BMOA 和 VMOA 空间上的紧复合算子

乌兰哈斯

(汕头大学数学系, 汕头 515063)

摘要 给出了 BMOA 空间上复合算子紧性的一个简单的充分必要条件. 利用所给出的结果可以得到 BMOA 空间上紧复合算子必是 Bloch 空间和 Hardy 空间上的紧复合算子. 文中也给出了 VMOA 空间上的类似结果.

关键词 复合算子 紧算子 BMOA VMOA

MSC(2000) 主题分类 47B38 30D50

1 引言

设 $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的单位圆盘, φ 是 $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ 上的解析自映射. 由 φ 可以在 $\mathbb{D}$ 上的解析函数空间上定义一个线性复合算子 $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$. 近年来, 研究由解析函数组成的各种 Banach 空间上复合算子 C_φ 的紧性问题十分活跃, 得到很多深刻结论.

目前在研究 BMOA 空间 (有界平均振动的函数空间) 上复合算子 C_φ 的紧性方面有两个结果, 一是属于 Bourdon 和 Cima 及 Matheson^[1]. 他们的紧性条件 (见文献 [1] 中定理 3.1) 不仅依赖于映射 φ 而且还依赖于 BMOA 函数的一个特殊条件. 一个自然的想法是去掉该条件使其仅与 φ 有关. 另外一个结果是 Smith^[2] 给出的, 他的紧性条件仅与 φ 有关但很繁杂, 很难用于具体的判定 (见文献 [2] 中定理 1.1). Smith 的紧性条件包括两个部分, 一个是由 Nevanlinna 记数函数给出的, 另一个建立在单位圆周 $\partial\mathbb{D}$ 上一个可测集的 Lebesgue 测度的估计.

本文的主要结果是给出了 BMOA 空间上复合算子 C_φ 的一个新的紧性条件. 我们的紧性条件仅依赖于映射 φ , 而且简单、直观, 可操作性强. 从我们的结果可以直接得到: 如果 C_φ 是 BMOA 上的紧算子, 那么 C_φ 一定是 Bloch 空间和 Hardy 空间的紧算子.

2 BMOA 空间上的紧复合算子

$\mathbb{D}$ 上解析函数 f 属于 Hardy 空间 H^p ($0 < p \leq \infty$), 如果

$$\|f\|_{H^p}^p = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty, \quad 0 < p < \infty,$$

收稿日期: 2006-04-12; 接受日期: 2007-02-05

国家自然科学基金 (批准号: 10371069, 10671115), 教育部博士点基金 (批准号: 20060560002) 和广东省自然科学基金 (批准号: 06105648) 资助项目

E-mail: wulan@stu.edu.cn

$$\|f\|_{H^\infty} = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| < \infty, \quad p = \infty.$$

对于 $a \in \mathbb{D}$, 令 $\sigma_a(z) = (a - z)/(1 - \bar{a}z)$. $f \in H^2$ 属于 BMOA, 如果满足

$$\|f\|_* = \sup_{a \in \mathbb{D}} \|f \circ \sigma_a - f(a)\|_{H^2} < \infty.$$

易见 BMOA 是一个 Banach 空间, 其范数是 $\|f\|_{\text{BMOA}} = |f(0)| + \|f\|_*$. 从文献 [3] 可知

$$\|f\|_* \approx \sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 (1 - |\sigma_\lambda(z)|^2) dA(z),$$

其中 $dA(z) = dx dy$ 是 $\mathbb{D}$ 上的 Lebesgue 面积测度. 设 I 是 $\partial\mathbb{D}$ 上的弧, 用 $R(I)$ 表示 Carleson 方块

$$R(I) = \left\{ re^{i\theta} \in \mathbb{D} : 1 - \frac{|I|}{2\pi} < r < 1, e^{i\theta} \in I \right\}.$$

Carleson 的一个著名结果 [4] 是: $\mathbb{D}$ 上的一个有限正测度 μ 是 Carleson 测度当且仅当对所有 $f \in H^2$ 成立

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \mu(z) \leq C \|\mu\|^2 \|f\|_{H^2}^2,$$

其中

$$\|\mu\| = \sup \left\{ \frac{\mu(R(I))}{|I|} \right\}.$$

对于 $0 < r < 1$, 定义 $\Omega_r = \{z \in \mathbb{D} : |\varphi(z)| > r\}$ 且 $1_{\Omega_r}(z)$ 表示 Ω_r 上的特征函数.

