题 2.1 可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{V}(J_1(n) > \epsilon) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{V}(A_\epsilon^c(n)) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{V}(B_\epsilon^c(n)) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}\left(\frac{1}{\sqrt{n \log n}}(X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) > \epsilon\right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{1 \leq k \neq j \leq n} \mathbb{V}(X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n, X_{nj} - \mathbb{E}[X_{nj}] > c_n) \\
&\triangleq H_1 + H_2.
\end{aligned}$$

应用命题 2.4(2) 可得

$$H_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}[|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|^{4+\alpha}]}{\epsilon^{4+\alpha}(n \log n)^{\frac{4+\alpha}{2}}} \leq \frac{1}{\epsilon^{4+\alpha}} \sup_{n,k} \mathbb{E}[|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|^{4+\alpha}] \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{(n \log n)^{\frac{4+\alpha}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\epsilon^{4+\alpha}} \sup_{n,k} \mathbb{E}[|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|^{4+\alpha}] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{2}} (\log n)^{\frac{4+\alpha}{2}}}.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{2}} (\log n)^{\frac{4+\alpha}{2}}}$ 收敛, 从而 $H_1 < \infty$. 对于 H_2 , 由引理 2.2 和命题 2.4 可得

$$\begin{aligned} H_2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{1 \leq k \neq j \leq n} \mathbb{V}(X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n) \cdot \mathbb{V}(X_{nj} - \mathbb{E}[X_{nj}] > c_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{1 \leq k \neq j \leq n} \frac{\mathbb{E}[|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|^4]}{C^4 n^2} (\log n)^2 \cdot \frac{\mathbb{E}[|X_{nj} - \mathbb{E}[X_{nj}]|^4]}{C^4 n^2} (\log n)^2 \\ &\leq \frac{1}{C^8} \sup_{n,k} \mathbb{E}^2[|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|^4] \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \frac{(\log n)^4}{n^4}. \end{aligned}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^4}{n^2}$ 收敛, 从而 $H_2 < \infty$. 因此, 我们得到 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{V}(J_1(n) > \epsilon) < \infty$. 由引理 2.1 可知,

$$\mathbb{V}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{J_1(n) > \epsilon\}\right) = 0.$$

从而, $\mathbb{V}(\limsup_{n \rightarrow \infty} J_1(n) > \epsilon) = 0$. 令 $\epsilon \downarrow 0$, 由 $\mathbb{V}$ 的从下连续性可得

$$\mathbb{V}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} J_1(n) > 0\right) = 0, \quad \text{即} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} J_1(n) \leq 0, \quad \text{q.s.}$$

由 $J_1(n)$ 的非负性可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} J_1(n) = 0$, q.s. 同理可证 $\lim_{n \rightarrow \infty} J_2(n) = 0$, q.s.

现在考虑 $J_3(n)$. 对于任意给定 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N_0 , 使得当 $n \geq N_0$ 时, $\frac{C}{\log n} \leq \epsilon$. 从而对任意 $n \geq N_0$, 关于 ω 的集合具有下述包含关系:

$$D_{\epsilon}(n) \triangleq \{\text{至多存在一个 } k \in \{1, \dots, n\} \text{ 使得 } X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n\} \subset \{J_3(n) \leq \epsilon\}.$$

考虑上述集合的补集即得

$$D_{\epsilon}^c(n) = \{\text{至少存在两个 } k \in \{1, \dots, n\} \text{ 使得 } X_{nk}(\omega) - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n\} \supset \{J_3(n) > \epsilon\}.$$

从而, 由上概率的单调性、引理 2.2 和命题 2.4(2) 可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{V}(J_3(n) > \epsilon) &\leq N_0 + \sum_{n=N_0}^{\infty} \mathbb{V}(J_3(n) > \epsilon) \leq N_0 + \sum_{n=N_0}^{\infty} \mathbb{V}(D_{\epsilon}^c(n)) \\ &\leq N_0 + \sum_{n=N_0}^{\infty} \sum_{1 \leq k \neq j \leq n} \mathbb{V}(X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n, X_{nj} - \mathbb{E}[X_{nj}] > c_n) \\ &\leq N_0 + \sum_{n=N_0}^{\infty} \sum_{1 \leq k \neq j \leq n} \mathbb{V}(X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}] > c_n) \cdot \mathbb{V}(X_{nj} - \mathbb{E}[X_{nj}] > c_n) \\ &\leq N_0 + \sum_{n=N_0}^{\infty} \sum_{1 \leq k \neq j \leq n} \mathbb{E}[|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|^4] \cdot \frac{(\log n)^2}{C^4 n^2} \cdot \mathbb{E}[|X_{nj} - \mathbb{E}[X_{nj}]|^4] \cdot \frac{(\log n)^2}{C^4 n^2} \\ &\leq N_0 + \frac{\sup_{n,k} \mathbb{E}^2[|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|^4]}{C^8} \cdot \sum_{n=N_0}^{\infty} n^2 \frac{(\log n)^4}{n^4}. \end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^4}{n^2}$ 收敛, 从而可得 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{V}(J_3(n) > \epsilon) < \infty$, 则由引理 2.1 可知,

$$\mathbb{V}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{J_3(n) > \epsilon\}\right) = 0.$$

