Blaschke (布拉什克) 积的 临界点及方程 $\Delta u = e^{2u}$

王启明 彭家贵

(中国科学院数学研究所) (中国科技大学数学系)

单位圆到自身的 proper^[1] 解析映照叫做(有限) Blaschke 积, 它也正是单位圆到自身的分歧覆盖, 其支点恰是临界点. 本文证明了这个分歧覆盖由其支点(阶数算在内)在相差单位圆的一自同构的意义下唯一确定, 而且支点的分布是任意的(定理 A). 作为应用, 我们得到了方程 $\Delta u = e^{2u}$ 在单位圆内有限多点处有给定的对数奇性并在圆边界上有给定的无穷奇性的解的存在性和唯一性定理(定理 B). 这个问题来自规范场的瞬时子问题^[2,3]. 我们证明了方程 $\Delta u = e^{2u}$ 在整个平面上无 C^2 的解(定理 C), 而 Wittich^[4] 只证明了它在整个平面上无整函数解.

一、Blaschke 积和唯一性定理

在本文中, D 表示单位圆 $\{z \in D \mid |z| < 1\}$, D 到自身的 proper* 解析映照(即有限 Blaschke 积)的全体记为 $\mathcal{B}(D)$, 下面的引理^[5]是 Schwarz 引理的推论:

引理 1 $f \in \mathcal{B}(D)$, 当且仅当 f 可写成

$$f = e^{i\theta} \prod_{v=1}^n \frac{z - a_v}{1 - \bar{a}_v z}, \quad a_v \in D, \theta \in \mathbb{R}$$

由 Hurwitz 公式及 f 对于单位圆周的对称性, 容易看出 f 在 D 内恰有 $n-1$ 个临界点(重数在内), 而在 D 的边上无临界点^[6,7].

众所周知, D 可看成是非欧平面, 其双曲几何可由黎曼度量

$$ds^2 = \frac{4dzd\bar{z}}{(1 - z\bar{z})^2}$$

给出, 其 Gauss 曲率为 -1 . 设 $f \in \mathcal{B}(D)$, 则 f 是保角的, 它在 $z \in D$ 处的双曲伸缩系数显然是

$$P_f(z) = \frac{1 - z\bar{z}}{1 - f\bar{f}} |f'(z)|.$$

P_f 有下列几条性质:

- 1) 若 $\sigma \in \text{Aut}(D)$, 则 $P_\sigma \equiv 1$;
- 2) $P_{\sigma \circ f} = P_f$;
- 3) $P_{f \circ \sigma} = P_f \circ \sigma$.

本文 1978 年 4 月 19 日收到.

* Proper 即紧集的逆象仍是紧集的意思.

注意: P_f 在 D 的边界上无定义,但是,一个很重要的性质是 P_f 可连续扩充到 $\bar{D}$ 上,确切地说,可以证明

引理 2 P_f 可扩充为 $\bar{D}$ 上的连续函数,且 $P_f|_{\partial D} \equiv 1$.

注: 此引理对无穷 Blaschke 积不成立.

引理 3 $f \in \mathcal{B}(D)$, 则 P_f 有下列性质:

1) P_f 是 $D-\Sigma$ 中的 C^2 正函数 (Σ 是 f 的临界点 $z_1, \dots, z_r$ 的集合), 在 $z_v \in \Sigma$ 的附近, P_f 可表为

$$P_f = |z - z_v|^{m_v} P_v(z),$$

其中 $P_v(z)$ 是 D 中的 C^2 正函数.

2) 在 $D-\Sigma$ 中, P_f 满足微分方程

$$\frac{(1 - z\bar{z})^2}{4} \Delta \log P_f = P_f^2 - 1. \quad (1)$$

3) P_f 在 $\bar{D}$ 上连续, $P_f|_{\partial D} \equiv 1$.

引理 4 给定 $z_1, \dots, z_r \in D$ 及正整数 $m_1, \dots, m_r > 0$, 则满足引理 3 中各条件的 C^2 函数 P 至多有一个.

利用引理 4, 可以证明:

引理 5 设 $f, g \in \mathcal{B}(D)$, 若 f, g 有相同的临界点(重数在内), 则 $f = \sigma \circ g$, $\sigma \in \text{Aut}(D)$.

这个引理的证明要用到下列事实, 设 f 把 D 中一区域 U 映到 D 中, 若 $P_f \equiv 1$, 则 $f = \sigma/v$, $\sigma \in \text{Aut}(D)$.

二、对称积及存在性定理

设 x 为任意拓扑空间, 置换群在 x^n (x 的 n 重自乘积) 上的作用的商空间^[1]记为 $SP^n(x)$ 叫做 x 的 n 重对称积. 由代数方程根与系数的关系定理可得

引理 6 $SP^n(D) \approx SP^n(\mathbb{C}) \approx \mathbb{C}^n$ ($\approx$ 是同胚)

下面的引理的证明则要借助 Brower 的区域不变原理^[8]及 proper 映照的闭性^[1].