Bourdon 等利用 Carleson 测度研究了 BMOA 空间上的紧复合算子, 他们的结果 (文献 [1] 中定理 3.1) 可以写成以下形式:

定理 A [1] 设 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的解析自映射. 复合算子 C_φ 在 BMOA 上是紧的充分必要条件是: 对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $r(0 < r < 1)$, 使得

$$\int_{R(I)} 1_{\Omega_r}(z) (1 - |z|^2) |f'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2 dA(z) \leq \epsilon |I| \quad (2.1)$$

对所有弧 $I \in \partial\mathbb{D}$ 和所有满足 $\|f\|_{\text{BMOA}} \leq 1$ 的 BMOA 函数 f 成立.

Smith 在文献 [2] 中考虑了同样的问题, 他用到了 $\mathbb{D}$ 上映射 φ 的 Nevanlinna 记数函数

$$N(\varphi, w) = \sum_{\varphi(z)=w} \log(1/|z|), \quad w \in \mathbb{D} \setminus \{\varphi(0)\}.$$

在他的紧性条件中去掉了有关对 BMOA 的约束, 而是仅仅依赖于 φ .

定理 B [2] 设 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的解析自映射. 复合算子 C_φ 在 BMOA 上是紧的充分必要条件是

- (i) $\lim_{|\varphi(a)| \rightarrow 1} \sup_{0 < |w| < 1} |w|^2 N(\sigma_{\varphi(a)} \circ \varphi \circ \sigma_a, w) = 0$;
- (ii) 对所有的 R ($0 < R < 1$), $\lim_{t \rightarrow 1} \sup_{\{a: |\varphi(a)| \leq R\}} m(\sigma_a(E(\varphi, t))) = 0$.

这里 $E(\varphi, t) = \{e^{i\theta} : |\varphi(e^{i\theta})| > t\}$ ($0 < t < 1$), 其中 $m(A)$ 表示 $\partial\mathbb{D}$ 上集合 A 的 Lebesgue 一维测度.

我们知道 BMOA 上的紧算子一定是 Hardy 空间上的紧算子, 这样从定理 B 中的条件 (i) 和 (ii) 一定能推出

$$\lim_{|w| \rightarrow 1} \frac{N(\varphi, w)}{\log(1/|w|)} = 0,$$

后者是 C_φ 为 H^2 上紧算子的充分必要条件; 有关结果可见文献 [5, 6]. 然而, 从 Smith 的紧性条件并不容易看到这点, 正如 Smith 本人在文献 [2] 中所述 “还没有能力从条件 (i) 和 (ii) 得到 C_φ 为 H^2 上紧算子的一个直接证明”.

下面是本文的主要结果, 它提供了一个新的而且是简单的紧性条件, 并且可以容易地得到 BMOA 上的紧算子一定是 Hardy 空间上的紧算子. 本文借鉴了文献 [2] 中给出的方法, 并使其更加有效.

定理 2.1 设 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的解析自映射. 复合算子 C_φ 在 BMOA 上是紧的充要条件是

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi^n\|_* = 0$;

(ii) 对 $a \in \mathbb{D}$ 一致地有

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \int_{|\varphi(z)| > r} \frac{|\varphi'(z)|^2}{|1 - \bar{a}\varphi(z)|^2} (1 - |\sigma_\lambda(z)|^2) dA(z) = 0. \quad (2.2)$$

仔细阅读下面给出的定理 2.1 的证明, 我们可以得到如下 BMOA 空间上的紧复合算子的另一个可操作的特征:

定理 2.2 设 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的解析自映射. 复合算子 C_φ 在 BMOA 上是紧的充要条件是

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi^n\|_* = 0$;

(ii) $\lim_{|a| \rightarrow 1} \|C_\varphi \sigma_a\|_* = 0$.

