连续时间 Markov 链的嵌入及其不变分布的数值计算

刘源远^{①*}, 汤迎春^①, 赵以强^②

① 中南大学数学与统计学院, 长沙 410083;

② School of Mathematics and Statistics, Carleton University, Ottawa K1S 5B6, Canada

E-mail: liuyy@csu.edu.cn, 1060864320@qq.com, zhao@math.carleton.ca

收稿日期: 2015-02-01; 接受日期: 2015-03-02; * 通信作者
中央高校基本科研业务费 (批准号: 2010QYZD001) 资助项目

摘要 本文采用嵌入的思想来研究连续时间 Markov 链不变分布的数值计算问题. 本文建立连续时间嵌入 Markov 链作为截断扩充逼近的两个基本性质, 得到连续时间水平依赖的 M/G/1 型 Markov 过程不变分布的迭代公式, 并且在此基础上给出广义 Markov 分支过程不变分布的稳定算法, 并通过两个例子来介绍这一算法.

关键词 连续时间 Markov 链 分支过程 不变分布 嵌入技巧 截断扩充逼近 数值计算

MSC (2010) 主题分类 60J27, 65C20

1 引言

连续时间 Markov 链, 也称 q 过程^[1-3], 是一类应用很广的随机过程, 其研究具有重要的理论意义和实际价值. 给定一个 q 矩阵 (不论保守与否), Hou^[4] 已经彻底解决了 q 过程的存在唯一性这一重要问题, 其所得结果被国际同行誉为侯氏定理. 自存在唯一性研究好之后, 遍历性受到了学者们的广泛研究, 取得了丰富的成果 (参见文献 [1, 2]). 我们知道, 若 Markov 链是遍历的, 则其不变分布存在且唯一, 而且不变分布的存在唯一性也已有完整的刻画 (参见文献 [2]). 但对不变分布本身的研究还不够充分. 虽然生灭过程^[5]、单生过程^[6]和单死过程^[7]的不变分布可以显式地表示出来, 但对其他模型, 我们很难得到不变分布的表达式. 有些情形即使我们能得到显式表达式, 但其数值计算不一定能实现, 也就是说, 漂亮的解析表达式不一定能导出稳定有效的数值算法. 因此, 研究不变分布的数值计算很有必要, 这属于计算概率^[8, 9]的范畴. 计算概率依赖于我们对问题本身的概率分析, 同时也要应用计算数学的理论技巧.

通常采用两种方法来计算 Markov 链的不变分布: 一种方法是截断扩充逼近的方法^[10-12], 另一种方法是设计稳定有效的数值算法. 截断扩充逼近是通过有限 Markov 链的不变分布来逼近无限 Markov 链的不变分布, 简单地说, 就是用有限逼近无限. 这种方法看似简单, 但在某些情形下, 有限 Markov 链的不变分布并不收敛到无限 Markov 链的不变分布, 这样的逼近就不成功 (实例参见文献 [13]). 此外, 逼近的有效性也需要度量. 这样关于截断扩充逼近就有两个基本问题: (i) 什么样的条件保证收敛性? (ii) 如果收敛, 收敛的速度又如何? 从数学的角度上说, 如果能够得到显式的表达式或递推公式已经很

英文引用格式: Liu Y Y, Tang Y C, Zhao Y Q. Censoring technique and numerical computations of invariant distribution for continuous-time Markov chains (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2015, 45: 671-682, doi: 10.1360/N012015-00074

完美了, 但这样的表达式或迭代公式在数值计算时可能效果很差, 基于这些表达式或递推公式的算法甚至有可能是不稳定的. 因此, 很有必要应用某些方法来得到等价的表达式或递推公式, 去发展稳定有效的数值算法.

本文应用 Markov 过程的嵌入技巧 (the censoring technique) (参见文献 [8,14]) 来研究上述两个问题, 得到了新的结果. 第 2 节介绍连续时间嵌入 Markov 链的概念和基本性质. 第 3 节应用嵌入的思想来研究截断扩充逼近, 证明全变差范数意义下的嵌入 Markov 链是最佳截断扩充逼近, 但在 V 范数意义下不一定是最佳逼近. 第 4 节再次应用嵌入的思想得到连续时间水平依赖的 M/G/1 型 Markov 过程不变分布的递推公式. 第 5 节应用该公式得到广义 Markov 分支过程不变分布的一个稳定有效的数值算法.

