p -扭转刚度和 p -Laplace 算子的第一特征值

献给胡和生教授 90 华诞

夏昌玉

Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília-DF 70910-900, Brasil

E-mail: xia@mat.unb.br

收稿日期: 2017-09-28; 接受日期: 2018-01-19; 网络出版日期: 2018-04-12

摘要 给定 $\mathbb{R}^n$ 中具有有限测度的开集 Ω , 其测度记为 $|\Omega|$. 设 $T_p(\Omega)$ 和 $\lambda_{1,p}(\Omega)$ 分别为 Ω 的 p -扭转刚度和 p -Laplace 算子的第一 Dirichlet 特征值, $p \geq 2$. 本文将证明存在正常数 $C(n, p)$ 和 $\alpha(n, p)$ 使得

$$\frac{T_p(\Omega)\lambda_{1,p}(\Omega)}{|\Omega|^{p-1}} \leq 1 - C(n, p) \frac{(T_p(\Omega))^{\frac{1}{p-1}}}{|\Omega|^{\alpha(n, p)}};$$

当 $p > 2$ 时,

$$\frac{T(\Omega)S_p(\Omega)}{|\Omega|^{2-\frac{2}{p}}} \leq \frac{1}{1 + \frac{2n\omega_n^{2/n}}{n+2} \frac{T(\Omega)}{|\Omega|^{1+\frac{2}{n}}}},$$

其中 $T(\Omega)$ 和 $S_p(\Omega)$ 分别为 Ω 的扭转刚度和 p -Sobolev 常数.**关键词** 扭转刚度 p -Laplace 算子 特征值**MSC (2010) 主题分类** 49J45, 49R05, 35P15, 47A75

1 引言

设 Ω 为 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中具有有限测度 $|\Omega|$ 的开集. Ω 的扭转刚度和 Laplace 算子的关于 Dirichlet 边界条件的第一特征值分别由下面的公式给出:

$$T(\Omega) = \min_{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{(\int_{\Omega} u dx)^2}{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}, \quad \lambda_1(\Omega) = \min_{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} |u|^2 dx}.$$

众所周知, 在有相同体积的集合中, λ_1 在球体上达到最小值 (Faber-Krahn 不等式), T 在球体上达到最大值 (Saint-Venant 定理). Pólya 和 Szegő^[1] 猜测, 在有相同扭转刚度的集合中, λ_1 在球体上达到最小值. 通过使用事实

$$\lambda_1(t\Omega) = t^{-2}\lambda_1(\Omega), \quad T(t\Omega) = t^{n+2}T(\Omega), \quad t > 0, \quad (1.1)$$

英文引用格式: Xia C Y. p -Torsional rigidity and the first eigenvalue of the p -Laplace operator (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 827–834, doi: 10.1360/N012017-00211

我们知道, Pólya 和 Szegő 的猜测是指下面的不等式成立:

$$T(\Omega)^{\frac{n}{n+2}} \lambda_1(\Omega) \geq T(B)^{\frac{n}{n+2}} \lambda_1(B), \quad (1.2)$$

其中 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的任何球体. (1.2) 最终被 Kohler-Jobin 在文献 [2, 3] 中证明是成立的. 需要说明的是, 如果将 $\lambda_1(\Omega)$ 由其他任何最佳 Poincaré-Sobolev 常数代替, 类似不等式依然成立. 也就是说, 在有相同扭转刚度的集合中, 下面的量:

$$\min_{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\Omega} |u|^p dx\right)^{\frac{2}{p}}}, \quad 1 < p < 2^* = \frac{2n}{n-2} \quad (1.3)$$

在球体上达到.