Bloch 空间 $\mathcal{B}$ 是满足如下条件的 $\mathbb{D}$ 上解析函数 f 的全体:

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2) |f'(z)| < \infty.$$

利用条件 (2.2) 我们可以得到

推论 2.3 设 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的解析自映射. 如果复合算子 C_φ 在 BMOA 上是紧的, 则

(i) C_φ 在 Hardy 空间 H^2 上是紧的;

(ii) C_φ 在 Bloch 空间 $\mathcal{B}$ 上是紧的.

证明 (i) 因为 C_φ 在 H^2 上总是有界的, 所以 $\sup_{a \in \mathbb{D}} \|k_a(\varphi)\|_{H^2} < \infty$, 其中 $k_a(z) = \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-\bar{a}z} \in H^2$. 由文献 [7] 只需证明

$$\|C_\varphi k_a\|_{H^2} = \|k_a(\varphi)\|_{H^2} \rightarrow 0, \quad |a| \rightarrow 1^-.$$

由简单计算可知

$$\begin{aligned} \|C_\varphi k_a\|_{H^2}^2 &\approx |k_a \circ \varphi(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2) |(k_a \circ \varphi(z))'|^2 dA(z) \\ &= |k_a(\varphi(0))|^2 + \int_{\mathbb{D}} |a|^2 (1 - |z|^2) \frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}\varphi(z)|^4} |\varphi'(z)|^2 dA(z). \end{aligned}$$

由于 C_φ 是 BMOA 上的紧算子, 利用 (2.2) 式可知对任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在 $r (0 < r < 1)$, 使得对于所有 $a \in \mathbb{D}$, 有

$$\int_{R(I)} 1_{\Omega_r}(z) (1 - |z|^2) \frac{|a|^2 |\varphi'(z)|^2}{|1 - \bar{a}\varphi(z)|^2} dA(z) \leq \epsilon |I|.$$

这样, 存在 $\rho \in (0, 1)$ 对于 $\rho < |a| < 1$ 得到 $|k_a(\varphi(0))| < \epsilon$ 和

$$\int_{\{|\varphi(z)| \leq r\}} (1 - |z|^2) \frac{|a|^2 (1 - |a|^2)}{|1 - \bar{a}\varphi(z)|^4} |\varphi'(z)|^2 dA(z) \leq \frac{1 - |a|^2}{(1 - r)^4} \|\varphi\|_{H^2}^2 \leq \epsilon \|\varphi\|_{H^2}^2. \quad (2.3)$$

下面估计

$$\int_{\{|\varphi(z)| > r\}} |a|^2 (1 - |z|^2) \frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}\varphi(z)|^4} |\varphi'(z)|^2 dA(z).$$

令

$$d\mu_{r,a}(z) = 1_{\Omega_r}(z)(1 - |z|^2) \frac{|a|^2 |\varphi'(z)|^2}{|1 - \bar{a}\varphi(z)|^2} dA(z).$$

由文献 [3, p. 239] 中引理 3.3 知道从 (2.2) 式可得出对于给定的 $r \in (0, 1)$, 微分形式 $\mu_{r,a}$ 是一个 Carleson 测度, 并且对所有 $a \in \mathbb{D}$ 满足 $\|\mu_{r,a}\| \leq \epsilon$, 从而有

$$\begin{aligned} & \int_{\{|\varphi(z)| > r\}} |a|^2 (1 - |z|^2) \frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}\varphi(z)|^4} |\varphi'(z)|^2 dA(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}\varphi(z)|^2} d\mu_{r,a}(z) \\ &= \|k_a(\varphi)\|_{L^2(\mu_{r,a})}^2 \leq C\epsilon^2 \|k_a(\varphi)\|_{H^2}^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

结合 (2.3) 和 (2.4) 式, 有 $\|C_\varphi k_a\|_{H^2} \rightarrow 0$ 当 $|a| \rightarrow 1^-$, 这意味着 C_φ 在 H^2 上是紧的.

