整闭单项式理想作为乘子理想的实现性

献给万哲先教授 90 华诞

龚成, 唐忠明*

苏州大学数学科学学院, 苏州 215006

E-mail: cgong@suda.edu.cn, zmtang@suda.edu.cn

收稿日期: 2016-10-05; 接受日期: 2016-11-23; 网络出版日期: 2017-01-17; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11401413 和 11471234) 资助项目

摘要 本文证明了每一个整闭的单项式理想都是某个单项式理想的乘子理想, 并且讨论了该实现性的唯一性; 也讨论了无平方单项式理想的乘子理想. 乘子理想是高维代数几何中的重要研究对象. 乘子理想是整闭的, 一个自然且重要的问题是哪些整闭理想可以作为乘子理想.

关键词 实现性 乘子理想 单项式理想

MSC (2010) 主题分类 14F18, 13B22

1 引言

乘子理想在高维代数几何中有许多应用, 参见文献 [1]. 众所周知, 乘子理想是整闭的. 在乘子理想理论中有一个有趣的问题, 那就是哪些整闭的理想可以看作是乘子理想. Lipman 和 Watanabe [2] 及 Favre 和 Jonsson [3] 证明了任意二维正则局部环的每一个整闭理想都可以局部地看作一个乘子理想. Lee [4] 证明了 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3}$ 中由不超过 10 条过原点的一般位置的直线生成的理想可以看作乘子理想. 在奇异情形下, Tucker [5] 证明了对数型端奇点曲面上的整闭理想是乘子理想. 当维数 ≥ 3 时, 由文献 [6, 定理 A] 可知许多整闭理想不能看作乘子理想. 本文将证明 $\mathbb{C}$ 上的任一多项式环中的每一个整闭单项式理想都可以看作乘子理想.

令 $K[x_1, \dots, x_d]$ 是域 K 上的一个多项式环, $\mathfrak{a}$ 是 $K[x_1, \dots, x_d]$ 的一个理想. 当 $\mathfrak{a}$ 可以由单项式生成时, 我们称 $\mathfrak{a}$ 是一个单项式理想. 当一个单项式理想的生成元都不含不定元的平方项时, 我们就称此单项式理想是无平方单项式理想. 每一个单项式 $\underline{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$ 与它的指数向量 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ ($0 \in \mathbb{N}$) 相对应. 令 $\mathfrak{a} \subseteq K[x_1, \dots, x_d]$ 是一个单项式理想. $\mathbb{R}_{\geq 0}^d$ 的由 $\mathfrak{a}$ 中所有指数向量构成的集合的凸包称为 $\mathfrak{a}$ 的 Newton 多面体, 记作 $P(\mathfrak{a})$. 由 $\mathfrak{a}$ 的整闭包 $\bar{\mathfrak{a}}$ 中所有单项式构成的集合等于由所有满足 $\alpha \in P(\mathfrak{a})$ 的单项式 $\underline{x}^\alpha$ 构成的集合 (参见文献 [7, 命题 1.4.6]).

令 X 是一个光滑的拟射影复代数簇, $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_X$ 是 X 上的一个理想层. 令 $f: Y \rightarrow X$ 是 $\mathfrak{a}$ 的一个 log 型奇点解消, 其中 $f^{-1}(\mathfrak{a}) = \mathcal{O}_Y(-E)$ 且 $c > 0$ 是一个有理数. $\mathfrak{a}$ 的关于系数 c 的乘子理想被定义为

$$\mathcal{J}(\mathfrak{a}^c) = f_* \mathcal{O}_Y(K_{Y/X} - \lfloor cE \rfloor),$$

英文引用格式: Gong C, Tang Z M. Realization of integrally closed monomial ideals as multiplier ideals (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1565–1570, doi: 10.1360/N012016-00174

其中 $K_{Y/X} = K_Y - f^*K_X$ 是相对典范除子, $\lfloor cE \rfloor$ 是 cE 的下取整除子. 那么 $\mathcal{J}(\mathfrak{a}^c)$ 是 X 上的一个理想层.

当 $X = \mathbb{A}^d$ 时, Howald [8] 给出了 $\mathcal{J}(\mathfrak{a}^c)$ 的一个精确描述.