另一方面, 一个由 Pólya 在文献 [1] 的第 109 页中证明的经典不等式告诉我们, 由下式定义的函数 F :

$$F(\Omega) = \frac{T(\Omega) \lambda_1(\Omega)}{|\Omega|} \quad (1.4)$$

满足

$$F(\Omega) \leq 1. \quad (1.5)$$

这个不等式最近被 van den Berg 等 [4] 改进. 事实上, 他们证明了

$$F(\Omega) \leq 1 - \frac{2n\omega_n^{2/n}}{n+2} \frac{T(\Omega)}{|\Omega|^{1+\frac{2}{n}}}, \quad (1.6)$$

其中 ω_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球体的体积. 本文将证明关于 Ω 的 p -Laplace 算子的第一特征值和 p -扭转刚度的不等式, 从而推广 (1.6). 在叙述这个结果之前, 我们先列出一些必要的记号. 设 $1 < p < \infty$, Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中具有有限测度的开集, $W_0^{1,p}(\Omega)$ 为 $C_0^\infty(\Omega)$ 关于模 $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ 的闭包, Δ_p 为由下式给出的非线性 p -Laplace 算子:

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u).$$

Δ_p 的第一 Dirichlet 特征值为

$$\lambda_{1,p}(\Omega) = \min_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx}{\int_{\Omega} |u|^p dx}. \quad (1.7)$$

需要说明的是, 上面的 Rayleigh 商的一极小化子是下面方程的一个非平凡解:

$$-\Delta_p u(x) = \mu(|u|^{p-2} u)(x), \quad x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.8)$$

其中 $\mu = \lambda_{1,p}(\Omega)$.

Ω 的 p -扭转刚度为

$$T_p(\Omega) = \min_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\left(\int_{\Omega} |u| dx\right)^p}{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx}. \quad (1.9)$$

本文的第一个结果可以叙述如下:

定理 1.1 设 $p \geq 2$, Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中具有有限测度 $|\Omega|$ 的开集, 则下面的式子成立:

$$\frac{T_p(\Omega)\lambda_{1,p}(\Omega)}{|\Omega|^{p-1}} \leq 1 - \frac{p^{\frac{2p-3}{p-1}}(n\omega_n^{1/n})^{\frac{p}{p-1}}}{n(p-1)(n(p-1)+p)} \cdot \frac{(T_p(\Omega))^{\frac{1}{p-1}}}{|\Omega|^{\frac{n(p-1)+p}{n(p-1)}}}. \quad (1.10)$$

对于 $\mathbb{R}^n$ 中具有有限测度的开集 Ω 和 $p \geq 1$, 称

$$S_p(\Omega) = \min_{u \in L^p(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{(\int_{\Omega} u^p)^{2/p}} \quad (1.11)$$

为 Ω 的 p -Sobolev 常数. 当 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中光滑有界区域时, Carroll 和 Ratzkin^[5] 证明了, 对每个 $p \geq 1$, 泛函

$$\mathbf{F}_p(u) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{(\int_{\Omega} u^p)^{2/p}} \quad (1.12)$$

在 $u \in L^p(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的临界点满足方程

$$\Delta u + \Lambda u^{p-1} = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

其中 Λ 为某特定的常数. 本文得到下面的定理:

定理 1.2 设 $p > 2$, Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中具有有限测度 $|\Omega|$ 的开集, 则

$$\frac{T(\Omega)S_p(\Omega)}{|\Omega|^{2-\frac{2}{p}}} \leq \frac{1}{1 + \frac{2n\omega_n^{2/n}}{n+2} \frac{T(\Omega)}{|\Omega|^{1+\frac{2}{n}}}}. \quad (1.13)$$

2 结果的证明

本节将证明本文的主要结果.

定理 1.1 的证明 设 $u_{\Omega} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 为下面方程的唯一弱解:

$$-\Delta_p u = 1, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.1)$$

也就是说, u_{Ω} 满足

$$\int_{\Omega} \langle |\nabla u_{\Omega}|^{p-2} \nabla u_{\Omega}, \nabla \phi \rangle dx = \int_{\Omega} \phi dx, \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (2.2)$$

由经典结果可知, u_{Ω} 在 Ω 中是正的. 我们有 (参见文献 [6, (2.4)])

$$T_p(\Omega) = \left(\int_{\Omega} u_{\Omega} dx \right)^{p-1}. \quad (2.3)$$

从 (1.7) 可知,

$$\lambda_{1,p}(\Omega) \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla u_{\Omega}|^p dx}{\int_{\Omega} u_{\Omega}^p dx}. \quad (2.4)$$