(ii) 容易看出, 由定理 2.2 的条件 (ii) 可以推得 $\lim_{|\lambda| \rightarrow 1} \|C_\varphi \sigma_\lambda\|_{\mathcal{B}} = 0$, 因为 $\|C_\varphi \sigma_\lambda\|_{\mathcal{B}} \leq \|C_\varphi \sigma_\lambda\|_*$. 这样, 由 Tjani 关于 Bloch 空间 $\mathcal{B}$ 紧算子的条件 [8], 我们完成了证明.

3 定理 2.1 的证明

在开始证明前, 先陈述在证明中将要用到的如下引理:

引理 3.1 [5] 设 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的解析自映射. 如果 $0 < r < |\varphi(0)|$, 则

$$N(\varphi, 0) \leq \frac{1}{r^2} \int_{|z| < r} N(\varphi, z) dA(z).$$

先证必要性. 假设 C_φ 是 BMOA 上的紧算子. 因为函数族 $\{\log(1 - \bar{a}z)\}$ 在 BMOA 中是有界的, 由定理 A 知道, 对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在 $r(0 < r < 1)$, 使得

$$\int_{R(I)} 1_{\Omega_r}(z)(1 - |z|^2) \frac{|a|^2 |\varphi'(z)|^2}{|1 - \bar{a}\varphi(z)|^2} dA(z) \leq \epsilon |I|$$

对于 $\partial\mathbb{D}$ 上的弧 I 和 $a \in \mathbb{D}$ 一致成立, 从而得到

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} 1_{\Omega_r}(z) \frac{|a|^2 |\varphi'(z)|^2}{|1 - \bar{a}\varphi(z)|^2} (1 - |\sigma_\lambda(z)|^2) dA(z) \leq \epsilon$$

对 $a \in \mathbb{D}$ 一致成立, 故 (ii) 成立.

因为 $\{z^n\}$ 在 BMOA 中有界, 并且在 $\mathbb{D}$ 中的任意紧集上一致收敛于 0, 由 C_φ 是 BMOA 上的紧算子的条件可以得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi^n\|_* = 0$. 这意味着 (i) 成立.

下面证明充分性. 首先证明从 (ii) 可以得到 $\lim_{|a| \rightarrow 1} \|C_\varphi \sigma_a\|_* = 0$. 事实上, 由 (ii) 对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在 $r(0 < r < 1)$, 使得

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \int_{|\varphi(z)| > r} \frac{|\varphi'(z)|^2}{|1 - \bar{a}\varphi(z)|^2} (1 - |\sigma_\lambda(z)|^2) dA(z) < \epsilon$$

对 $a \in \mathbb{D}$ 一致成立. 记

$$\begin{aligned} \|C_\varphi \sigma_a\|_*^2 &\approx \sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |a|^2)^2 |\varphi'(z)|^2}{|1 - \bar{a}\varphi(z)|^4} (1 - |\sigma_\lambda(z)|^2) dA(z) \\ &= \sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \left(\int_{\{|\varphi(z)| > r\}} + \int_{\{|\varphi(z)| \leq r\}} \right) \frac{(1 - |a|^2)^2 |\varphi'(z)|^2}{|1 - \bar{a}\varphi(z)|^4} (1 - |\sigma_\lambda(z)|^2) dA(z) \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

容易得到

$$\begin{aligned} I_2 &= \sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \int_{\{|\varphi(z)| \leq r\}} \frac{(1-|a|^2)^2 |\varphi'(z)|^2}{|1-\bar{a}\varphi(z)|^4} (1-|\sigma_\lambda(z)|^2) dA(z) \\ &\leq \frac{(1-|a|^2)^2}{(1-r)^4} \|\varphi\|_*^2 \rightarrow 0, \quad |a| \rightarrow 1. \end{aligned}$$

