论文

方、矩形环管湍流直接数值模拟分析: II. 雷诺应力场与平均能量谱, 对传统湍流本构关系的再认识

徐弘一^{1,2*}

1. 复旦大学航空航天系, 上海 200433;

2. 大连理工大学工程力学系, 工业装备结构分析国家重点实验室, 国际计算力学研究中心, 大连 116023

*联系人, E-mail: Hongyi_Xu@fudan.edu.cn

收稿日期: 2016-09-16; 接受日期: 2016-12-08; 网络出版日期: 2017-06-14

国家自然科学基金(编号: 91434112)、上海教育委员会数值仿真联合创新计划项目(编号: AR908.D1RW.002)、复旦大学航空航天系、上海千人计划启动项目(编号: EZH2126503)和大连理工大学和工业装备结构分析国家重点实验室(编号: S12202)资助项目

摘要 通过对直管道内充分发展湍流的直接数值模拟, 建立方、矩形环管内充分发展湍流数据库, 其中包括详细的湍流统计数据: (1) 湍流平均流场, 即平均流向速度与湍流驱动平均二次流(史称Prandtl第二类二次流); (2) 湍流雷诺应力场; (3) 湍流时均能量谱. 本文给出了方、矩形环管内充分发展湍流雷诺应力场分布信息, 对90°凸角域附近的Prandtl第二类二次流生成项结构进行了仔细剖析, 特别诠释了凸角域二次流的生成机理. 将方、矩形环管90°凹角附近的流场, 包括平均流场(流向速度, 平均二次流)和雷诺应力场中的湍动能, 与现有的实验和直接数值模拟数据进行详细对比验证, 展示了方、矩形环管内直接数值模拟结果的有效和合理性. 基于对湍流雷诺应力场和能量谱特征的观察, 本文提出了重新审视和认识传统湍流本构关系的必要性. 对标量涡黏系数所隐含的各向同性物理涵义与假设给出严格数学证明, 在此基础上, 提出了以张量涡黏系数描述湍流各向异性运动特征的研究思路, 给出了发展以描述各向异性湍流运动为目标的新型湍流本构关系. 基于此关系进一步提出未来研究设想, 即发展基于直接数值模拟结果的雷诺平均湍流封闭模型, 以提高雷诺平均模拟的物理可靠性和准确度.

关键词 壁湍流, 雷诺应力, 湍流能量谱, Prandtl第二类二次流, 直接数值模拟, 湍流本构关系, 各向异性运动

PACS: 47.27.E-, 42.27.ek, 42.27.N-, 42.27.nb

一般泛型管道内充分发展湍流的各种统计量, 如平均流场、雷诺应力场和能量谱, 一直是流体工程界所普遍关心的重要物理量和探索焦点. 其中所涉及的复杂湍流流动现象包括普遍关注的壁湍流边界层, 由湍流驱动的二次流结构以及与之密切相关的湍流雷诺

应力场和反映湍流多尺度以及各向异性运动特征的能量谱分布. 这些湍流现象及其相关物理机制的研究和认知, 对于流体工业的发展和与这些流动过程密切相关的多学科领域, 如热流体工业中的传热、传质过程的进步起着至关重要的作用. 历史上, Prandtl作为公认

引用格式: 徐弘一. 方、矩形环管湍流直接数值模拟分析: II. 雷诺应力场与平均能量谱, 对传统湍流本构关系的再认识. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2017, 47: 084701

Xu H Y. Reynolds stress and turbulence energy spectra analysis of *Re*-understanding the turbulence constitutive equation DNS data in square and rectangular annular ducts (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2017, 47: 084701, doi: [10.1360/SSPMA2016-00389](https://doi.org/10.1360/SSPMA2016-00389)