将 $\phi = u_{\Omega}$ 代入 (2.2), 可得

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{\Omega}|^p dx = \int_{\Omega} u_{\Omega} dx. \quad (2.5)$$

所以,

$$T_p(\Omega)\lambda_{1,p}(\Omega) \leq \frac{(\int_{\Omega} u_{\Omega})^p}{\int_{\Omega} u_{\Omega}^p}. \quad (2.6)$$

设 $M = \sup_{\Omega} v_{\Omega}$. 对 $s \in [0, M]$, 定义

$$\mu(s) = |\{x \in \Omega : u_{\Omega} > s\}|.$$

容易知道

$$\int_{\Omega} u_{\Omega} = \int_0^M \mu(s) ds, \quad \int_{\Omega} u_{\Omega}^p dx = \int_0^M p s^{p-1} \mu(s) ds. \quad (2.7)$$

由于 u_{Ω} 满足 (2.1), 对 $s \in (0, M)$, 我们可以使用文献 [7] 中类似讨论推出

$$\mu(s) = \int_{u_{\Omega}(x)=s} |\nabla u_{\Omega}|^{p-1} d\mathcal{H}^{n-1} \quad (2.8)$$

和

$$-\mu'(s) \geq \int_{u_{\Omega}(x)=s} \frac{1}{|\nabla u_{\Omega}|} d\mathcal{H}^{n-1}. \quad (2.9)$$

对于一个可测集 A , 我们用 $P(A)$ 表示根据几何测度论所定义的 A 的周长 (参见文献 [8]). 将 Hölder 不等式应用到 $P(\{u_{\Omega} > s\}) = \int_{u_{\Omega}=s} d\mathcal{H}^{n-1}$, 可得

$$P(\{u_{\Omega} > s\})^p \leq \left(\int_{u_{\Omega}=s} |\nabla u_{\Omega}|^{\frac{1}{p-1}} d\mathcal{H}^{n-1} \right)^{p-1} (-\mu'(s)) \quad (2.10)$$

和

$$\int_{u_{\Omega}=s} |\nabla u_{\Omega}|^{\frac{1}{p-1}} d\mathcal{H}^{n-1} \leq \left(\int_{u_{\Omega}=s} |\nabla u_{\Omega}|^{p-1} d\mathcal{H}^{n-1} \right)^{\frac{1}{(p-1)^2}} P(\{u_{\Omega} > s\})^{1 - \frac{1}{(p-1)^2}}. \quad (2.11)$$

结合 (2.10) 和 (2.11), 我们得到

$$P(\{u_{\Omega} > s\})^{\frac{p}{p-1}} \leq (\mu(s))^{\frac{1}{p-1}} (-\mu'(s)). \quad (2.12)$$

等周不等式告诉我们,

$$P(\{u_{\Omega} > s\}) \geq n\omega_n^{1/n} \mu(s)^{(n-1)/n}. \quad (2.13)$$

由 (2.12) 和 (2.13), 有

$$(n\omega_n^{1/n})^{\frac{p}{p-1}} \leq -\mu(s)^{\frac{n-np+p}{n(p-1)}} \mu'(s). \quad (2.14)$$

将 (2.14) 积分, 我们得到

$$\begin{aligned} \mu(s) &\leq \left(|\Omega|^{\frac{p}{n(p-1)}} - (n\omega_n^{1/n})^{\frac{p}{p-1}} \cdot \frac{p}{n(p-1)} s \right)^{\frac{n(p-1)}{p}} \\ &= |\Omega|(1 - bs)^a, \end{aligned} \quad (2.15)$$

其中

$$a = \frac{n(p-1)}{p}, \quad b = (n\omega_n^{1/n})^{\frac{p}{p-1}} \cdot \frac{p}{n(p-1)} \cdot |\Omega|^{-\frac{1}{a}}. \quad (2.16)$$

定义 $F: [0, M] \rightarrow \mathbb{R}$ 如下:

$$F(t) = \left(\int_0^t \mu(s) ds \right)^p - p \left(\int_0^t s^{p-1} \mu(s) ds \right) |\Omega|^{p-1}.$$