2 连续时间 Markov 链的嵌入

设 $\{X_t, t \geq 0\}$ 是可数状态空间 S 上的连续时间 Markov 链, q 矩阵为 Q . 我们规定本文所涉及的连续时间 Markov 链都是时齐 Markov 链. 设 E 是 S 的一个子集, 用 E^c 表示集合 E 的补集. q 矩阵 Q 可以分解成

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} E & E^c \end{matrix} \\ \begin{matrix} E \\ E^c \end{matrix} & \begin{bmatrix} Q_E & Q_{EE^c} \\ Q_{E^cE} & Q_{E^cE^c} \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

根据文献 [8, 第 5.4 节], 定义子集 E 上的嵌入 (或称为限制) 过程 $\{X_t^E, t \geq 0\}$. 为定义嵌入过程, 我们要区分局部时间和全局时间. 局部时间是相对于嵌入过程而言的, 而全局时间则相对于过程 X_t 而言的. 现在定义局部时间: 若过程 X_t 在集合 E 中, 则全局时间每增加一个单位, 局部时间就增加一个单位, 此时局部时间同步于全局时间; 若过程 X_t 不在 E 中, 则全局时间增加但局部时间保持不变. 下面定义嵌入过程: 若 t' 是全局时间, 其对应的局部时间为 t , 则定义 $X_t^E = X_{t'}$. 因此, X_t^E 也是一个随机过程, 且其第 n 步转移时刻是 Markov 链 X_t 第 n 次到达集合 E 的时间, 也就是说, 过程 X_t^E 的样本轨道是 X_t 的样本轨道去掉其在 E^c 中的部分得到的.

文献 [8, 第 5 章] 中有如下定理, 阐述了嵌入过程的基本性质, 这些性质之后会用到.

定理 1 设 $\{X_t, t \geq 0\}$ 是离散状态空间 S 上不可约且正常返的连续时间 Markov 链, 其 q 矩阵为 Q , 不变分布为 π . 设 E 是 S 的任意一个子集. 则嵌入过程 $\{X_t^E : t \geq 0\}$ 是 E 上不可约且正常返的连续时间 Markov 链, 不变分布为 π^E . 其 q 矩阵 Q^E 可表示为

$$Q^E = Q_E + Q_{EE^c}(-Q_{E^cE^c})^{-1}Q_{E^cE}.$$

而且不变分布 π^E 跟 π 成正比, 即有

$$\pi_k^E = \frac{\pi_k}{\sum_{i \in E} \pi_i}, \quad k \in E. \quad (2.1)$$

矩阵 $(-Q_{E^cE^c})^{-1}$ 是下述方程组的最小非负解,

$$-Q_{E^cE^c}X = I \quad \text{且} \quad X(-Q_{E^cE^c}) = I,$$

$(-Q_{E^cE^c})^{-1}$ 是一个矩阵, 其第 i 行、第 j 列的元素表示从 E^c 中的状态 i 出发且首次访问 E 之前在 E^c 中状态 j 的平均逗留时间. 此外, 矩阵 $(-Q_{E^cE^c})^{-1}Q_{E^cE}$ 表示从集合 E^c 出发首次访问集合 E 的概率.

后面的分析会多次用到定理 1, 其最重要的性质是不变分布 π 跟 π^E 成比例关系, 这意味着对任意的 $k \in E$, 当 $E \uparrow X$ 时, $\pi_k^E \downarrow \pi_k$. 应用定理 1 的难点在于 q 矩阵 Q^E 不容易确定. 但当 Q 为上 Hessenberg 矩阵时, Q^E 可由 q 矩阵确定, 我们将在第 4 节深入分析这一点.

3 截断扩充逼近

不失一般性, 假设 $X = \mathbb{Z}_+$, 即 X 为所有非负整数构成的集合. 记 $E(n) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 1$. 令 i_0 是 X 中的任一状态. 对任意的 $n \geq i_0$, 设 ${}_{(n)}Q$ 是矩阵 Q 的前 $n+1$ 行和前 $n+1$ 列所构成的 $n+1$ 阶方阵, 显然, ${}_{(n)}Q$ 是非保守的. 将矩阵 Q 中每一行被截断的元素以某种方式 (有很多方式) 加到 ${}_{(n)}Q$, 可得到保守的 q 矩阵 ${}_{(n)}\hat{Q}$. 假设 Q 存在不变分布 π , ${}_{(n)}\hat{Q}$ 存在不变分布 ${}_{(n)}\pi$. 对非负函数 V , 定义 V 范数

$$\|{}_{(n)}\pi - \pi\|_V = \sum_{k=0}^n |{}_{(n)}\pi_k - \pi_k| V_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \pi_k V_k.$$

当 $V \equiv 1$ 时, 将 $\|{}_{(n)}\pi - \pi\|_V$ 表示为 $\|{}_{(n)}\pi - \pi\|_1$.

常用的扩充方法是将截断的元素加到某一行 (称为线性扩充). 特别地, 将被截断的元素加到 ${}_{(n)}Q$ 的第 $i_0 + 1$ 列所得到的 q 矩阵 ${}_{(n)}\hat{Q}$ 如下:

$${}_{(n)}\hat{q}_{ij} = \begin{cases} q_{ij} + I_{\{i_0\}}(j) \cdot \sum_{j \notin E(n)} q_{ij}, & \text{若 } i, j \in E(n), \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

由于这种特殊的扩充方式, 扩充之后的过程中从任一状态出发均可到达状态 i_0 . 因此, ${}_{(n)}\hat{Q}$ 存在不变分布 ${}_{(n)}\hat{\pi}$. 文献 [15] 证明了在指数遍历条件下, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|{}_{(n)}\hat{\pi} - \pi\|_1 = 0$. 最近, 在同样的条件下, 文献 [13] 证明了更强的收敛性

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|{}_{(n)}\hat{\pi} - \pi\|_V = 0,$$

其中 V 是指数遍历漂移条件中的函数, 满足 $V \geq 1$.