引理 7 设 M, N 是两个维数相同的连通的拓扑流形, 则映照 $r: M \rightarrow N$ 是同胚的充分必要条件是 r 是 1-1 的而且 proper.

$\text{Aut}(D)$ 作用在 $\mathcal{B}(D)$ 上, $(\sigma, f) \mapsto \sigma \circ f$. 显然, f 与 $\sigma \circ f$ 有相同的临界点, 而且适当选取 σ , 可使 f 变为

$$g = z \prod_{v=1}^n \frac{z - a_v}{1 - \bar{a}_v z},$$

如果 $b_1, \dots, b_n$ 是 g 在 D 中的临界点 (b 可重复), 则 $\{a_1, \dots, a_n\} \mapsto \{b_1, \dots, b_n\}$ 定义一映照

$$r: SP^n(D) \rightarrow SP^n(D).$$

引理 8 r 是 proper 的.

由引理 5 和 8 我们得 (r 是 1-1 是显然的)

定理 A 任给 $z_1, \dots, z_n \in D$, 则存在 $g \in \mathcal{B}(D)$, 使得 g 的临界点恰为 $z_1, \dots, z_n$. 且这样的 g 在差 D 的一自同构作用下唯一确定.

三、对方程 $\Delta u = e^{2u}$ 的应用

容易验证, 做代换 $u = \log \frac{2P}{1-z\bar{z}}$, 则方程 (1) 化为方程

$$\Delta u = e^{2u}. \quad (2)$$

由定理 A 及引理 3 和引理 5 我们得到

定理 B 任给 D 中 r 个不同点 $z_1, \dots, z_r$ 及正整数 $m_1, \dots, m_r$, 方程 $\Delta u = e^{2u}$ 在 D 中有唯一解 u 满足条件:

1) 在 z_i 附近, $u = m_i \log |z - z_i| + C^\infty$ 函数;

2) $|z| \rightarrow 1$ 时 $u + \log(1 - |z|) \rightarrow 0$,

而且, u 可表为 $u = \log \frac{2|g'|}{1-g\bar{g}}$, $g \in \mathcal{B}(D)$.

反之, 任给 $\Delta u = e^{2u}$ 的 C^2 解 u , 则度量 $ds^2 = e^{2u} dz d\bar{z}$ 曲率为 -1 . 但由微分几何的 Minding 定理, 任二常曲率为 C 的空间局部同尺. 再注意到复平面上两区域之间的 C^2 共形映照必是复解析的, 因此得

引理 9 设 u 是 $\Delta u = e^{2u}$ 在平面上一区域 G 中的解, 则 G 中每一点都有一充分小的邻域, 使得在此邻域中 u 可表为

$$u = \log \frac{2|g'|}{1-g\bar{g}},$$

g 是此邻域中的解析函数, $|g| < 1$.

利用引理 9 及解析开拓的单值化 (Monodromy) 定理可以证明

引理 10 设 G 是复平面上的单连通区域, u 是方程 $\Delta u = e^{2u}$ 在域 G 中的 C^2 解, 则存在解析映照 $g: G \rightarrow D$, 使得

$$u = \log \frac{2|g'|}{1-g\bar{g}}.$$

由 Liouville 定理, 立刻推出

定理 C $\Delta u = e^{2u}$ 在整个平面上无 C^2 解.

致谢: 本文完成后, W. K. Hayman 教授来信指出定理 A 包含在 M. Heins 1961 年的一个更广的结果中(见 *Nagoya Math. J.*, 21 (1962), pp. 1—50), 作者在此对 Hayman 教授表示谢意.

参 考 文 献

- [1] Bourbaki, N., *General Topology*, Addison-Wesley, 1966.
- [2] 彭家贵, 中国科学, 1977, 4, 301.
- [3] Witten, Z., *Physical Review Letters*, 38 (1977), No. 3.
- [4] Wittich, H., *Math. Z.*, 49 (1944), 579—582.
- [5] Heins, M., *Selected Topics in the Classical Theory of Functions of a Complex Variable*, Holt, Reinhardt and Winston Inc., 1962.
- [6] Walsh, J. L., *The Location of Critical Points of Analytic and Harmonic Functions*, AMS Colloquium Pub., V. 34, 1950.
- [7] Marden, M., *Amer. Math. Society*, 1949.
- [8] Spanier, E., *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966.

ON THE CRITICAL POINTS OF FINITE BLASCHKE PRODUCTS AND THE EQUATION $\Delta u = e^{2u}$

WANG QI-MING (王启明) AND PENG JIA-GUI (彭家贵)

ABSTRACT

A Blaschke product is a boundary preserving analytic mapping of the unit disk into itself. It has been proved that a Blaschke product is uniquely determined up to an automorphism of the disk by its critical points (counted with multiplicity). As a consequence, it comes to the conclusion that the equation $\Delta u = e^{2u}$ in the disk has a unique solution with a finite number of logarithmic singularities in the disk and tends to infinity right on the boundary.