从 (2.15) 和 (2.16), 可得

$$\begin{aligned} F'(t) &= p \left(\left(\int_0^t \mu(s) ds \right)^{p-1} - t^{p-1} |\Omega|^{p-1} \right) \mu(t) \\ &\leq p |\Omega|^{p-1} \left(\left(\frac{1}{b(a+1)} (1 - (1-bt)^{a+1}) \right)^{p-1} - t^{p-1} \right) \mu(t). \end{aligned} \quad (2.17)$$

由于 $2 \leq p$, 使用不等式 $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x + x^2$, $\alpha \geq 2$, $x \geq -1$ 可以得到

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq p |\Omega|^{p-1} \left(\left(t - \frac{bt^2}{(a+1)} \right)^{p-1} - t^{p-1} \right) \mu(t) \\ &= p |\Omega|^{p-1} t^{p-1} \left(\left(1 - \frac{bt}{(a+1)} \right)^{p-1} - 1 \right) \mu(t) \\ &\leq p |\Omega|^{p-1} t^{p-1} \left(\left(1 - \frac{bt}{(a+1)} \right) - 1 \right) \mu(t) \\ &= -\frac{pb |\Omega|^{p-1} t^p \mu(t)}{(a+1)}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

将上式在 $[0, M]$ 上积分并注意到 $F(0) = 0$ 再使用 Hölder 不等式, 我们有

$$\begin{aligned} F(M) &\leq -\frac{pb |\Omega|^{p-1}}{(a+1)} \int_0^M t^p \mu(t) dt \\ &\leq -\frac{pb |\Omega|^{p-1}}{(a+1)} \cdot \frac{(\int_0^M t^{p-1} \mu(t) dt)^{p/(p-1)}}{(\int_0^M \mu(t) dt)^{1/(p-1)}} \\ &= -\frac{b |\Omega|^{p-1}}{(a+1)} \cdot \frac{(\int_\Omega u_\Omega^p)^{p/(p-1)}}{p^{\frac{1}{p-1}} (\int_\Omega u_\Omega)^{1/(p-1)}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

从 (2.3)、(2.16)、(2.19) 和 Hölder 不等式可以得到

$$\begin{aligned} \frac{(\int_\Omega u_\Omega)^p}{(\int_\Omega u_\Omega^p) |\Omega|^{p-1}} - 1 &\leq -\frac{b}{(a+1)p^{\frac{1}{p-1}}} \cdot \left(\frac{\int_\Omega u_\Omega^p}{\int_\Omega u_\Omega} \right)^{1/(p-1)} \\ &\leq -\frac{b}{(a+1)p^{\frac{1}{p-1}}} \cdot \frac{\int_\Omega u_\Omega}{|\Omega|} \\ &= -\frac{p^{\frac{2p-3}{p-1}} (n\omega_n^{\frac{1}{n}})^{\frac{p}{p-1}}}{n(p-1)(n(p-1)+p)} \cdot \frac{(T_p(\Omega))^{\frac{1}{p-1}}}{|\Omega|^{1+\frac{p}{n(p-1)}}}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

定理得证. □

定理 1.2 的证明 我们将使用证明定理 1.1 的类似方法. 设 $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 为 Ω 的扭转函数. 也就是说, u 为下面方程的唯一解:

$$-\Delta z = 1, \quad z \in W_0^{1,2}(\Omega). \quad (2.21)$$

Ω 的扭转刚度为

$$T(\Omega) = \int_{\Omega} u dx. \quad (2.22)$$

由 (1.11), 有

$$S_p(\Omega) \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\Omega} u^p dx\right)^{\frac{2}{p}}} = \frac{\int_{\Omega} u dx}{\left(\int_{\Omega} u^p dx\right)^{\frac{2}{p}}}. \quad (2.23)$$

因此,

$$T(\Omega) S_p(\Omega) \leq \frac{\left(\int_{\Omega} u dx\right)^2}{\left(\int_{\Omega} u^p dx\right)^{\frac{2}{p}}}. \quad (2.24)$$