定理 1.1 (Howald 定理) 令 $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$ 是一个单项式理想, $c > 0$ 是一个有理数, 则 $\mathcal{J}(\mathfrak{a}^c)$ 是如下的整闭单项式理想:

$$\mathcal{J}(\mathfrak{a}^c) = (\underline{x}^\alpha : \alpha + (1, \dots, 1) \in \text{Int}(cP(\mathfrak{a})) \cap \mathbb{N}^d),$$

其中 $cP(\mathfrak{a}) = \{c\alpha : \alpha \in P\}$, $\text{Int}(cP(\mathfrak{a}))$ 是 $cP(\mathfrak{a})$ 的内部.

给定一个整闭单项式理想 $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$, 我们的问题是, 是否存在一个单项式理想 $\mathfrak{b}$ 以及一个有理数 $c > 0$, 使得 $\mathfrak{a} = \mathcal{J}(\mathfrak{b}^c)$, 并且这样的理想是唯一的.

2 存在性

令 $\mathfrak{a} \subseteq K[x_1, \dots, x_d]$ 是一个单项式理想, 即可以由某些单项式生成的理想; $\bar{\mathfrak{a}}$ 是 $\mathfrak{a}$ 的整闭包. 显然, $\bar{\mathfrak{a}}$ 也是单项式理想. 下面的引理是众所周知的 (参见文献 [9, 定理 1.4.2] 和 [7, 命题 1.4.6]).

引理 2.1 一个单项式 $u \in \bar{\mathfrak{a}}$ 当且仅当存在 $r > 0$ 以及单项式 $m_1, \dots, m_r \in \mathfrak{a}$ 使得 $u^r = m_1 \cdots m_r$.

应用这个引理, 易得引理 2.2.

引理 2.2 令 $\mathfrak{a} \subseteq K[x_1, \dots, x_d]$ 是一个单项式理想. 如果 $\mathfrak{a}$ 是整闭的, 则单项式理想 $x_1 \cdots x_d \mathfrak{a}$ 也是整闭的.

假设 H 是 $\mathbb{R}_{\geq 0}^d$ 中由如下方程得到的超平面:

$$a_1 x_1 + \cdots + a_d x_d = p.$$

我们用 $H(1)$ 表示由如下方程得到的超平面:

$$a_1(x_1 - 1) + \cdots + a_d(x_d - 1) = p,$$

且记 $H^- = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d : a_1 \alpha_1 + \cdots + a_d \alpha_d < p\}$. 若 S 是一个由一些超平面构成的集合, 则我们记 $S(1) = \{H(1) : H \in S\}$.

注意到, 如果 H 是一个由方程 $x_i = 0$ 得到的坐标超平面, 则 $H(1)$ 的方程为 $x_i = 1$. 如果 P 是一个 Newton 多面体, 它的边界为 S (可能包含一些坐标超平面), 则对于边界为 $S(1)$ 的 Newton 多面体中的任意向量 α , 有 $\alpha \geq (1, \dots, 1)$, 这里 $\alpha_i \geq 1$.

引理 2.3 令 $\mathfrak{a} \subseteq K[x_1, \dots, x_d]$ 是一个整闭单项式理想. 如果 $P(\mathfrak{a})$ 的边界是一个超平面集合 S , 则 $P(x_1 \cdots x_d \mathfrak{a})$ 是一个以超平面集合 $S(1)$ 为边界的 Newton 多面体.

证明 对于任意的 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, $\alpha \in P(x_1 \cdots x_d \mathfrak{a})$ 当且仅当 $\alpha \geq (1, \dots, 1)$ 并且 $\alpha - (1, \dots, 1) \in P(\mathfrak{a})$. 后者等价于 $\alpha \geq (1, \dots, 1)$ 并且对于任一由方程 $a_1 x_1 + \cdots + a_d x_d = p$ 得到的超平面 $H \in S$ 有 $a_1(\alpha_1 - 1) + \cdots + a_d(\alpha_d - 1) \geq p$, 即 α 在以 $S(1)$ 为边界的 Newton 多面体内. 引理得证. $\square$

令 $c > 0$ 是一个有理数. 对于任意的凸集 P , 记 $cP = \{c\alpha : \alpha \in P\}$, 并且对于任一由如下方程得到的超平面 H :

$$a_1 x_1 + \cdots + a_d x_d = p,$$

记 H^c 为由如下方程得到的超平面:

$$a_1x_1 + \cdots + a_dx_d = cp.$$

令 S 是一个由一些超平面构成的集合, 记 $S^c = \{H^c : H \in S\}$, 则下面的引理是显然的.