显然, 嵌入 Markov 链的 q 矩阵可看作是 Q 在集合 $E(n)$ 上的截断扩充, 因此其不变分布 $\pi^{E(n)}$ 可以看成 π 的逼近. 下面的结果进一步刻画了这方面的性质.

定理 2 设 $\{X_t, t \geq 0\}$ 是离散状态空间 S 上不可约且正常返的连续时间 Markov 链.

(i) 嵌入 Markov 链是绝对值误差意义下的最佳逼近, 即

$$\|\pi^{E(n)} - \pi\|_1 = 2 \left(1 - \sum_{k=0}^n \pi_k \right) \leq \|{}_{(n)}\pi - \pi\|_1,$$

其中 ${}_{(n)}\pi$ 表示任一截断扩充逼近链的不变分布;

(ii) 设 V 是满足 $\pi(V) = \sum_i \pi_i V_i < \infty$ 的非负函数, 则

$$\|\pi^{E(n)} - \pi\|_V \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

但是嵌入 Markov 链在 V 范数意义下不一定是最优的.

注 1 对离散时间 Markov 链, 文献 [12] 中已得到定理 2(i) 的相应结果.

证明 (i) 考虑任意截断扩充 Markov 链的不变分布 ${}_{(n)}\pi$ 与 π 的误差和, 可得

$$\|{}_{(n)}\pi - \pi\|_1 = \sum_{k=0}^n |{}_{(n)}\pi_k - \pi_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \pi_k = 2\left(1 - \sum_{k=0}^n \pi_k\right) + 2 \sum_{\substack{k=0 \\ \pi_k > {}_{(n)}\pi_k}}^n (\pi_k - {}_{(n)}\pi_k). \quad (3.1)$$

注意到 (3.1) 中右边第二项是非负的. 由 (2.1) 可知, 对于嵌入 Markov 链来说第二项等于 0, 这样就证明了第一个结论.

(ii) 由于对所有的 $k = 0, 1, \dots, n$, $\pi_k^{E(n)} \geq \pi_k$, 因此, 我们有

$$\begin{aligned} \|\pi^{E(n)} - \pi\|_V &= \sum_{k=0}^n |\pi_k^{E(n)} - \pi_k| V_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \pi_k V_k \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{\pi_k}{\sum_{i=0}^n \pi_i} - \pi_k \right) V_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \pi_k V_k \\ &= \frac{\sum_{i=n+1}^{\infty} \pi_i}{\sum_{i=0}^n \pi_i} \sum_{k=0}^n \pi_k V_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \pi_k V_k. \end{aligned}$$

又 $\pi(V) < \infty$, 从而, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \pi_k V_k \rightarrow 0.$$

这样就证明了第二个结论的第一部分. 第二部分可以由下面的反例说明.

例 1 考虑一个连续时间的生灭过程, 其 q 矩阵 Q 如下:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

可以得到该过程的不变分布为

$$\pi_k = (1 - \rho)\rho^k, \quad k \geq 0,$$

其中 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. 容易知道, $E(n)$ 上的嵌入 Markov 链的 q 矩阵为

$$Q^{E(n)} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

容易得到其不变分布:

$$\pi_k^{E(n)} = \frac{(1 - \rho)\rho^k}{1 - \rho^{n+1}}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

若将被截断的元素全部只加到第 1 列, 我们得到

$${}_{(n)}Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(\lambda + \mu) & \lambda \\ \lambda & 0 & 0 & \cdots & \mu & -(\lambda + \mu) \end{pmatrix}.$$

其不变分布为

$${}_{(n)}\pi_k = \frac{(1-\rho)(\rho^k - \rho^{n+1})}{1 - (n+2)\rho^{n+1} + (n+1)\rho^{n+2}}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

现在计算不变分布在 V 范数下的误差, 可得

$$\begin{aligned} \|\pi^{E(n)} - \pi\|_V &= \frac{(1-\rho)\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}} \sum_{k=0}^n \rho^k V_k + (1-\rho) \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho^k V_k, \\ \|{}_{(n)}\pi - \pi\|_V &= \sum_{k=0}^n \left| \frac{(1-\rho)(\rho^k - \rho^{n+1})}{1 - (n+2)\rho^{n+1} + (n+1)\rho^{n+2}} - (1-\rho)\rho^k \right| V_k + (1-\rho) \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho^k V_k. \end{aligned}$$