设 $M = \sup_{\Omega} u$ 并且定义 $\eta: [0, M] \rightarrow \mathbb{R}$ 如下:

$$\eta(s) = |\{x \in \Omega : u > s\}|.$$

我们有

$$\int_{\Omega} u dx = \int_0^M \eta(s) ds, \quad \int_{\Omega} u^p dx = \int_0^M p s^{p-1} \eta(s) ds. \quad (2.25)$$

对 $\theta \in (0, M)$, 容易得到

$$\eta(\theta) = \int_{u=\theta} |\nabla u| d\mathcal{H}^{n-1} \quad (2.26)$$

和

$$-\eta'(\theta) \geq \int_{u=\theta} \frac{1}{|\nabla u|} d\mathcal{H}^{n-1}. \quad (2.27)$$

将 Hölder 不等式应用到 $P(\{u > \theta\}) = \int_{u=\theta} d\mathcal{H}^{n-1}$, 可得

$$P(\{u > \theta\})^2 \leq \eta(\theta)(-\eta'(\theta)). \quad (2.28)$$

由等周不等式, 有

$$P(\{u > \theta\}) \geq n \omega_n^{1/n} \eta(\theta)^{(n-1)/n}. \quad (2.29)$$

结合 (2.28) 和 (2.29) 有

$$n^2 \omega_n^{2/n} \leq -\eta(\theta)^{\frac{2}{n}-1} \eta'(\theta). \quad (2.30)$$

将此不等式积分, 可以推出

$$\eta(s) \leq (|\Omega|^{2/n} - 2n \omega_n^{2/n} s)^{n/2}, \quad s \in (0, M). \quad (2.31)$$

对 $t \in [0, M]$, 定义

$$G(t) = \left(\int_0^t \eta(s) ds \right)^2 - \left(\int_0^t p s^{p-1} \eta(s) ds \right)^{2/p} |\Omega|^{2-\frac{2}{p}}. \quad (2.32)$$

由于 $p \geq 2$, 从 (2.31) 和 $0 \leq \eta(\theta) \leq |\Omega|$ 可以得到

$$\begin{aligned} G'(t) &= 2\eta(t) \int_0^t \eta(s) ds - 2t^{p-1} \eta(t) \left(\int_0^t p s^{p-1} \eta(s) ds \right)^{(2-p)/p} |\Omega|^{2-\frac{2}{p}} \\ &\leq 2\eta(t) |\Omega| \int_0^t \left(1 - \frac{2n\omega_n^{2/n}}{|\Omega|^{2/n}} s \right)^{n/2} ds - 2t^{p-1} \eta(t) \left(|\Omega| \int_0^t p s^{p-1} ds \right)^{(2-p)/p} |\Omega|^{2-\frac{2}{p}} \\ &= \frac{|\Omega|^{1+\frac{2}{n}}}{n(n+2)\omega_n^{2/n}} \left(1 - \left(1 - \frac{2n\omega_n^{2/n}}{|\Omega|^{2/n}} t \right)^{1+\frac{n}{2}} \right) 2\eta(t) - 2t\eta(t) |\Omega|. \end{aligned} \quad (2.33)$$

使用不等式 $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x + x^2$, $\alpha \geq 2$, $x \geq -1$ 到上式中可以推出

$$G'(t) \leq -\frac{8n\omega_n^{2/n} |\Omega|^{1-\frac{2}{n}}}{n+2} t^2 \eta(t). \quad (2.34)$$

将 (2.34) 在 $[0, M]$ 上积分并使用 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned} G(M) &\leq -\frac{8n\omega_n^{2/n} |\Omega|^{1-\frac{2}{n}}}{n+2} \int_0^M t^2 \eta(t) dt \\ &\leq -\frac{2n\omega_n^{2/n} |\Omega|^{1-\frac{2}{n}}}{n+2} \frac{(\int_0^M 2t\eta(t) dt)^2}{\int_0^M \eta(t) dt} \\ &= -\frac{2n\omega_n^{2/n} |\Omega|^{1-\frac{2}{n}}}{n+2} \frac{(\int_\Omega u^2)^2}{\int_\Omega u} \\ &\leq -\frac{2n\omega_n^{2/n}}{n+2} \frac{(\int_\Omega u)^3}{|\Omega|^{1+\frac{2}{n}}}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