引理 2.4 令 P 是一个以超平面集合 S 为边界的凸包, $c > 0$ 是一个有理数, 则 cP 是一个以超平面集合 S^c 为边界的凸包.

下面的引理在接下来的讨论中至关重要.

引理 2.5 令 $T \subseteq \mathbb{N}^d$, P 是 $\mathbb{R}_{\geq 0}^d$ 中以有限多个超平面为边界的 Newton 多面体. 假设 $T \cap P = \emptyset$, 则存在一个有理数 $0 < c < 1$ 使得 $T \cap cP = \emptyset$.

证明 设 P 以超平面 $H_1, \dots, H_s$ 为边界, 则条件 $T \cap P = \emptyset$ 等价于对于任意的 $\alpha \in T$, 存在某个 H_i 使得 $\alpha \in H_i^-$, 即 $T = \bigcup_{i=1}^s (T \cap H_i^-)$. 由引理 2.4 知, cP 以 $H_1^c, \dots, H_s^c$ 为边界. 所以, 我们需要证明 $T = \bigcup_{i=1}^s (T \cap (H_i^c)^-)$.

注意到, 若存在一个有理数 $0 < c_i < 1$ 使得 $T \cap H_i^- \subseteq (H_i^{c_i})^-$, $i = 1, \dots, s$, 则对于 $c = \max\{c_i : i = 1, \dots, s\}$ 也有 $T = \bigcup_{i=1}^s (T \cap (H_i^c)^-)$. 因此我们只需证明下面的结论即可.

令 $T \subseteq \mathbb{N}^d$, H 是一个由方程 $a_1x_1 + \cdots + a_dx_d = p$ ($a_i \geq 0, p > 0$) 得到的超平面. 假设对于一切 $\alpha \in T$ 都有 $\alpha \in H^-$, 则存在一个有理数 $0 < c < 1$, 使得对于一切 $\alpha \in T$ 也有 $\alpha \in (H^c)^-$.

我们不妨设 $a_1, \dots, a_r \neq 0$, 并且 $a_{r+1} = \cdots = a_d = 0$. 注意到, 对于任意的 $\alpha \in \mathbb{N}^d$, 如果 $\alpha \in H^-$ (即 $a_1\alpha_1 + \cdots + a_d\alpha_d < p$), 则 $0 \leq \alpha_i < \frac{p}{a_i}$, $i = 1, \dots, r$. 于是集合 $\{a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r : \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in T\}$ 只含有限多个元素. 取一个有理数 $0 < c < 1$ 使得

$$c > \frac{1}{p} \max\{a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r : \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in T\},$$

则对于任意的 $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in T$, 有

$$\begin{aligned} a_1\beta_1 + \cdots + a_d\beta_d &= a_1\beta_1 + \cdots + a_r\beta_r \\ &\leq \max\{a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r : \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in T\} \\ &< cp, \end{aligned}$$

即 $\beta \in (H^c)^-$. 引理得证. □

现在, 我们可以证明每一个整闭的单项式理想都可以看作是一个乘子理想.

定理 2.6 令 $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$ 是一个整闭单项式理想, 则存在一个有理数 $0 < c_0 < 1$, 使得对于任意的有理数 $c_0 < c < 1$ 都有 $\mathfrak{a} = \mathcal{J}((x_1 \cdots x_d \mathfrak{a})^c)$.