由假设可得

$$\begin{aligned} I_1 &= \sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \int_{\{|\varphi(z)| > r\}} \frac{(1-|a|^2)^2 |\varphi'(z)|^2}{|1-\bar{a}\varphi(z)|^4} (1-|\sigma_\lambda(z)|^2) dA(z) \\ &\leq \sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \int_{\{|\varphi(z)| > r\}} \frac{|\varphi'(z)|^2}{|1-\bar{a}\varphi(z)|^2} (1-|\sigma_\lambda(z)|^2) dA(z) < \epsilon, \end{aligned}$$

因此

$$\|C_\varphi \sigma_a\|_*^2 \approx \sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|a|^2)^2 |\varphi'(z)|^2}{|1-\bar{a}\varphi(z)|^4} (1-|\sigma_\lambda(z)|^2) dA(z) \rightarrow 0, \quad |a| \rightarrow 1^-.$$

现在证明: 由条件 $\lim_{|a| \rightarrow 1} \|C_\varphi \sigma_a\|_* = 0$ 可以推得定理 B 中的条件 (i) 成立. 如果不是这样, 有

$$\lim_{|\varphi(a)| \rightarrow 1} \sup_{0 < |w| < 1} |w|^2 N(\sigma_{\varphi(a)} \circ \varphi \circ \sigma_a, w) \neq 0.$$

存在 $\epsilon_0 > 0$ 和点列 $w_n, a_n \in \mathbb{D}$ 满足 $|\varphi(a_n)| \rightarrow 1$, 使得

$$|\sigma_{\varphi(a_n)}(w_n)|^2 N(\sigma_{\varphi(a_n)} \circ \varphi \circ \sigma_{a_n}, \sigma_{\varphi(a_n)}(w_n)) \geq \epsilon_0.$$

从 Littlewood 的从属定理可得

$$\epsilon_0 \leq |\sigma_{\varphi(a_n)}(w_n)|^2 \log \frac{1}{|\sigma_{\varphi(a_n)}(w_n)|}.$$

这表明, 如果 $u_n = \sigma_{\varphi(a_n)}(w_n)$, 则 $0 < |u_n| \leq R < 1$. 因为 $|\varphi(a_n)| \rightarrow 1$, 所以 $|w_n| \rightarrow 1$. 通过变量替换可得

$$\begin{aligned} \|C_\varphi \sigma_{w_n}\|_*^2 &= \sup_{a \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |\sigma'_{w_n}(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2 \log \frac{1}{|\sigma_a(z)|} dA(z) \\ &= \sup_{a \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |\sigma'_{w_n}(w)|^2 N(\varphi \circ \sigma_a, w) dA(w) \\ &\geq \int_{\mathbb{D}} |\sigma'_{w_n}(w)|^2 N(\varphi \circ \sigma_{a_n}, w) dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} N(\sigma_{w_n} \circ \varphi \circ \sigma_{a_n}, v) dA(v) \\ &\geq \int_{|v| < \frac{|u_n|}{2}} N(\sigma_{w_n} \circ \varphi \circ \sigma_{a_n}, v) dA(v). \end{aligned} \quad (3.1)$$

这里我们用到了记数函数在复合下的变换特征^[9]:

$$N(\varphi, \sigma_a(w)) = N(\sigma_a \circ \varphi, w), \quad a, w \in \mathbb{D}.$$

因为 $|\sigma_{w_n} \circ \varphi \circ \sigma_{a_n}(0)| = |\sigma_{w_n}(\varphi(a_n))| = |\sigma_{\varphi(a_n)}(w_n)| = |u_n| > 0$, 我们对 (3.1) 式利用引理 3.1 和 Nevanlinna 记数函数的次平均值特征得到

$$\begin{aligned} \|C_\varphi \sigma_{w_n}\|_*^2 &\geq \int_{|v| < \frac{|u_n|}{2}} N(\sigma_{w_n} \circ \varphi \circ \sigma_{a_n}, v) dA(v) \\ &\geq (1/4) |u_n|^2 N(\sigma_{w_n} \circ \varphi \circ \sigma_{a_n}, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1/4)|u_n|^2 N(\varphi \circ \sigma_{a_n}, w_n) \\
&= (1/4)|\sigma_{\varphi(a_n)}(w_n)|^2 N(\sigma_{\varphi(a_n)} \circ \varphi \circ \sigma_{a_n}, \sigma_{\varphi(a_n)}(w_n)) \\
&\geq (1/4)\epsilon_0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