的先驱者首先对平壁湍流边界层和湍流二次流进行了最初的探索, 其中对平壁湍流的研究使Prandtl^[1]成功地建立起现代流体力学的基石, 即平板湍流边界层理论. 而von Karman^[2]则紧随其后进一步构建了平壁充分发展湍流的内在物理联系及其数学基础, 即著名的湍流壁面律(Law-of-the-Wall). 在对与壁湍流密切相关的二次流研究方面, Prandtl首先发现了管道湍流中的由湍流所驱动的二次流现象, 即史称的Prandtl第二类二次流, 并随后不久得到了Nikuradse^[3]的首次实验验证. 然而, 由于Prandtl第二类二次流的三维运动特性及其产生机理的复杂性(见Bradshaw^[4]一文所描述的非均匀分布湍流应力或雷诺应力的驱动机制), 使Prandtl第二类二次流研究在其发现后的相当长时间内, 历经众多学者的不懈努力, 如Gessner和Jones^[5], Gerard^[6]和Perkins^[7]等, 仍处于二次流理论模型各种简化假设分析的停滞状态. 同时基于雷诺平均Navier-Stokes (Reynolds-averaged Navier-Stokes, RANS) 模型的各种努力, 如Naimi和Gessner^[8]的代数应力模型和Speziale^[9]的非线性 $k-\epsilon$ 模型等, 亦均无法取得对Prandtl第二类二次流研究的实质性突破. 而根据Bradshaw^[4]所给出的该二次流的产生机理不难看出, 该问题的根本解决在于对雷诺应力的直接模拟和预测. 而这一点与雷诺平均方法中湍流封闭模型研究所遇到的瓶颈如出一辙. 同时, 在此需要提及注意的是, 目前雷诺平均方法所基于的基本假设是Kolmogorov^[10]于1942年所提出的传统湍流本构关系, 即雷诺应力与湍流应变率之间的关联关系. 其背后的基本物理思想是湍流脉动运动与分子热运动的可比拟性假设. 而关于该可比拟关系对各种形式湍流运动的普适性, 虽历经半个多世纪的研究和努力, 仍未获得有关理论、实验和计算数据普遍且具有说服力的证实和支持, 可以说仍处于本构关系最初提出的假设学说(Hypothesis)阶段. 因此直接获取雷诺应力场成为对传统湍流本构关系进行验证和进一步发展符合流体物理规律的工程湍流封闭模型的关键.

近十几年来, 复杂几何构型湍流大涡和直接数值模拟的研究进展, 无疑给泛型管道内充分发展湍流问题的彻底解决指出了明确的方向, 见槽道^[11]、圆管^[12]、方直管^[13]、同心圆形环管^[14]、椭圆管^[15]、偏心环管^[16]及方形环管^[17]中充分发展湍流的直接数值模拟研究. 其中, Xu^[17]在方形环管的直接数值模拟研究中首先提出了角域边界层的概念, 并得到了角域湍流

内层规律这一重要发现. 此后, 在中国天河超级计算机的支持下, 徐弘一和郭加宏^[18]在对方、矩形一般环管充分发展湍流直接数值模拟所给出的流向速度结果分析中, 总结归纳出直管道内广义湍流边界层的概念, 初步得到了更加广泛意义下的壁湍流内层关系. 本文将在这些研究的基础上, 根据直接数值模拟所预测的湍流雷诺应力在三维空间的非均匀分布, 进一步探讨和揭示方、矩形环管中的湍流雷诺应力分布特征和由湍流驱动的二次流物理形成机制. 同时对90°凹角附近的流动给出较为详细的实验(Cheesewright等人^[19])和直接数值模拟(Gavrilakis^[13])结果的验证, 其中包括平均流向速度, Prandtl第二类平均二次流和湍流脉动分量的验证, 以展示直接数值模拟结果的物理准确度和可靠性.

在此基础上, 进一步检验和探讨传统湍流本构关系对一般湍流运动的适用性. 通过给出标量涡黏系数所隐含的各向同性物理假设的严格数学证明, 深入理解传统湍流本构关系仅对各向同性运动适用的局限性. 进而以方、矩形环管内直接数值模拟所给出的湍流雷诺应力和能量谱作为检验标准, 重新审视和构造可适用于各向异性湍流运动的新型湍流本构关系. 根据湍动能与雷诺切应力的各自分布特征, 指出雷诺平均方法中湍流封闭模型构筑所应遵循的一些基本物理规则, 同时进一步提出以直接数值模拟所得到的雷诺应力来计算标定雷诺平均方程中张量涡黏系数的各个分量, 由此发展更加精确的、有物理依据的雷诺平均工程湍流封闭模型的初步构想.

1 直接数值模拟计算参数与湍流瞬时及平均流场

关于本文的直接数值模拟结果所采用的控制方程、问题的几何与物理量尺度选取, 计算模型设置, 包括时-空间离散格式、离散求解技术, 以及由平均流向速度分析所归纳出的广义边界层概念和更加广泛意义下的壁面规律关系, Xu^[17]、徐弘一和郭加宏^[18]已给出详细论证说明. 在此通过表1和图1列出本文所讨论方、矩形环管道的几何构型、尺寸定义及网格分辨率和关键流动参数, 并进一步在图2中展示由直接数值模拟结果所得到的瞬时和平均流场, 以获得对本文所涉及的方、矩形环管湍流流场的感性认识.