证明 首先, 我们证明对于任意的 $0 < c < 1$ 都有 $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{J}((x_1 \cdots x_d \mathfrak{a})^c)$. 令 $\underline{x}^\alpha \in \mathfrak{a}$. 我们可得

$$\begin{aligned} \alpha + (1, \dots, 1) &\in P(x_1 \cdots x_d \mathfrak{a}) \\ &\subseteq \text{Int}(cP(x_1 \cdots x_d \mathfrak{a})), \end{aligned}$$

则 $\underline{x}^\alpha \in \mathcal{J}((x_1 \cdots x_d \mathfrak{a})^c)$. 因此 $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{J}((x_1 \cdots x_d \mathfrak{a})^c)$.

为了证明上述结论, 我们只需证明: 存在一个有理数 $0 < c_0 < 1$, 使得对于任意的有理数 $c_0 < c < 1$ 以及任意的单项式 $u \in K[x_1, \dots, x_d]$, 若 $u \notin \mathfrak{a}$, 则必有 $u \notin \mathcal{J}((x_1 \cdots x_d \mathfrak{a})^c)$. 令 $T = \{\alpha \in \mathbb{N}^d : \underline{x}^\alpha \notin \mathfrak{a}\}$, $T + (1, \dots, 1) = \{\alpha + (1, \dots, 1) : \alpha \in T\}$, 则 $(T + (1, \dots, 1)) \cap P(x_1 \cdots x_d \mathfrak{a}) = \emptyset$. 由引理 2.5 知, 存在一个有

理数 $0 < c_0 < 1$ 使得 $(T + (1, \dots, 1)) \cap c_0 P(x_1 \cdots x_d \mathfrak{a}) = \emptyset$. 由于 $cP(x_1 \cdots x_d \mathfrak{a}) \subseteq c_0 P(x_1 \cdots x_d \mathfrak{a})$, 则对于任意有理数 $c_0 < c < 1$, 有 $(T + (1, \dots, 1)) \cap cP(x_1 \cdots x_d \mathfrak{a}) = \emptyset$. 于是, $(T + (1, \dots, 1)) \cap \text{Int}(cP(x_1 \cdots x_d \mathfrak{a})) = \emptyset$. 因此, 对于任意的 $\alpha \in T$, $\underline{x}^\alpha \notin \mathcal{J}((x_1 \cdots x_d \mathfrak{a})^c)$. 定理得证. $\square$

注意到, 由文献 [1, 例 9.3.30] 知, 对于任意的单项式理想 $\mathfrak{a}$ 都存在一个多项式 f , 使得对于一切有理数 $0 < c < 1$ 都有 $\mathcal{J}(\mathfrak{a}^c) = \mathcal{J}((f)^c)$. 则由定理 2.6 我们可得推论 2.7.

推论 2.7 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$ 中的每一个整闭单项式理想都是一个主理想的乘子理想.

3 唯一性

设 $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$ 是一个整闭单项式理想. 接下来讨论定理 2.6 中 $\mathfrak{a}$ 作为一个乘子理想的实现性的唯一性, 即使得 $\mathfrak{a} = \mathcal{J}(\mathfrak{b}^c)$ 对某个有理数 $0 < c < 1$ 成立的单项式理想 $\mathfrak{b}$ 的唯一性.

事实上, 一般来说这样的 $\mathfrak{b}$ 不是唯一的. 例如, 令 $\mathfrak{a} = (x, y)$, $\mathfrak{b}_1 = (x^3, y^3)$, $\mathfrak{b}_2 = (x^4, y^4)$, 则 $\mathfrak{a}$ 是整闭的, 并且存在 $c = \frac{17}{24}$ 使得 $\mathfrak{a} = \mathcal{J}(\mathfrak{b}_1^c) = \mathcal{J}(\mathfrak{b}_2^c)$. 然而, 这样的 $\mathfrak{b}$ 在某种程度上是具有唯一性的.