这表明当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\|C_\varphi \sigma_{w_n}\|_* \neq 0$ 成立. 这一矛盾说明定理 B 中的条件 (i) 成立.

为了完成证明, 只要证得定理 B 中的条件 (ii) 成立即可. 由已知条件对每个 $R \in (0, 1)$ 有

$$\begin{aligned}
\|\varphi^n\|_*^2 &= \sup_{a \in \mathbb{D}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi^n(\sigma_a(e^{i\theta})) - \varphi^n(a)|^2 d\theta \\
&= \sup_{a \in \mathbb{D}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(\sigma_a(e^{i\theta}))|^{2n} d\theta - |\varphi(a)|^{2n} \\
&\geq \sup_{|\varphi(a)| \leq R} \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_a(E(\varphi, t))} |\varphi(\sigma_a(e^{i\theta}))|^{2n} d\theta - R^{2n} \\
&\geq \frac{1}{2\pi} \sup_{|\varphi(a)| \leq R} m(\sigma_a(E(\varphi, t))) t^{2n} - R^{2n},
\end{aligned}$$

其中 $\sigma_a(E(\varphi, t)) = \{e^{i\theta} : |\varphi(\sigma_a(e^{i\theta}))| > t\}$, 因此

$$\lim_{t \rightarrow 1} \sup_{\{a: |\varphi(a)| \leq R\}} m(\sigma_a(E(\varphi, t))) = 0.$$

这样就得到了定理 B 的所有条件, 因此 C_φ 是 BMOA 上的紧算子. 证明完毕.

4 定理 2.1 在 VMOA 和 $\mathcal{B}_0$ 上的应用

函数 $f \in \mathcal{B}$ 称为小 Bloch 函数 (记为 $f \in \mathcal{B}_0$), 如果

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|^2) |f'(z)| = 0.$$

我们知道 $\text{VMOA} \subsetneq \mathcal{B}_0$, 其中 VMOA 表示具有消失平均振动特征的解析函数空间, 即满足

$$\lim_{|a| \rightarrow 1} \|f \circ \sigma_a - f(a)\|_{H^2} = 0.$$

Madigan 和 Matheson^[10] 描述了复合算子 C_φ 在 $\mathcal{B}$ 及 $\mathcal{B}_0$ 上为紧的特征. 即算子 C_φ 在 $\mathcal{B}$ 上为紧的充分必要条件是

$$\lim_{|\varphi(z)| \rightarrow 1} \frac{|\varphi'(z)|}{1 - |\varphi(z)|^2} (1 - |z|^2) = 0; \tag{4.1}$$

算子 C_φ 在 $\mathcal{B}_0$ 上为紧的充分必要条件是

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} \frac{|\varphi'(z)|}{1 - |\varphi(z)|^2} (1 - |z|^2) = 0. \tag{4.2}$$