1.1 直接数值模拟计算参数

方形环管^[17]. 如图1所示, 管道几何参数设置为 $a_1=a_2=4$, $b_1=b_2=2$, $L=4\pi$; 基于平均摩擦速度和管道平均速度的雷诺数分别为 $Re_\tau = 200$, $Re_b = 3058$; 时间推进步长和积分时间分别为 $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$, $T_{\text{tot}} = 8.0$. 矩形环管^[18]. 如图1所示, 管道几何参数为 $a_1=4$, $a_2=2$, $b_1=1$, $b_2=0.25$, $L=4\pi$, 基于平均摩擦速度和管道平均速度的雷诺数分别为 $Re_\tau = 200$, $Re_b = 3349$; 时间推进步长和积分时间分别为 $\Delta t = 5.0 \times 10^{-5}$, $T_{\text{tot}} = 5.0$.

计算网格数对方、矩形环管均取为 $257 \times 259 \times 259$, 该网格沿流向采用均匀分布, 在前所设置的雷诺数条件下流向网格分辨率为 $x^+ = 9.97$. 而网格在展向上采用非均匀分布, 网格向壁面和凸、凹角以渐进方式加密. 表1给出了内、外壁面附近的网格分辨率, 分别以 $(y_{\text{wi}}^+, z_{\text{wi}}^+)$ 和 $(y_{\text{wo}}^+, z_{\text{wo}}^+)$ 标识.

1.2 湍流瞬时流场

在对湍流统计数据进行分析之前, 首先对方、矩形环管内湍流的瞬态流场作流动可视化观察, 展示管道充分发展湍流的瞬态特征. 图2从管道截面的瞬态二次流, 管壁边界层(内外壁及凹凸角域)瞬态条状涡结构, 包括俯、侧视图的各个方面, 全方位展示方、矩

图1 (网络版彩图)一般矩形环管示意图及其几何尺寸定义
Figure 1 (Color online) Schematic diagram of rectangular annular duct.

表1 直接数值模拟的计算参数

Table 1 Calculation parameters of DNS

流动构型	网格参数	计算域	T_{tot}	Δt	$y_{\text{wi}}^+, z_{\text{wi}}^+$	$y_{\text{wo}}^+, z_{\text{wo}}^+$	Δx^+	Re_τ	Re_b
方型环管	$257 \times 259 \times 259$	$4\pi \times 4 \times 4$	8	1.0×10^{-4}	0.20, 0.20	0.72, 0.72	9.97	200	3058
矩型环管	$257 \times 259 \times 259$	$4\pi \times 4 \times 2$	5	5.0×10^{-5}	0.06, 0.05	0.06, 0.05	9.97	200	3349

形环管内的瞬态充分发展湍流流动, 以清楚地了解壁湍流在各种有应用代表性的几何流动构型条件下, 包括平壁和凹、凸角域, 湍流拟序结构的基本特征.

由瞬态二次流(二次流速矢箭头)与流向速度等值线的迭加, 如图2(a)所示, 可清楚地看到湍流在壁面附近典型的湍流动量交换特征, 即下扫(Sweep)和上喷(Ejection)过程. 此过程所导致的猝发现象则直接形成了湍流由高速区向低速区进行动量传递的机理. 外壁面附近的边界层剖面, 如图2(b)所示, 则以流向涡量等值线的表现手段, 真实再现了平壁充分发展湍流边界层内的条纹状相干结构. 而图2(c)通过矩形环管截面内的流向涡量云侧视图, 显示平壁湍流条纹相干结构在侧视方向以不规则的涡对(图2(c)壁面附近红-蓝相间的条状结构)形式, 沿壁面向高动量(高速)区翘起. 很明显该翘起与图2(a)中的下扫和上喷过程有着密切关联. 图2(d)和(e)则进一步给出矩形环管内部沿宽边和窄边内壁的流向涡量等值线侧视图. 图2(d)显示流向涡条状结构呈规律性地向短边内壁一侧翘起的形状, 而这与下文中, 矩形环管内壁凸角附近的平均二次流指向离开短边内壁外法线方向的描述与观察相吻合. 图2(e)则表明内壁短边附近的涡运动比平壁或凹角附近的流动要强烈得多, 这与凸角附近所观察到的较强平均二次流定性相符. 而这些瞬时流动状态的动画显示可更加逼真地反映和描述平壁和角域附近的相关拟序结构的物理演变过程.