设 $\mathfrak{b} \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$ 是一个单项式理想, 并且存在一个有理数 $0 < c < 1$ 使得 $\mathfrak{a} = \mathcal{J}(\mathfrak{b}^c)$. 从 $\mathcal{J}(\mathfrak{b}^c) = (\underline{x}^\alpha : \alpha + (1, \dots, 1) \in \text{Int}(cP(\mathfrak{b})) \cap \mathbb{N}^d)$ 以及任意的 $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\alpha + (1, \dots, 1) \in \text{Int}(cP((x_1 \cdots x_d)))$, 我们看出

$$\mathcal{J}(\mathfrak{b}^c) = (\underline{x}^\alpha : \alpha + (1, \dots, 1) \in \text{Int}(cP(\mathfrak{b} \cap (x_1 \cdots x_d))) \cap \mathbb{N}^d),$$

即

$$\mathcal{J}(\mathfrak{b}^c) = \mathcal{J}((\mathfrak{b} \cap (x_1 \cdots x_d))^c).$$

因此, 我们不妨设 $\mathfrak{b} \subseteq (x_1 \cdots x_d)$, 由此可得 $\mathfrak{b} = x_1 \cdots x_d (\mathfrak{b} : x_1 \cdots x_d)$.

命题 3.1 令 $\mathfrak{b} \subseteq (x_1 \cdots x_d)$ 是一个单项式理想. 假设 $\mathcal{J}(\mathfrak{b}^c) = \mathfrak{a}$ 对某个 $0 < c < 1$ 成立, 则 $\mathfrak{b} \subseteq x_1 \cdots x_d \mathfrak{a}$.

证明 由于 $P(\mathfrak{b}) \subseteq \text{Int}(cP(\mathfrak{b}))$, 于是有

$$\mathfrak{b} : x_1 \cdots x_d \subseteq (\underline{x}^\alpha : \alpha + (1, \dots, 1) \in \text{Int}(cP(\mathfrak{b})) \cap \mathbb{N}^d) = \mathcal{J}(\mathfrak{b}^c) = \mathfrak{a}.$$

因此, $\mathfrak{b} = x_1 \cdots x_d (\mathfrak{b} : x_1 \cdots x_d) \subseteq x_1 \cdots x_d \mathfrak{a}$. $\square$

于是, 当 $0 < c < 1$, $\mathfrak{a} = \mathcal{J}(\mathfrak{b}^c)$ 时, $x_1 \cdots x_d \mathfrak{a}$ 是满足条件的 $\mathfrak{b}$ 的最大候选理想.

关于实现性的唯一性, 我们有以下的结论.

定理 3.2 令 $\mathfrak{a}$ 以及 $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \subseteq (x_1 \cdots x_d)$ 是 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$ 中的整闭单项式理想. 假设存在一个有理数 $0 < c_0 < 1$, 使得对于一切有理数 $c_0 < c < 1$ 都有 $\mathfrak{a} = \mathcal{J}(\mathfrak{b}_1^c) = \mathcal{J}(\mathfrak{b}_2^c)$, 则 $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2$.

证明 由 $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \subseteq (x_1 \cdots x_d)$ 可得 $\mathfrak{b}_i = x_1 \cdots x_d \mathfrak{b}'_i$, $i = 1, 2$, 其中 $\mathfrak{b}'_1$ 和 $\mathfrak{b}'_2$ 是单项式理想. 假设 $\mathfrak{b}_1 \neq \mathfrak{b}_2$, 不妨设存在一个 $\alpha \in \mathbb{N}^d$ 使得 $\alpha \in P(\mathfrak{b}_1) \setminus P(\mathfrak{b}_2)$, 则 $\alpha \geq (1, \dots, 1)$, 即 $\alpha_i \geq 1$. 令 $T = \{\beta \in \mathbb{N}^d : \underline{x}^\beta \notin \mathfrak{b}_2\}$, 则 $\alpha \in T$, 并且 $T \cap P(\mathfrak{b}_2) = \emptyset$. 由引理 2.5 知, 存在一个有理数 $0 < c' < 1$ 使得 $T \cap c'P(\mathfrak{b}_2) = \emptyset$. 于是, 对于任意的有理数 $c' < c < 1$, 也有 $T \cap cP(\mathfrak{b}_2) = \emptyset$, 因此, 我们不妨设 $c_0 = c'$. 于是, 对于所有有理数 $c_0 < c < 1$ 有 $\alpha \notin \text{Int}(cP(\mathfrak{b}_2)) \cap \mathbb{N}^d$. 但另一方面, $\alpha \in P(\mathfrak{b}_1) \subseteq \text{Int}(cP(\mathfrak{b}_1)) \cap \mathbb{N}^d$. 令 $\alpha' = \alpha - (1, \dots, 1)$, 则由 Howald 定理知, $\alpha' \in \mathcal{J}(\mathfrak{b}_1^c) \setminus \mathcal{J}(\mathfrak{b}_2^c)$, 因此 $\mathcal{J}(\mathfrak{b}_1^c) \neq \mathcal{J}(\mathfrak{b}_2^c)$, 矛盾. 定理得证. $\square$