现取 $\rho = 0.99$, $V_k = (\frac{1}{\rho})^{\frac{197}{200}k}$, $n = 30$, 可以得到

$$\|\pi^{E(n)} - \pi\|_V = 0.8545 > \|{}_{(n)}\pi - \pi\|_V = 0.8340.$$

这表明嵌入 Markov 链的误差更大, 因此, 嵌入 Markov 链在 V 范数意义下不一定是最佳逼近. $\square$

4 连续时间水平依赖的 M/G/1 型 Markov 链

本节考虑连续时间水平依赖的 M/G/1 型 Markov 过程, 其是一个二维的连续时间 Markov 链 $\{(X_t, Y_t), t \geq 0\}$, 其中 X_t 表示时刻 t 的水平, Y_t 表示时刻 t 的位相, 水平空间为 $\mathbb{Z}_+$, 水平 n 的位相空间 ϕ_n 是一个有限集. 定义 $L_n = \{(n, y) \mid y \in \phi_n\}$ 为 n 水平集合, 则该过程的状态空间为 $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$. M/G/1 型 Markov 过程规定从状态 (n, y) , $n \geq 0$, $y \in \phi_n$ 出发, 只允许在同一水平集内转移, 或转移到 $n-1$ 水平集 (0 水平集不向下转移), 向上转移没有限制. 进一步, 若位相之间的转移速率依赖于水平, 则称 M/G/1 型过程是水平依赖的, 否则称为是水平独立的.

用 m_n 表示 ϕ_n 中的位相个数. 连续时间水平依赖的 M/G/1 型 Markov 链的 q 矩阵具有如下的分块结构:

$$Q = \begin{pmatrix} A_0^{(0)} & A_1^{(0)} & A_2^{(0)} & A_3^{(0)} & \cdots \\ A_{-1}^{(1)} & A_0^{(1)} & A_1^{(1)} & A_2^{(1)} & \cdots \\ 0 & A_{-1}^{(2)} & A_0^{(2)} & A_1^{(2)} & \cdots \\ 0 & 0 & A_{-1}^{(3)} & A_0^{(3)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

其中 $A_\ell^{(k)}$, $k \geq 0, \ell \geq -1$ 是 $m_k \times m_{k+\ell}$ 阶矩阵, 分块矩阵 $A_\ell^{(k)}$ ($k \geq 0, \ell \geq -1$) 的第 i 行、第 j 列的元素表示从 k 水平集中的位相 i 到 $k+\ell$ 水平集中的位相 j 的转移速率. 除了矩阵 $A_0^{(k)}$ 的对角线元素是严格小于 0 的之外, 对任意 $k \geq 0, \ell \geq -1$, 矩阵 $A_\ell^{(k)}$ 的所有元素都是非负的, 且 Q 是保守的. 这一过程包括很多有趣的模型, 如连续时间 Markov 多元分支过程和水平依赖的拟生灭过程.

在文献 [16] 中, 连续时间 Markov 多元分支过程可以表示为连续时间水平依赖的 M/G/1 型 Markov 过程, 其中水平 $X(t)$ 表示在时刻 t 分支过程中的所有个体总数. 若 $X(t) = n \geq 1$, 则时刻 t 的位相是 n 维向量 $Y(t) = (Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t))$, 其中 $Y_i(t) \in \{1, 2, \dots, s\}$ 表示 t 时刻第 i 个个体 (或称为分支) 的位相, 则水平 n 的位相空间为 $\phi_n = \{(y_1, \dots, y_n) \mid y_i \in \{1, 2, \dots, s\}, i = 1, 2, \dots, n\}$, 这表明 $m_n = n^s$. 根据文献 [16, 第 33 页] 来定义每一个分支演变的方式, 可以得到该分支过程的 q 矩阵 Q 如 (4.1) 所示, 其中 $A_\ell^{(0)} = 0$ (即 0 是分支过程的吸收态). 由文献 [16] 可知, 这样定义的分支过程中每一分支的寿命不是指数分布, 而是位相分布, 并且分支的寿命长度和后代数量的分布相关. 若 $A_0^{(0)} \neq 0$ (即 0 不是吸收态), 则由 (4.1) 确定的过程可以看成是带拯救的多元 Markov 分支过程.

若 $\ell \geq 2$ 时 $A_\ell^{(k)}$ 为零矩阵, 水平依赖的 M/G/1 型 Markov 过程就变成了水平依赖的拟生灭过程. 连续时间水平依赖的拟生灭过程是一类重要的 Markov 过程, 它比人们熟知的连续时间生灭过程以及水平独立的拟生灭过程 (参见文献 [8, 9]) 更能刻画复杂的随机现象, 这类过程包括了许多有趣的排队模型, 如 M/M/c 重试排队 [17] 和 PH/M/ ∞ 排队 [18].

本节的主要目的是应用嵌入技巧来研究连续时间水平依赖的 M/G/1 型 Markov 过程不变分布的数值算法. 为此, 考虑 M/G/1 型 Markov 过程在 $E(k) := \bigcup_{n=0}^k \{(n, y) \mid y \in \phi_n\}, k \geq 1$ 上的嵌入链. 直接写出该嵌入 Markov 链的 q 矩阵很困难. 我们需要引进概率矩阵序列 $\{G^{(n)}, n \geq 1\}$.