1.3 湍流平均流场

方、矩形环管平均流场特征可分别见证于图3和4, 其中包括平均流向速度和湍流驱动的平均二次流(Prandtl第二类二次流). 由于所讨论的直管内流动状态为充分发展湍流, 所以在管内流动达到统计静态后, 管道截面的统计平均量不随时间和流向坐标而变化. 因此, 沿管道流向任一截面上提取的平均流向速度和平均二次流的流动显示均可充分反映平均流场的基本特征.

图 2 (网络版彩图)方、矩形环管瞬时流态观察. (a) 方管截面瞬态二次流中的下扫(Sweep)和上喷(Ejection)过程; 壁边边界层瞬态条状涡结构; (b) 俯视图: 矩形管条状涡结构; (c) 中截面侧视图; (d) 长边内壁侧视图; (e) 短边内壁侧视图

Figure 2 (Color online) Instantaneous fully-developed turbulence in the square annular duct (SAD) and rectangular annular duct (RAD). (a) Sweeping and ejection process presented by the streamwise velocity contours and the vector plots of the secondary flow on the cross-section of SAD; the coherent streak structures near wall; (b) top-view of RAD; (c) side-view of wall-bisector; (d) side-view of inner major-wall; (e) side-view of inner minor-wall.

首先, 图3(a)和4(a)给出方、矩形环管在统计静态后的平均流向速度剖面的三维显示, 并与相应的层流剖面进行点对点对比. 通过对方、矩形环管中截面的剖面线和方形环管中对角截面的剖面线比较, 可更加清晰地反映湍流流向速度的基本特征. 湍流与层流剖面的区别明显地反映在壁面和角域的速度梯度上. 由于湍流剖面的壁、角域梯度远大于层流, 因而湍流的平均流向速度剖面将整个层流剖面覆盖. 同时, 由于速度梯度及凹、凸角域附近二次流的共同作用, 使湍流平均流向速度剖面向凹角隆起, 如图3(b)中的Arrow-I和图4(b)中的Arrow-III所示, 而在凸角附近, 则朝着离开凸角方向塌陷, 如图3(b)中的Arrow-II所示.

图3(b)和4(b)给出了方、矩形环管截面上的平均流向速度等值线分布. 图5(a)和(b)则以速度矢量的形式来表现两种流动构型的平均二次流结构. 对图3(b)和5(a)及图4(b)和5(b)分别进行对比可清楚地看出, 平均流向速度等值线的凹凸分布(见图3(b)和4(b)中的箭头所指的凹、凸方向), 与湍流驱动的二次平均流流动方向(见图5(a)和(b)中的箭头方向)密切相关. 而该关联性是Nikuradse^[3]首次在实验中所发现的, 同时也是证实方管湍流驱动二次流存在的主要推理依据. 方形环管平均二次流呈相反旋转的涡对结构, 且该涡对对称地分布在方形环管的90°凹、凸角域附近. 而对矩形环管而言, 凹、凸角附近的涡对明显呈相反旋转且非对称的涡对构型. 凹角附近的非对称涡对结构与方形环管基本相似, 非对称主要表现为涡眼相对角平分线的位置及涡流区域在角平分线两侧的大小、分布与方形环管不尽相同, 详细分析见第3节. 在凸角附近, 矩形环管的涡对结构与方形环管相比有明显差别. 方形环管的涡对在凸角域的角平分线两侧对称分布, 而矩形环管的内矩形凸角附近涡对以内矩形短边的壁平分线为对称轴, 旋转方向相反地分布于内矩形两侧. 该结构与Piquet^[20]提到的由湍流应力诱发(湍流驱动)的尖点旋涡结构十分相似, 并且该结构被Elder^[21]的实验所证实. 完全可以推断, 当内矩形短边足够小时, 该旋涡结构即发展成为湍流诱发的尖点旋涡. 其特征为上、下凸角附近的二次流均指向远离内壁尖缘点(内矩形短边)的方向. 而此特征决定了矩形环管的平均流向速度等值线分布向内矩形短边外缘突起(如图5(b)中Arrow-II所示). 而该二次流在外矩形的短边壁平分线附近对外壁面形成冲击, 如图5(b)中Arrow-I所示, 因

图3 (网络版彩图) (a) 方形环管湍流与层流流向速度剖面比较; (b) 湍流平均流向速度(U_{av})等值线分布,

Figure 3 (Color online) (a) Mean streamwise velocity (U_{av}) comparisons between the fully-developed turbulent and laminar profiles; (b) mean streamwise velocity contours on the cross-section of the square annular duct.