于是由定理 2.6 和 3.2 我们可得, 对于任一整闭单项式理想 $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$, 存在唯一一个整闭单项式理想 $\mathfrak{b} \subseteq (x_1 \cdots x_d)$, 并且存在一个有理数 $0 < c_0 < 1$ 使得对于一切有理数 $c_0 < c < 1$ 都有 $\mathfrak{a} = \mathcal{J}(\mathfrak{b}^c)$.

4 无平方单项式理想

文献 [10, 11] 研究了单项式理想的乘子理想的性质, 这里再进一步讨论无平方单项式理想 $\mathfrak{a}$ 的乘子理想的性质. 当 $\mathfrak{a}$ 是主理想时, 根据 Howald 定理我们有以下结论:

命题 4.1 假设 $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$ 是无平方的单项式主理想, 则对任意正有理数 c , $\mathcal{J}(\mathfrak{a}^c) = \mathfrak{a}^{[c]}$, 其中 $[c]$ 表示 c 的下取整.

证明 不妨假设 $\mathfrak{a} = (x_1 \cdots x_r)$, $r \leq d$. 由于 $cP(\mathfrak{a}) \cap \mathbb{N}^d = \{(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{N}^d : a_i \geq c, i = 1, \dots, r\}$, 所以, 由 Howald 定理得

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\mathfrak{a}^c) &= (x_1^{a_1} \cdots x_d^{a_d} : a_i \geq 0, i = 1, \dots, d; a_i + 1 > c, i = 1, \dots, r) \\ &= (x_1^{a_1} \cdots x_d^{a_d} : a_i \geq 0, i = 1, \dots, d; a_i \geq [c], i = 1, \dots, r) \\ &= \mathfrak{a}^{[c]}.\end{aligned}$$

证毕. □

当 $\mathfrak{a}$ 不是主理想时, 我们有以下有意思的结论:

命题 4.2 设 $\mathfrak{a}$ 是一个无平方单项式理想, 并且不是主理想, 则当有理数 c 满足 $0 < c \leq 1$ 时, 有 $\mathcal{J}(\mathfrak{a}^c) = (1)$.

证明 根据 Howald 定理, 为证明 $\mathcal{J}(\mathfrak{a}^c) = (1)$, 我们只需证明 $(1, \dots, 1)$ 是 $P(c\mathfrak{a})$ 的内点. 而对 $0 < c < 1$ 有 $P(\mathfrak{a}) \subseteq cP(\mathfrak{a})$, 所以, $P(\mathfrak{a})$ 的内点一定是 $P(c\mathfrak{a})$ 的内点. 因而, 我们只需证明 $(1, \dots, 1)$ 是 $P(\mathfrak{a})$ 的内点即可.

令 $\mathfrak{a}$ 的极小生成元组为 $\underline{x}^{\alpha_i} = x_1^{a_{i1}} \cdots x_d^{a_{id}}$, $i = 1, \dots, k$. 因 $\mathfrak{a}$ 不是主理想, 所以 $k > 1$. 而由 $\mathfrak{a}$ 是无平方的知 $0 \leq a_{ij} \leq 1$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, d$. 注意到, 对每个 i 都有某个 j 使得 $a_{ij} = 0$ (从而 $\sum_{j=1}^d a_{ij} < d$), 否则 $\underline{x}^{\alpha_i}$ 就是多余的生成元, 与假设矛盾.