定义 $T_A = \inf\{t \geq J_1 : (X_t, Y_t) \in A\}$ 为过程首次回到集合 $A \subset X$ 的时间, 其中 J_1 是过程 (X_t, Y_t) 的首次跳跃时间. 对任意 $n \geq 1$, 定义矩阵 $G^{(n)}$ 如下:

$$G_{ij}^{(n)} = P[T_{L_{n-1}} < \infty, (X_{T_{L_{n-1}}}, Y_{T_{L_{n-1}}}) = (n-1, j) \mid (X_0, Y_0) = (n, i)]. \quad (4.2)$$

也就是说, 元素 $G_{ij}^{(n)}$ 表示从状态 (n, i) 出发, 有限时间内首次到达水平集 L_{n-1} 并落在位相 j 的概率. 修改文献 [8] 中关于拟生灭过程情形的证明, 不难得到 $G^{(n)}$ 是如下方程:

$$A_{-1}^{(n)} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(n)} \prod_{i=0}^k G^{(n+k-i)} = 0, \quad n \geq 1 \quad (4.3)$$

的最小非负解. 根据定理 1 下面关于 $(-Q_{E^c})^{-1}Q_{E^cE}$ 的概率解释, 以及该过程向下只跳一个水平的特殊结构, 可以得到嵌入 Markov 链的 q 矩阵如下:

$$Q_k = \begin{pmatrix} A_0^{(0)} & A_1^{(0)} & A_2^{(0)} & \cdots & A_{k-1}^{(0)} & \bar{A}_k^{(0)} \\ A_{-1}^{(1)} & A_0^{(1)} & A_1^{(1)} & \cdots & A_{k-2}^{(1)} & \bar{A}_{k-1}^{(1)} \\ 0 & A_{-1}^{(2)} & A_0^{(2)} & \cdots & A_{k-3}^{(2)} & \bar{A}_{k-2}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{-1}^{(k)} & \bar{A}_0^{(k)} \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

其中对任意 $k \geq 1, 0 \leq i \leq k$, 有

$$\bar{A}_{k-i}^{(i)} = A_{k-i}^{(i)} + \sum_{m \geq 1} A_{k-i+m}^{(i)} \prod_{r=0}^{m-1} G^{(k-i+m-r)}. \quad (4.5)$$

假设 M/G/1 型 Markov 过程是遍历的. 由定理 1 可知其不变分布 π 跟 $\pi^{E(k)}$ 成比例关系, 因此可得

$$\pi^{E(k)} Q_k = 0, \quad k \geq 1.$$

对上述方程展开, 取最后一个集合方程, 可得

$$\pi_0 \bar{A}_k^{(0)} + \pi_1 \bar{A}_{k-1}^{(1)} + \cdots + \pi_k \bar{A}_0^{(k)} = 0, \quad k \geq 1.$$

对其变形, 可得迭代公式

$$\pi_k = \sum_{i=0}^{k-1} \pi_i \bar{A}_{k-i}^{(i)} \cdot [-\bar{A}_0^{(k)}]^{-1}, \quad k \geq 1. \quad (4.6)$$

将以上结果总结为如下定理.

定理 3 设连续时间水平依赖的 M/G/1 型 Markov 过程 (其 q 矩阵为 (4.1)) 是遍历的, 则其不变分布 π 可通过迭代公式 (4.6) 得到.

注 2 如果 (4.1) 是水平独立的, 即对任意 $k \geq 1$, 有 $A_\ell^{(k)} = A_\ell$, 则对任意 $n \geq 1$, $G^{(n)} = G$. 此时, 迭代公式 (4.5) 就变成如下简单的形式:

$$\bar{A}_{k-i}^{(0)} = \sum_{m \geq 0} A_{k-i+m}^{(0)} G^m, \quad \bar{A}_{k-i}^{(i)} = \sum_{m \geq 0} A_{k-i+m} G^m, \quad 1 \leq i \leq k, \quad (4.7)$$

其中 $G^0 = I$. 再由定理 3, 我们很容易就将著名的 Ramaswami 算法^[19]推广到连续时间的情形.

注 3 要应用迭代公式 (4.6), 我们必须先得到矩阵序列 $\{G^{(n)}, n \geq 1\}$. 但当每一个水平的相位空间不是单点集时, 很难得到 $\{G^{(n)}, n \geq 1\}$ 的解析表达式. 因此要发展平稳分布 π 的数值算法, 必须首先数值计算出 $G^{(n)}$. 对于水平独立的 M/G/1 型 Markov 过程和水平依赖的拟生灭过程, 已经有了计算 $G^{(n)}$ 的有效算法. 然而, 对水平依赖的 M/G/1 型 Markov 过程而言, 数值计算 $G^{(n)}$ 仍然是个开放问题, 这也是需要进一步研究的课题.