由 $J_3(n)$ 非负可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} J_3(n) = 0$, q.s. 同理, 可证 $\lim_{n \rightarrow \infty} J_4(n) = 0$, q.s.

考虑 $J_5(n)$. 由命题 2.2 可得

$$\begin{aligned} J_5(n) &\leq \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|^3 (c_n)^{-2} I_{\{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| > c_n\}}] \\ &= \frac{\sqrt{\log n}}{C^2 n \sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|^3 I_{\{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| > c_n\}}] \\ &\leq \frac{\sqrt{\log n}}{C^2 \sqrt{n}} \sup_{n,k} \mathbb{E}[|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|^3]. \end{aligned}$$

因为 $\sup_{n,k} \mathbb{E}[|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|^3] < \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\log n}}{\sqrt{n}} = 0$ 且 $J(5) \geq 0$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} J_5(n) = 0$.

考虑

$$\begin{aligned} J_6(n) &\leq \frac{C}{\log n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|^{2+\alpha} \cdot (c_n)^{-(2+\alpha)} \cdot I_{\{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| > c_n\}}] \\ &= \frac{(\log n)^{\frac{\alpha}{2}}}{C^{1+\alpha} n^{\frac{2+\alpha}{2}}} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|^{2+\alpha} \cdot I_{\{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| > c_n\}}] \\ &\leq \frac{(\log n)^{\frac{\alpha}{2}}}{C^{1+\alpha} n^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \sup_{n,k} \mathbb{E}[|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|^{2+\alpha}], \end{aligned}$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{\log n}{n})^{\frac{\alpha}{2}} = 0$, $\sup_{n,k} \mathbb{E}[|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]|^{2+\alpha}] < \infty$ 和 $J_6(n) \geq 0$ 可知, $\lim_{n \rightarrow \infty} J_6(n) = 0$. 同理可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} J_7(n) = 0$.

将 $J_1(n)$ 、 $J_2(n)$ 、 $J_3(n)$ 、 $J_4(n)$ 、 $J_5(n)$ 、 $J_6(n)$ 和 $J_7(n)$ 收敛性质代入 (3.10) 即得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (Y_{nk} - \mathbb{E}[Y_{nk}]), \quad \text{q.s.}$$

因此, 由 (3.8) 知,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) \leq M', \quad \text{q.s.}$$

从而 (3.1) 得证. □

4 行内负相协随机变量阵列的弱对数律

定理 4.1 设 $\{X_{nk}\}_{k=1}^n$ 为上概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbb{V})$ 中的行内负相协随机变量阵列, 若存在常数 $\alpha \in (0, 1)$ 使得 $\sup_{n,k \geq 1} \mathbb{E}[|X_{nk}|^{4+\alpha}] < \infty$, 则存在常数 $M > 0$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) \leq M\right) = 1, \quad (4.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) \geq -M\right) = 1. \quad (4.2)$$

与经典概率论中几乎处处收敛强于依概率收敛不同, 由于下概率 v 不具备从下连续性, 从而上述定理无法直接由定理 3.1 推出.

证明 若 (4.1) 成立, 考虑随机变量阵列 $\{-X_{nk}\}_{k=1}^n$, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v \left(\frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (-X_{nk} - \mathbb{E}[-X_{nk}]) \leq M \right) = 1.$$

由 $\mathbb{E}[-X_{nk}] = -\mathbb{E}[X_{nk}]$ 可知, 上式等价于 (4.2). 从而, 只需证明 (4.1) 成立即可.

本文将分两步证明 (4.1) 成立.

第 1 步 假设定理 3.1 证明第 1 步中的所有假设条件均成立, 对任意 $\epsilon > 0$, 记常数 $M(\epsilon) = \sqrt{K} + \frac{\sqrt{K}}{2} \exp\{\frac{C}{\sqrt{K}}\} + \epsilon\sqrt{K}$, 则由 (3.6) 可得

$$\mathbb{V} \left(\frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) > M(\epsilon) \right) \leq \frac{1}{n^{1+\epsilon}},$$

从而, 由上概率的非负性可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V} \left(\frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) > M(\epsilon) \right) = 0.$$

由 $\mathbb{V}$ 与 v 的共轭性可得 (4.1) 成立.