Schwarz-Pick 引理告诉我们, 任意 $\mathbb{D}$ 上的解析自映射 φ 确定一个 Bloch 空间 $\mathcal{B}$ 上的有界复合算子 $C_\varphi = f \circ \varphi$. 类似地, 作为 Littlewood 从属原理的推论, φ 也确定一个 BMOA 上的有界复合算子. 如果 X 是 Möbius 不变的函数空间, 并且 $C_\varphi(X) \subset X$, 则 $H^\infty \subset X$ (见文献 [11]). 因为 $H^\infty \not\subset \mathcal{B}_0$, 这样必然存在一个解析映射 $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, 使得 C_φ 不能把 $\mathcal{B}_0$ 及 VMOA 映到它们自身. 对于特殊情形 $\|\varphi\|_\infty < 1$, C_φ 在 BMOA 上是紧算子, 在 $\mathcal{B}$ 上当然也是紧算子. 然而, 满足 $\|\varphi\|_\infty < 1$ 的那些 φ 不一定总保持使得 C_φ 将 $\mathcal{B}_0$ 映为自身的特征. 例如, 函数 $\varphi(z) = \frac{1}{2} \exp(\frac{z+1}{z-1})$ 不能将 $\mathcal{B}_0$ 映为自身, 但仍然满足 $\|\varphi\|_\infty < 1$. 这个例子表明 $C_\varphi(\mathcal{B}_0) \not\subset \mathcal{B}_0$.

通过简单的计算可得: 如果 $\mathbb{D}$ 上的解析自映射 φ 属于 $\mathcal{B}_0$, 则 (4.1) 与 (4.2) 式等价. 上述说明加上 Tjani 关于 $\mathcal{B}$ (文献 [8, 定理 3.1]) 的紧性条件可以得到如下结果:

定理 4.1 设 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的解析自映射, 则下面的陈述相互等价:

- (i) C_φ 是 $\mathcal{B}_0$ 上的紧算子;
- (ii) $\varphi \in \mathcal{B}_0$ 且 C_φ 是 $\mathcal{B}$ 上的紧算子;
- (iii) $\varphi \in \mathcal{B}_0$ 且 $\lim_{|\lambda| \rightarrow 1} \|C_\varphi \sigma_\lambda\|_{\mathcal{B}} = 0$.

如果 $\varphi \in \text{VMOA}$, 则 $C_\varphi P \in \text{VMOA}$ 对于所有的多项式 P 成立, 因此, $C_\varphi(\text{VMOA}) \subset \text{VMOA}$. 这个观察及定理 2.1 给出了关于 VMOA 的一个类似的结论 (参看文献 [2] 中推论 1.3).

定理 4.2 设 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的解析自映射, 则 C_φ 是 VMOA 上紧算子的充分必要条件是 $\varphi \in \text{VMOA}$, 并且定理 2.1 或 2.2 中的条件 (i) 和 (ii) 成立.

类似于推论 2.3 有

推论 4.3 设 φ 是 $\mathbb{D}$ 上的解析自映射. 如果 C_φ 是 VMOA 上的紧算子, 则 C_φ 必是 $\mathcal{B}_0$ 上的紧算子.

致谢 作者衷心感谢审稿人提出的有价值的意见.

参 考 文 献

- 1 Bourdon P, Cima J, Matheson A. Compact composition operators on the BMOA. Trans Amer Math Soc, 1999, 351: 2183–2196
- 2 Smith W. Compactness of composition operators on BMOA. Proc Amer Math Soc, 1999, 127: 2715–2725
- 3 Garnett J B. Bounded Analytic Functions. New York: Academic Press, 1981
- 4 Duren P L. Theory of H^p Spaces. New York: Academic Press, 1970
- 5 Shapiro J H. The essential norms of a composition operator. Annals of Math, 1987, 125: 375–404
- 6 Li S Y, Russo B. On the compactness of composition operators on Hardy spaces in strongly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$. Proc Amer Math Soc, 1995, 123: 161–172
- 7 Cima J, Matheson A. Essential norms of composition operators and Alexandrow measures. Pacific J Math, 1997, 179: 59–64
- 8 Tjani M. Compact composition operators on some Möbius invariant Banach space. Thesis, Michigan State University, 1996
- 9 Shapiro J H. Composition Operator and Classical Function Theory. New York: Springer-Verlag, 1993
- 10 Madigan K, Matheson A. Compact composition operators on the Bloch space. Trans Amer Math Soc, 1995, 347: 2679–2687
- 11 Arazy J, Fisher S, Peetre J. Möbius invariant function spaces. J Reine Angew Math, 1985, 363: 110–145