幸运的是, 对一维遍历 M/G/1 型 Markov 过程而言, 该问题非常简单. 由于过程从状态 n 出发必须在有限时间内到达状态 $n-1$, 这样 $G^{(n)} \equiv 1$, 因此可以得到 π 的迭代公式. 我们将此以推论的形式叙述出来.

推论 1 一维遍历的 M/G/1 型 Markov 过程 (即对任意 $k \geq 0$, $\ell \geq -1$, $A_\ell^{(k)}$ 是一个标量) 的不变分布满足迭代公式 (4.6), 其中

$$\bar{A}_{k-i}^{(i)} = A_{k-i}^{(i)} + \sum_{m \geq 1} A_{k-i+m}^{(i)}.$$

注 4 一维遍历的 M/G/1 型 Markov 过程也称为单死过程. 根据审稿人的提示, 我们注意到了文献 [7]. 文献 [7] 从分析的角度给出了单死过程不变分布的解析表达式, 这也可以从 (4.6) 和单死过程的结构得到.

5 广义 Markov 分支过程的稳定算法

考虑定义在 $\mathbb{Z}_+$ 上的 (带拯救的) 广义 Markov 分支过程, 它是一个连续时间 Markov 链, 其 q 矩

阵 $Q = (q_{ij})$ 为

$$q_{ij} = \begin{cases} h_j, & \text{若 } i = 0, \\ i^\alpha p_{j-i+1}, & \text{若 } i \geq 1, \quad j \geq i-1, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0$, $h_j \geq 0$, 当 $j \geq 1$ 且 $0 < -h_0 = \sum_{k \neq 0} h_k < \infty$; $p_j \geq 0$, 当 $j \neq 1$ 且 $0 < -p_1 = \sum_{k \neq 1} p_k < \infty$. 文献 [20, 21] 已得到了广义 Markov 分支过程的存在唯一性、常返性和正常返性的判别准则. 文献 [22] 给出了不变分布精确的尾渐近速度. 据我们所知, 尚未有人研究这类分支过程不变分布的数值算法, 这正是本节要研究的问题.

为避免平凡的情形出现, 假设 $p_0 > 0$ 且 $\sum_{j=2}^{\infty} p_j > 0$. 用 $H(z)$ 和 $P(z)$ 分别表示序列 $\{h_j, j \geq 0\}$ 和 $\{p_j, j \geq 0\}$ 的母函数, 即

$$H(z) = \sum_{j \geq 0} h_j z^j, \quad P(z) = \sum_{j \geq 0} p_j z^j, \quad |z| \leq 1. \quad (5.1)$$

由文献 [21] 可知, Q 正则当且仅当 $P'(1) \leq 0$. 若 $P'(1) \leq 0$, 则任意广义 Markov 分支过程常返. 进一步, 广义 Markov 分支过程正常返当且仅当

$$\int_0^1 \frac{H(y)}{P(y)} (1-s)^{\alpha-1} ds > -\infty. \quad (5.2)$$

广义 Markov 分支过程的 q 矩阵 Q 可表示为

$$Q = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & 2^\alpha p_0 & 2^\alpha p_1 & 2^\alpha p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 3^\alpha p_0 & 3^\alpha p_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

显然, 广义 Markov 分支过程也是水平依赖的一维 M/G/1 型 Markov 过程. 假设不变分布 π 存在, 则由 $\pi Q = 0$ 可得

$$\pi_0 h_k + \sum_{v=1}^{k+1} \pi_v v^\alpha p_{k+1-v} = 0.$$

整理得

$$\pi_1 = -\frac{\pi_0 h_0}{p_0}, \quad \pi_{k+1} = \frac{-\pi_k k^\alpha p_1 - (\pi_0 h_k + \sum_{v=1}^{k-1} \pi_v v^\alpha p_{k+1-v})}{(k+1)^\alpha p_0}, \quad k \geq 1, \quad (5.3)$$

其中, 我们约定空和等于 0, 即

$$\sum_{v=1}^0 \pi_v v^\alpha p_{k+1-v} = 0.$$

由文献 [21] 知, 不变分布 π_0 的初值可由下式给出,

$$\pi_0 = \left[1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{H(y)}{P(y)} (-\ln y)^{\alpha-1} dy \right]^{-1}. \quad (5.4)$$

由 (5.3) 和 (5.4) 可以得到计算不变分布的一种算法. 遗憾的是, 该算法在数值计算中没有太多意义. 对于略懂计算数学的人而言, 原因很显然. 因为 (5.3) 涉及减法、计算过程中有效数字的损失和不断地迭代会使得结果逐渐偏离准确值, 从而使得算法不稳定. 我们将这种算法称为不稳定算法. 当然, 不稳定的算法没有应用价值.