此导致图4(b)中的Arrow-I所示的速度等值线向外矩形短边壁突起. 从二次流的强度来看(以二次流最大平均速度为衡量标准), 凸角域附近的二次流强度明显比凹角域附近大2–3倍. 而与平均流向速度 U_b^+ 相比, 二次流的最大强度约为 U_b^+ 的3%–5%, 此结论对方、矩形环管均适用. 以上是对湍流平均流场的主要定性观察, 为以下湍流统计量更加细致的分析提供基础.

2 雷诺应力场分布特征

在瞬态流场进入统计静态后, 对流动速度场及其脉动量进行相关统计分析, 以此得到工程问题所普遍

图4 (网络版彩图) (a) 矩形环管湍流与层流流向速度剖面比较; (b) 湍流平均流向速度(U_{avg})等值线分布

Figure 4 (Color online) (a) Mean streamwise velocity comparisons between the fully-developed turbulent and laminar profiles; and (b) mean streamwise velocity (U_{avg}) contours on the cross-section of the rectangular annular duct.

关心的各种湍流统计平均量. 徐弘一和郭加宏^[18]一文在仔细分析方、矩形环管平均流向速度场后, 得到了适用于更加复杂几何构型壁湍流内层速度剖面规律的初步解析关系并在Xu^[22]中给出该解析关系的详细物理推理过程及其数学含义. 同时亦展示了由湍流驱动的平均二次流流动结构, 如图5(a)和(b)所示. 在此基础上, 本文将进一步给出工程湍流研究所一直关注并致力解决的湍流雷诺应力场. 从这些由直接数值模拟

图5 (网络版彩图)方(a)、矩形(b)环管内湍流驱动二次流(Prandtl第二类二次流)时平均结构(矢量图, SF-mag 代表平均二次流速度模量大小)

Figure 5 (Color online) Vector-plots of the mean turbulence-driven secondary flow (secondary flow of Prandtl second kind) on the cross-section of the square (a) and the rectangular (b) annular ducts (SF-mag representing the velocity magnitudes of secondary flow).

所揭示的雷诺应力场分布特征中, 总结、归纳出一些有意义的规律性内涵. 进而对RANS方法半个多世纪以来, 在湍流封闭模型的构造和研究方面, 做出一些客观的并且有物理意义的评判, 从而可以为工程湍流模拟和预测的下一步发展提出有数学-物理依据的研发努力方向.

根据以上图6和7, 从具有代表性的方、矩形环管的湍流雷诺应力场分布中不难看到:

(1) 对壁湍流而言, 湍流的主要活跃区域是在壁面和角域附近, 包括平壁和凹、凸角区域. 而且雷诺应力各个分量的活跃程度对不同流动区域具有较强的选择性. 由此构成分布极不均匀, 但又极具流动几何构型特征和各个雷诺应力分量特征的分布形式. 其中的分布形式和特征又可细分为湍流动能($u'u'$, $v'v'$, $w'w'$)和雷诺切应力分量($u'v'$, $u'w'$, $v'w'$)两类.

对湍流动能分量而言, 主流向动能分量($u'u'$), 参照图6(a)和7(a), 在平壁和凸角域附近形成动能峰值, 而凹角域的湍动能则明显被连续衰减至角点的零值, 并且凹角附近无峰值形成. 而副流方向的动能分量($v'v'$, $w'w'$), 如图6(b), (c)和7(b), (c)所示, 则在与速度脉动方向平行的表面附近呈强峰值分布, 而在与其脉动方向垂直的表面附近呈次峰值分布. 且除壁面和角域点外, 流场内的湍动能分量均不可能为零.

对雷诺切应力分量而言, 参照图6(d), (e)和7(d), (e), 主流雷诺切应力分量($u'v'$, $u'w'$)均在其相关速度脉动的垂直壁面和凸角域附近呈现强峰值, 而在与其相关速度脉动平行的壁面和凸角域附近则呈现次峰值, 并且雷诺切应力分量的符号和与其相关的垂直壁面呈正、负相间的对应关系. 而副流湍流雷诺切应力分量($v'w'$)则仅在凹角和凸角域附近表现活跃, 并且是产生二次流的重要物理量之一, 见第4节的二次流机理分析.