第 2 步 对于一般情形, 依照 (3.7) Y_{nk} , 易证 $\{Y_{nk}\}_{k=1}^n$ 满足第 1 步中的所有假设条件, 从而, 对任意 $\epsilon > 0$, 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V} \left(\frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (Y_{nk} - \mathbb{E}[Y_{nk}]) > M'(\epsilon) \right) = 0. \quad (4.3)$$

由于 (3.10) 成立, 从而, 对任意 $\epsilon > 0$, 均有

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) > M'(\epsilon) \right\} \\ & \subset \left\{ \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (Y_{nk} - \mathbb{E}[Y_{nk}]) + J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 + J_7 > M'(\epsilon) \right\}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中 $J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6$ 和 J_7 定义与定理 3.1 证明第 2 步中相同. 另外, 由于

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (Y_{nk} - \mathbb{E}[Y_{nk}]) \leq M' \left(\frac{\epsilon}{6} \right) \right\} \cap \left\{ J_1 \leq \frac{\epsilon}{6} \sqrt{K} \right\} \cap \left\{ J_2 \leq \frac{\epsilon}{6} \sqrt{K} \right\} \\ & \cap \left\{ J_3 \leq \frac{\epsilon}{6} \sqrt{K} \right\} \cap \left\{ J_4 \leq \frac{\epsilon}{6} \sqrt{K} \right\} \cap \left\{ J_5 + J_6 + J_7 \leq \frac{\epsilon}{6} \sqrt{K} \right\} \\ & \subset \left\{ \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (Y_{nk} - \mathbb{E}[Y_{nk}]) + J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 + J_7 \leq M'(\epsilon) \right\}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

考虑上述集合补集, 并结合等式 (4.4) 和 (4.5), 则由上概率 $\mathbb{V}$ 的次可加性可得

$$0 \leq \mathbb{V} \left(\frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) > M'(\epsilon) \right)$$

$$\leq \mathbb{V}\left(\frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (Y_{nk} - \mathbb{E}[Y_{nk}]) > M' \left(\frac{\epsilon}{6}\right)\right) + \mathbb{V}\left(J_1 > \frac{\epsilon}{6} \sqrt{K}\right) \\ + \mathbb{V}\left(J_2 > \frac{\epsilon}{6} \sqrt{K}\right) + \mathbb{V}\left(J_3 > \frac{\epsilon}{6} \sqrt{K}\right) + \mathbb{V}\left(J_4 > \frac{\epsilon}{6} \sqrt{K}\right) + \mathbb{V}\left(J_5 + J_6 + J_7 > \frac{\epsilon}{6} \sqrt{K}\right). \quad (4.6)$$

与定理 3.1 证明第 2 步中分析相同, 可以得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} J_5 = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} J_6 = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} J_7 = 0$, 从而, 对任意给定 $\epsilon > 0$ 和 $K > 0$, 均有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V}(J_5 + J_6 + J_7 > \frac{\epsilon}{6} \sqrt{K}) = 0$. 又由于

$$0 \leq \mathbb{E}[J_1] \leq \frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| I_{\{|X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]| > c_n\}}] = J_5,$$

所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[J_1] = 0$. 又由于 $J_1 \geq 0$, 由 $\mathbb{E}$ 的单调性可得

$$\mathbb{E}[J_1] = \mathbb{E}[J_1 \cdot I_{\{J_1 \leq \frac{\epsilon}{6} \sqrt{K}\}} + J_1 \cdot I_{\{J_1 > \frac{\epsilon}{6} \sqrt{K}\}}] \geq \frac{\epsilon}{6} \sqrt{K} \cdot \mathbb{E}[I_{\{J_1 > \frac{\epsilon}{6} \sqrt{K}\}}] = \frac{\epsilon}{6} \sqrt{K} \cdot \mathbb{V}\left(J_1 > \frac{\epsilon}{6} \sqrt{K}\right).$$

因此,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V}\left(J_1 > \frac{\epsilon}{6} \sqrt{K}\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{\epsilon \sqrt{K}} \mathbb{E}[J_1] = 0.$$

类似地, 可以证得

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V}\left(J_3 > \frac{\epsilon}{6} \sqrt{K}\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{\epsilon \sqrt{K}} J_6 = 0, \quad 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V}\left(J_4 > \frac{\epsilon}{6} \sqrt{K}\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{\epsilon \sqrt{K}} J_7 = 0.$$

因为 $J_2 \leq 0$, 显然, $\mathbb{V}(J_2 > \frac{\epsilon}{6} \sqrt{K}) = 0$. 由于 (4.3) 对任意 $\epsilon > 0$ 均成立, 从而,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V}\left(\frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (Y_{nk} - \mathbb{E}[Y_{nk}]) > M' \left(\frac{\epsilon}{6}\right)\right) = 0.$$