我们知道, $P(\mathfrak{a})$ 的边界上的点都可以表示成 $\sum_{i=1}^k \ell_i \alpha_i$, 其中 $\ell_i \geq 0$, $i = 1, \dots, k$, 且 $\sum_{i=1}^k \ell_i = 1$ (参见文献 [7, 命题 1.4.6]). 对 $j = 1, \dots, d$, 有 $\sum_{i=1}^k \frac{1}{k} a_{ij} \leq \sum_{i=1}^k \frac{1}{k} = 1$, 故 $(1, \dots, 1) \in P(\mathfrak{a})$. 如果有 $\sum_{i=1}^k \ell_i \alpha_i = (1, \dots, 1)$, 即 $(1, \dots, 1)$ 是边界点, 则将分量相加得

$$d = \sum_{j=1}^d \left(\sum_{i=1}^k \ell_i a_{ij} \right) = \sum_{i=1}^k \ell_i \left(\sum_{j=1}^d a_{ij} \right).$$

但对每个 i 都有 $\sum_{j=1}^d a_{ij} < d$, 所以必有

$$\sum_{i=1}^k \ell_i \left(\sum_{j=1}^d a_{ij} \right) < d \sum_{i=1}^k \ell_i = d,$$

矛盾. 因而 $(1, \dots, 1)$ 是 $P(\mathfrak{a})$ 的内点, 结论成立. □

下列结论是熟知的, 因缺少合适的参考文献, 我们给出简单的证明.

引理 4.3 无平方的单项式理想一定是整闭的.

证明 假设 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$ 的一个无平方的单项式理想, 则 $\mathfrak{a}$ 可以表示成形如 $(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ 的素理想的交. 而由包含关系 $\overline{I \cap J} \subseteq \overline{I} \cap \overline{J}$ 立即可得整闭理想的交仍是整闭的, 又易见形如 $(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ 的理想都是整闭的, 所以 $\mathfrak{a}$ 是整闭的. □

因此作为定理 2.6 的推论, 我们有如下命题:

命题 4.4 任何一个无平方的单项式理想都可以作为某个单项式理想的乘子理想.

参考文献

- 1 Lazarsfeld R. Positivity in Algebraic Geometry II. Berlin: Springer-Verlag, 2004
- 2 Lipman J, Watanabe K I. Integrally closed ideals in two-dimensional regular local rings are multiplier ideals. *Math Res Lett*, 2003, 10: 424–434
- 3 Favre C, Jonsson M. Valuations and multiplier ideals. *J Amer Math Soc*, 2005, 18: 655–684
- 4 Lee K. On the realization of line arrangements as multiplier ideals. PhD Thesis. Ann Arbor: University of Michigan, 2008
- 5 Tucker K. Integrally closed ideals on log terminal surfaces are multiplier ideals. *Math Res Lett*, 2009, 16: 903–908
- 6 Lazarsfeld R, Lee K. Local syzygies of multiplier ideals. *Invent Math*, 2007, 167: 409–418
- 7 Swanson I, Huneke C. Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules. Cambridge: Cambridge University Press, 2006
- 8 Howald J A. Multiplier ideals of monomial ideals. *Trans Amer Math Soc*, 2001, 353: 2665–2671
- 9 Herzog J, Hibi T. Monomial Ideals. London: Springer-Verlag, 2011
- 10 Gong C, Tang Z. A note on the multiplier ideals of monomial ideals. *Czechoslovak Math J*, 2015, 65: 905–913
- 11 Tang Z, Gong C. On the stability and regularity of the multiplier ideals of monomial ideals. *Indian J Pure Appl Math*, 2017, 48: 167–176

Realization of integrally closed monomial ideals as multiplier ideals

GONG Cheng & TANG ZhongMing

Abstract In this paper, we prove that every integrally closed monomial ideal can be realized as a multiplier ideal, and the uniqueness of this realization is discussed. We also discuss the multiplier ideal of square free monomial ideals. Multiplier ideals are fundamental topics in higher dimensional algebraic geometry. It is well-known that multiplier ideals are integrally closed. One natural and important question is which integrally closed ideals can be realized as multiplier ideals.

Keywords realization, multiplier ideals, monomial ideals

MSC(2010) 14F18, 13B22

doi: 10.1360/N012016-00174