利用 G 的定义可以得到

$$\left(\frac{(\int_\Omega u)^2}{(\int_\Omega u^p)^{2/p} |\Omega|^{2-\frac{2}{p}}} - 1 \right) \leq -\frac{2n\omega_n^{2/n}}{n+2} \frac{T(\Omega)}{|\Omega|^{1+\frac{2}{n}}} \frac{(\int_\Omega u)^2}{(\int_\Omega u^p)^{2/p} |\Omega|^{2-\frac{2}{p}}}. \quad (2.36)$$

结合 (2.24) 和 (2.36) 即有

$$\frac{T(\Omega) S_p(\Omega)}{|\Omega|^{2-\frac{2}{p}}} \leq \frac{1}{1 + \frac{2n\omega_n^{2/n}}{n+2} \frac{T(\Omega)}{|\Omega|^{1+\frac{2}{n}}}}.$$

定理得证. □

参考文献

- 1 Pólya G, Szegő G. Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Annals of Mathematics Studies, vol. 27. Princeton: Princeton University Press, 1951
- 2 Kohler-Jobin M T. Symmetrization with equal Dirichlet integrals. SIAM J Math Anal, 1982, 13: 153–161

- 3 Kohler-Jobin M T. Une méthode de comparaison isopérimétrique de fonctionnelles de domaines de la physique mathématique. I. Une démonstration de la conjecture isopérimétrique $P\lambda^2 \geq \pi j_0^4/2$ de Pólya et Szegő. *Z Angew Math Phys*, 1978, 29: 757–766
- 4 van den Berg M, Ferone V, Nitsch C, et al. On Pólya’s inequality for torsional rigidity and first Dirichlet eigenvalue. *Integral Equations Operator Theory*, 2016, 86: 579–600
- 5 Carroll T, Ratzkin J. Interpolating between torsional rigidity and principal frequency. *J Math Anal Appl*, 2011, 379: 818–826
- 6 Brasco L. On torsional rigidity and principal frequencies: An invitation to the Kohler-Jobin rearrangement technique. *ESAIM Control Optim Calc Var*, 2014, 20: 315–338
- 7 Talenti G. Elliptic equations and rearrangements. *Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci* (5), 1976, 3: 473–483
- 8 Ambrosio L, Fusco N, Pallara D. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. Oxford: University Press, 2000

p -Torsional rigidity and the first eigenvalue of the p -Laplace operator

Changyu Xia

Abstract Given an open set with finite measure Ω in $\mathbb{R}^n$, let $T_p(\Omega)$ and $\lambda_{1,p}(\Omega)$ be the p -torsional rigidity and the first Dirichlet eigenvalue of the p -Laplace operator of Ω , respectively and $p \geq 2$. We show that there exist positive constants $C(n, p)$ and $\alpha(n, p)$ such that

$$\frac{T_p(\Omega)\lambda_{1,p}(\Omega)}{|\Omega|^{p-1}} \leq 1 - C(n, p) \frac{(T_p(\Omega))^{\frac{1}{p-1}}}{|\Omega|^{\alpha(n,p)}}.$$

We also show that when $p > 2$,

$$\frac{T(\Omega)S_p(\Omega)}{|\Omega|^{2-\frac{2}{p}}} \leq \frac{1}{1 + \frac{2n\omega_n^{2/n}}{n+2} \frac{T(\Omega)}{|\Omega|^{1+\frac{2}{n}}}},$$

where $T(\Omega)$ and $S_p(\Omega)$ are the torsional rigidity and the p -Sobolev constant of Ω , respectively.

Keywords torsional rigidity, p -Laplace operator, eigenvalue

MSC(2010) 49J45, 49R05, 35P15, 47A75

doi: 10.1360/N012017-00211