(2) 基于以上对方、矩形直管内的充分发展湍流雷诺应力场的观察, 并结合RANS方法所依据的Kolmogorov湍流本构关系:

$$\overline{u'_i u'_j} = A \delta_{ij} + \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right).$$

不难看出该关系的实质, 是以相关标量湍流涡黏性系数 ν_t 与速度导数应变率形式的线性乘积和标量函数 A 之和的形式与湍流雷诺应力场相关联. 而根据图6和7所给出的各雷诺应力分量场分布可清楚地看到, 该形式的关联并无法真实反映和描述雷诺应力场的复杂性. 其中, 在应变率接近零的管道中心区域, 如图3和4所示, 湍动能在各个方向不为零且不可能仅以一个标量函数 A 所表述, 参考图6和7(a)-(c). 仅这一

图6 (网络版彩图)方形环管湍流雷诺应力场分布. (a) $u'u'$; (b) $v'v'$; (c) $w'w'$; (d) $u'v'$; (e) $u'w'$; (f) $v'w'$

Figure 6 (Color online) Contour-plots of the Reynolds stresses in the square annular duct. (a) $u'u'$; (b) $v'v'$; (c) $w'w'$; (d) $u'v'$; (e) $u'w'$; (f) $v'w'$.

事实就足以证明, 基于Kolmogorov标量涡黏系数与应变率的线性关联关系在这些区域中(零应变域)的不可靠性和不完整性. 而近期Schmitt^[23]试图构造非线性本构关系来改善这一缺陷. 本文则将试图根据对雷诺应力中的湍动能多尺度分布特征, 即湍流能量谱, 建议以张量涡黏系数改写传统Kolmogorov湍流本构关系,

进而可以应用直接数值模拟所得到的湍流雷诺应力, 即图6和7所示结果, 对张量涡黏系数的各个分量进行计算标定. 事实上, 如今雷诺平均方法中所用的涡黏系数则仅为其中对平板流所适用的一个张量分量, 而将此涡黏系数盲目地推广应用至其他方向则明显违背了湍流各向异性运动特征的基本物理事实.

图7 (网络版彩图)矩形环管湍流雷诺应力场分布. (a) $u'u'$; (b) $v'v'$; (c) $w'w'$; (d) $u'v'$; (e) $u'w'$; (f) $v'w'$

Figure 7 (Color online) Contour-plots of the Reynolds stresses in the rectangular annular duct. (a) $u'u'$; (b) $v'v'$; (c) $w'w'$; (d) $u'v'$; (e) $u'w'$; (f) $v'w'$.

3 90°凹角域数据的实验-计算验证

在给出以上湍流雷诺应力场的基础上, 为验证直接数值模拟结果的真实合理性及其与物理实际的吻合程度, 本文引用了Cheesewright等人^[19]针对方管所给出的实验结果和Gavrilakis^[13]的直接数值模拟计算数据进行比较. 其中Cheesewright的研究给出了方形管在90°凹角域附近的实验测量结果, 基于管中心速度(最大流向速度)和管道边长的测量雷诺数为 $Re_0=4900$, 测量数据包括角域附近的流向速度, 二次流速度及湍流雷诺应力. 而Gavrilakis的方管直接数值模拟的相关雷诺数为 $Re_0=5880$. 本文中基于方、矩形环管截面上的最大速度和环管内外壁面平均宽度的雷诺数分别为 $Re_0=3731$ (方形环管), $Re_0=4086$ (矩形环管). 虽然与

Cheesewright和Gavrilakis的流动雷诺数有一定的差别且均为偏低, 但应该是在具有可比性的范围之内.

从对90°凹角域附近的实验和直接数值模拟结果的定性观察不难看到, 无论是方管还是方、矩形环管, 该区域的主要流动特征是90°凹角附近的湍流驱动二次涡流. 以下分析将Cheesewright和Gavrilakis的计算实验中的二次流涡眼(Vortex Center, VC)记为VC0, 而方形环管中的相应涡眼, 如图8(a)所示, 标识为VC1, 其共同特征为关于凹角平分线对称. 而矩形环管中的二次流涡对则关于角平分线非对称, 在图8(b)和(c)中分别记为VC2(矩形通道短边侧涡)和VC3(矩形通道长边侧涡). 如图8所示, 这些涡对的尺度与管道尺度相当, 远大于90°凹角附近的角域边界层尺度, 即由壁面或角域所发展起来的流向速度大梯度的范围. 在以下

图8 (网络版彩图)方、矩形环管90°凹角附近实验与计算站数据提取示意图。方形环管(a), 矩形短边侧(b)和矩形长边侧(c)

Figure 8 (Color online) Schematic plot for the DNS and experimental data comparisons near the 90° concave corner. (a) SAD, (b) RAD minor side, (c) RAD major side.