下面来设计一种稳定的算法. 假设不变分布 π 存在, 应用推论 1 可得

$$\pi_1 = -\frac{\pi_0 h_0}{p_0}, \quad \pi_k = \frac{\pi_0 \sum_{j=k}^{\infty} h_j + \sum_{v=1}^{k-1} \pi_v v^{\alpha} (\sum_{j=k+1-v}^{\infty} p_j)}{k^{\alpha} p_0}, \quad k \geq 2. \quad (5.5)$$

迭代公式 (5.5) 只涉及非负数的加法, 没有减法, 因此是一个稳定的算法. 要发展数值算法来计算不变分布, 如果按照上一种思路来处理的话, 先要计算 π_0 . 但是一般情形下, 应用 (5.4) 去计算 π_0 也很困难. 其实, 初值 π_0 可以不需要先计算, 我们只需要做归一化处理即可, 下面来解释具体做法. 由 $\pi Q = 0$ 可知,

$$\pi_1 = \frac{-h_0}{p_0} \pi_0, \quad \pi_2 = \frac{h_0 p_1 - h_1 p_0}{2^{\alpha} p_0^2} \pi_0, \quad \pi_3 = \frac{+p_0 p_1 h_1 + h_0 p_0 p_2 - h_0 p_1^2 - h_2 p_0^2}{3^{\alpha} p_0^3} \pi_0, \quad \dots$$

从上述式子可看出 $\pi_k = c_k \pi_0, k \geq 1$, 其中 c_k 是跟 $p_i, h_i, 0 \leq i \leq k-1$ 有关的常数. 因此可先令 $\hat{\pi}_0 = 1$, 再应用 (5.5) 迭代计算出 $\hat{\pi}_k, k = 1, \dots, n$. 其实, $\hat{\pi}_k = c_k$. 又因为对充分大的 n 满足

$$\sum_{i=1}^n \pi_i \approx 1,$$

因此归一化处理便得到

$$\pi_0 \approx \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \hat{\pi}_i}, \quad \pi_k \approx \hat{\pi}_k \pi_0, \quad 1 \leq k \leq n.$$

在上述过程当中, n 的选取很重要, 但并不难处理, 原因是

$$\sum_{k=1}^{\infty} \hat{\pi}_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty.$$

我们把基于 (5.5) 和上述步骤的算法称为稳定算法.

例 2 设上述模型中的

$$h_j = \left(\frac{1}{3}\right)^{j-1} \frac{2}{3}, \quad j \geq 1, \quad p_j = \left(\frac{1}{3}\right)^j, \quad j \neq 1,$$

对于该例, 我们来比较稳定算法与不稳定算法的差异 (这里的差异是利用两种算法算出来的值跟真实值相比较的差异).

首先根据 $\pi Q = 0$, 应用迭代公式 (5.5) 和数学归纳法 (或根据文献 [7, 定理 3.4]), 不难得到

$$\pi_0 = (1 + \log 4)^{-1}, \quad \pi_k = \frac{\pi_0}{k^{\alpha} 2^{k-1}}, \quad k \geq 1.$$

有了精确值之后, 下面将用其来与数值算法得到的结果作比较. 取 $\alpha = 1, n = 200$, 不变分布结果见图 1. 图 1 中圆圈表示不变分布的准确值, 圆点表示应用稳定算法得到的不变分布, 三角形表示不稳定算法得到的不变分布.

由图 1 的截尾图图 2 可知, 稳定算法得到的不变分布比不稳定算法得到的不变分布更接近准确值, 且不稳定算法得到的不变分布出现了负值, 这也说明了它的不稳定性. 对于该例子, 不稳定算法也

图 1 $\alpha = 1, n = 200$ 时的不变分布 图 2 $\alpha = 1, n = 200$ 时不变分布的截尾图形

能计算该模型的不变分布, 这可能是因为该模型的不变分布是高度轻尾的, 即当 k 增加时 π_k 以非常快的指数速度衰减到 0. 所谓的轻尾, 是指存在 z 使得 $z > 1$ 且 $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k < \infty$, 否则称为是重尾的. 但是对于下面的例 3, 不稳定算法的表现就差太多了.

下面考虑另一个过程, 其不变分布是重尾的^[22], 该例可说明这两个算法的明显差异.

例 3 设上述模型中的 $p_j = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}$, $j \neq 1$, $\lambda > 0$ 且 $h_j = (j+1)^{-\theta}$, $j \geq 1$, 对于该例, 我们也比较稳定算法和不稳定算法的差异 (这里的差异是两种算法在运行时间上的差异).

为数值计算, 取 $\lambda = 1/2$, $\theta = 3/2$, $\alpha = 2$. 由文献 [22, 定理 3.1], 我们知道过程是正常返的, 且不变分布 π 是重尾的. 我们应用两种迭代方法计算其不变分布. 当 n 较小 (如 $n = 10$ 或 20) 时, 两种迭代方法都可行. 当 $n = 30$ 时, 稳定算法 (5.5) 只需 14 秒得到结果, 然而不稳定算法需要 5982 秒 (超过一个半小时). 当 $n = 50$ 时, 稳定算法 (5.5) 大约 25 秒得到结果, 不稳定算法没有计算出不变分布 (我们花了两小多时运行程序仍然没能得到数值结果). 这说明不稳定算法根本不能处理这种重尾情形.