因此, 对 (4.6) 取极限可得

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V}\left(\frac{1}{\sqrt{n \log n}} \sum_{k=1}^n (X_{nk} - \mathbb{E}[X_{nk}]) > M'(\epsilon)\right) \leq 0.$$

因此, 取 $\epsilon = 1$, 即 $M = 2\sqrt{K} + \frac{\sqrt{K}}{2} \exp\{\frac{C}{\sqrt{K}}\}$, 由 $\mathbb{V}$ 与 v 的共轭性可得 (4.1) 成立. $\square$

致谢 作者感谢审稿人对本文的意见与建议.

参考文献

- 1 Chen Z, Epstein L. Ambiguity, risk, and asset returns in continuous time. *Econometrica*, 2002, 70: 1403–1443
- 2 Peng S. G -expectation, G -Brownian motion and related stochastic calculus of Itô type. In: *Stochastic Analysis and Applications*. New York: Springer, 2007, 541–567
- 3 Peng S. Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty—with robust central limit theorem and G -Brownian motion. ArXiv:1002.4546, 2010
- 4 Choquet G. Theory of capacities. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 1954, 5: 131–295
- 5 Chen Z, Chen T, Davison M. Choquet expectation and Peng's g -expectation. *Ann Probab*, 2005, 33: 1179–1199
- 6 Huper P. The use of Choquet capacities in statistics. *Bull Internat Statist Inst*, 1973, 45: 181–191
- 7 Wasserman L, Kadane J. Bayes' theorem for Choquet capacities. *Ann Statist*, 1990, 18: 1328–1339
- 8 Maccheroni F, Marinacci M. A strong law of large numbers for capacities. *Ann Probab*, 2005, 33: 1171–1178
- 9 Marinacci M. Limit laws for non-additive probabilities and their frequentist interpretation. *J Econom Theory*, 1999, 84: 145–195

- 10 Epstein L, Schneider M. IID: Independently and indistinguishably distributed. *J Econom Theory*, 2003, 113: 32–50
- 11 De Cooman G, Miranda E. Weak and strong laws of large numbers for coherent lower previsions. *J Statist Plann Inference*, 2008, 138: 2409–2432
- 12 Cozman F. Concentration inequalities and laws of large numbers under epistemic and regular irrelevance. *Internat J Approx Reason*, 2010, 51: 1069–1084
- 13 Terán P. Laws of large numbers without additivity. *Trans Amer Math Soc*, 2014, 366: 5431–5451
- 14 Zhang L. Rosenthal’s inequalities for independent and negatively dependent random variables under sub-linear expectations with applications. *Sci China Math*, 2016, 59: 751–768
- 15 Chen Z, Hu F. A law of the iterated logarithm under sublinear expectations. *J Financ Eng*, 2014, 1: 1450015
- 16 Zhang L. Exponential inequalities under the sub-linear expectations with applications to laws of the iterated logarithm. *Sci China Math*, 2016, 59: 2503–2526
- 17 Zhang L. Strong limit theorems for extend independent and extended negatively dependent random variables under non-linear expecations. *ArXiv:1680.00710*, 2016
- 18 Chen Z, Wu P, Li B. A strong law of large numbers for non-additive probabilities. *Internat J Approx Reason*, 2013, 54: 365–377
- 19 Hu T, Móricz F, Taylor R. Strong laws of large numbers for arrays of rowwise independent random variables. *Acta Math Hungar*, 1989, 54: 153–162
- 20 Hu T, Weber N. On the rate of convergence in the strong law of large numbers for arrays. *Bull Aust Math Soc*, 1992, 45: 479–482
- 21 Lan Y, Zhang N. Strong limit theorems for weighted sums of negatively associated random variables in nonlinear probability. *ArXiv:1706.05788*, 2017
- 22 Block H, Savits T, Shaked M. Some concepts of negative dependence. *Ann Probab*, 1982, 10: 765–772

Laws of the logarithm for arrays of rowwise negatively associated random variables under nonlinear probabilities

Yuting Lan & Xinwei Feng

Abstract In this paper, the notion of negatively associated random variables is introduced under nonlinear probabilities, which is weaker than some existing conditions of independence. Within this framework, a law of the logarithm for arrays of rowwise negatively associated random variables is established by investigating their convergence properties. In addition, a weak law of the logarithm with the convergence of capacity is obtained.

Keywords nonlinear probabilities, negatively associated random variables, law of the logarithm, arrays of random variables

MSC(2010) 60F15, 60F05

doi: 10.1360/N012018-00104