对方、矩形环管在90°凹角域附近的结果对比分析中, 考虑了方形环管中的对称涡眼(VC1)附近的数据直接对比, 同时也对方形环管尝试了以二次流涡眼位置为校正参数的修正对比, 该修正首先依据涡眼位置确定数据的提取站位置(z 坐标值), 然后再根据涡眼位置的 y 坐标数据对所提取出的数据在 y 方向上作相应尺度缩放修正。表2列出了90°凹角域附近用于数据比较的计算站位置, 如图8所示。

在方形环管分析中, 从图9(a)所展示的数据比较中可以看到, VC1附近的 u_{avg} , w_{avg} , u'_{rms} , w'_{rms} 数据均落在与实验数据可比的范围内且具有较高的相似度, 尤其是在靠近壁面区域附近, 由此可以基本断定无论从平均速度场(u_{avg} , w_{avg})还是湍流脉动强度(u'_{rms} , w'_{rms})来看, 方形环管的直接数值模拟数据反映了90°凹角附近的湍流基本特征并且具备较高的可信度。

近凹角域数据提取站(S1, S2)的数据与远离凹角域各站(S3, S4)的计算结果相比较, 明显看出由于内方管的影响, 方形环管中的数据与方管数据有一定偏离, 而越接近凹角域附近, 方管与方形环管的数据则越具有可比性。而根据VC0和VC1涡眼位置的 y 坐标所作的尺度缩放修正(图9(a)中uncorrected数据与corrected数据比较)表明, 尺度缩放修正可在一定程度上改善直接模拟数据与实验数据的吻合程度, 这一点在靠近壁面区域尤为明显, 由此可初步推断对称的二次流结构存在着以涡眼位置为相似参数的流动相似性。该结论尚需要在更高雷诺数流动条件下做进一步验证。

在矩形环管的比较中, 由于VC2与VC3的非对称特征, 流动的相似性已不复存在。因此, 数据提取站的位置(z 坐标值)仍依据实验和计算中的涡眼相对位置确定, 但在另一方向(y 方向)上则不进行尺度缩放修正。在该条件下所得到的计算-实验比较则只可能对计算数据的合理性给出定性而非定量意义上的物理判断。图9(b)给出了涡眼VC2和VC3, 如图8(b)和(c)所示的计算-实验数据对比。通过对矩形环管长、短边侧的平均速度场(u_{avg} , w_{avg})和湍流脉动强度(u'_{rms} , w'_{rms})的比较, 见图9(b) (b1-b4), 可以明显地看到, 矩形环管涡眼VC2和VC3附近的平均流场和湍流脉动结果与相关计算和实验比较, 均落在了一个合理的区间范围内, 并且数据的变化趋势和分布范围均具有较高的可比性。由此可推断矩形环管的直接数值模拟结果具备了比较高的物理可信度。

表2 90°凹角域附近实验与计算比较, 数据站位置列表

Table 2 Locations of the DNS and experimental data near the 90° concave corner for the comparisons

计算站/算例	Cheeswright	Gavrilakis	方形环管凹角涡	矩形环管凹角涡	矩形环管凹角涡
涡眼 VC (y, z)	VC0 (0.206, 0.500)	VC0 (0.206, 0.500)	VC1 (0.164, 0.407)	VC2 (0.185, 0.405)	VC3 (0.630, 0.251)
S1(y)或S1(z)	$Z_{vc0}=0.10(u)$ $Z_{vc0}=0.16(w)$	$Z_{vc0}=0.10(u)$ $Z_{vc0}=0.16(w)$	$Z_{vc1}=0.08140(u)$ $Z_{vc1}=0.1300(w)$	$Z_{vc2}=0.0810(u)$ $Z_{vc2}=0.1296(w)$	$Y_{vc3}=0.1260(u)$ $Y_{vc3}=0.2016(w)$
S2(y)或S1(z)	$Z_{vc0}=0.30(u, w)$	$Z_{vc0}=0.30(u, w)$	$Z_{vc1}=0.2442(u, w)$	$Z_{vc2}=0.2430(u, w)$	$Y_{vc3}=0.3780(u, w)$
S3(y)或S1(z)	$Z_{vc0}=0.50(u, w)$	$Z_{vc0}=0.50(u, w)$	$Z_{vc1}=0.4070(u, w)$	$Z_{vc2}=0.4050(u, w)$	$Y_{vc3}=0.6300(u, w)$
S4(y)或S1(z)	$Z_{vc0}=0.70(u, w)$	$Z_{vc0}=0.70(u, w)$	$Z_{vc1}=0.5698(u, w)$	$Z_{vc2}=0.5670(u, w)$	$Y_{vc3}=0.8820(u, w)$