用稳定算法来计算不变分布, 其全局图和截尾图分别如图 3 和 4 所示. 由截尾图易知过程的不变分布是重尾的.

图 3 $\alpha = 2, \lambda = 1/2, \theta = 3/2, n = 200$ 时的不变分布 图 4 $\alpha = 2, \lambda = 1/2, \theta = 3/2, n = 200$ 时的不变分布截尾图形

6 后记

本文通信作者刘源远师从侯振挺老师, 学习 Markov 过程和排队论至今已有十五年多, 并自毕业后一直追随侯老师工作至今, 得到了侯老师无私的教诲和帮助, 作者感激不尽. 今年正值侯老师 80 华诞, 衷心祝愿侯老师健康长寿.

致谢 作者感谢两位审稿人提出的宝贵意见, 特别是有一位审稿人提醒作者注意到了参考文献 [7]. 作者感谢汪鹏飞有益的讨论.

参考文献

- 1 Anderson W J. Continuous-Time Markov Chains: An Applications-Oriented Approach. New York: Springer-Verlag, 1991
- 2 Chen M F. From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems. 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2003

- 3 Hou Z, Guo Q. Homogeneous Denumerable Markov Processes. New York: Spring, 1988
- 4 侯振挺. Q 过程的唯一性准则. 中国科学, 1974, 4: 115–130
- 5 侯振挺, 刘再明, 张汉君, 等. 生灭过程. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2000
- 6 张余辉. 单生过程击中时与平稳分布. 北京师范大学学报 (自然科学版), 2004, 40: 157–161
- 7 王玲娣, 张余辉. 单生 (死) Q 矩阵零流出 (入) 的判别准则. 数学学报 (中文版), 2014, 57: 681–692
- 8 Latouche G, Ramaswami V. Introduction to Matrix Geometric Methods in Stochastic Modeling. Philadelphia, PA: SIAM, 1999
- 9 Neuts M F. Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach. Baltimore, MD: The Johns Hopkins University Press, 1981
- 10 Liu Y. Augmented truncation approximations of discrete-time Markov chains. Oper Res Lett, 2010, 38: 218–222
- 11 Tweedie R L. Truncation approximations of invariant measures for Markov chains. J Appl Probab, 1998, 35: 517–536
- 12 Zhao Y Q, Liu D. The censored Markov chain and the best augmentation. J Appl Probab, 1996, 33: 623–629
- 13 Liu Y. Perturbation analysis for continuous-time Markov chains. Sci China Math, inpress, 2015
- 14 Zhao Y Q. Censoring technique in studying block-structured Markov chains. In: Advances in Algorithmic Methods for Stochastic Models. New Jersey: Notable Publications Inc, 2000, 417–433
- 15 Hart A G, Tweedie R L. Convergence of invariant measures of truncation approximations to Markov processes. Appl Math, 2012, 3: 2205–2215
- 16 Bean N, Kontoleon N, Taylor P. Markovian trees: Properties and algorithms. Ann Oper Res, 2008, 160: 31–50
- 17 Liu B, Wang X, Zhao Y Q. Tail asymptotics for M/M/c retrial queues with non-persistent customers. Oper Res, 2012, 12: 173–188
- 18 Bright L, Taylor P G. Calculating the equilibrium distribution in level dependent quasi-birth-and-death processes. Stoch Models, 1995, 11: 497–525
- 19 Ramaswami V. A stable recursion for the steady state vector in markov chains of m/g/1 type. Stoch Models, 1988, 4: 183–188
- 20 Chen R R. An extended class of time-continuous branching processes. J Appl Probab, 1997, 34: 14–23
- 21 Chen A Y. Ergodicity and stability generalized Markov branching processes with resurrection. J Appl Probab, 2002, 39: 786–803
- 22 Liu Y, Zhao Y Q. Exact tail asymptotics in a generalized Markov branching process. Stoch Models, 2011, 27: 251–271

Censoring technique and numerical computations of invariant distribution for continuous-time Markov chains

LIU YuanYuan, TANG YingChun, ZHAO Yiqiang Q.

Abstract In this paper, we consider numerical computations of invariant distributions for continuous-time Markov chains in terms of the censoring technique. Two basic properties are established for the censored continuous-time Markov chain that is viewed as a truncated augmentation approximation. Stable recursive formulas for continuous-time level-dependent M/G/1-type Markov processes are obtained, which are further applied to yield an effective algorithm for the invariant distribution of a generalized Markov branching process. Two examples are shown to illustrate this algorithm.

Keywords continuous-time Markov chains, branching processes, invariant distribution, censoring technique, augmented truncation approximation, numerical computation

MSC(2010) 60J27, 65C20

doi: 10.1360/N012015-00074