关于图9(b)中矩形环管数据的进一步比较可以发现, 长边侧的数据与方管数据(Cheeswright 实验和 Gavrilakis 计算)相比较为接近, 而短边侧的数据则相差比较明显, 尤其在数据分布的大小方面. 对比图8(b)和(c)中的平均二次涡结构不难看出, 由于矩形管的短边效应, 使VC2涡眼位置相对于方管沿y轴正向偏移, 导致凹角域附近的流动非对称并且使该涡在y方向上的影响范围扩大. 而VC3涡则受到VC2偏移的挤压, 沿y方向平移, 但其在z方向的影响范围则基本与方管对称情形相同, 因此, 使VC3附近的相对湍流场分布与方管数据比较接近. 而VC2附近的数据与方管相比则在大小上呈明显差异, 但在数据分布的走势上仍具有一定的可比性.

4 90°凸角域二次流机理分析

根据图6和7所显示的雷诺应力结果, 依据Bradshaw^[4]一文所给出的湍流平均流向涡对流-扩散控制方程:

$$V \frac{\partial \overline{\Omega}_x}{\partial y} + W \frac{\partial \overline{\Omega}_x}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{\Omega}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{\Omega}_x}{\partial z^2} \right) + \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (-\overline{v'w'})}_{\text{剪应力贡献 (SSG)}} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\overline{v'^2} - \overline{w'^2})}_{\text{正应力贡献 (NSG)}}.$$

二次流生成项 (SFG)

不难看出, 湍流雷诺应力相关分量的非均匀分布, 具体说是与流动方向垂直平面内的湍动能($v'w'$)和湍流切应力($v'w'$)的空间二阶导数, 作为平均流向涡分量控制方程的源项, 驱动了二次流的形成. 因此, Prandtl 第二类二次流亦被称之为湍流驱动的二次流.

而直接分析相关雷诺应力各分量的导数分布则可对二次流的形成、演化及其与流动条件和流动构型的关系有一深刻的认知, 本文的以下内容给出了凸角域附近针对二次流生成项的详细讨论.

图10(a)和11(a)分别给出方、矩形环管90°凸角域附近的二次流生成项(Secondary Flow Generation, SFG). 很明显, 方形环管90°凸角域附近的SFG呈对称分布而矩形环管的SFG则为非对称分布. 而图10(b), (c)和11(b)和(c)则分别将方、矩形环管90°凸角附近的SFG分解为正应力贡献(Normal Stress Generation, NSG)和剪应力贡献(Shear Stress Generation, SSG). 可以清楚地看到一个有趣的事实, NSG和SSG在90°凸角域附近, 对方、矩形环管而言, 均呈现蝴蝶状分布. 并且NSG和SSG的分布互为对偶结构, 即表征生成项强度的蝶翼颜色呈蓝-红相对应之状态. NSG的蓝区必对应SSG的红区. 而SFG则为NSG与SSG的叠加. 传统的二次流机理分析(见Gessner和Jones^[5], Gerard^[6]和Perkins^[7])所讨论的一个主要议题是在SFG当中NSG与SSG所起的作用和贡献, 或二者孰占优势. 通过图10(a)和11(a)中SFG的颜色区域轮廓线, 即等值线(S1, S2, S3, S4, S5, S6)的提取, 并将这些轮廓线叠加至图10(b), (c)和图11(b), (c)所示NSG与SSG的分布, 同时通过相关区域的颜色对比, 可清楚地看出, 对方、矩形管90°凸角域附近的NSG和SSG而言, 二者是一种区域选择性地相间占优势. 例如, 方形环管的S2区、矩形环管的S5区、SFG均呈红色, 即分布为正值, 而将S2和S5分别复制到图10(b), (c)和图11(b), (c)的NSG与SSG的分布中, 由NSG, SSG的分布颜色与SFG颜色对比, 按相同则占优的原则, 不难得到NSG与SSG在凸角域附近为相间占优的分布. 而对S1区则明显是SSG占优.

图9 方、矩形环管90°凹角附近实验结果(Cheesewright等人, 1990^[19]), 直接数值模拟计算(Gavrilakis 1992^[13])与本文结果比较. (a) 涡眼VC1: (a1) 平均流向速度 u_{avg} ; (a2) 平均二次流 z 分量 w_{avg} ; (a3) 流向湍流速度脉动均方根值 u'_{rms} ; (a4) 展向 z 湍流速度脉动均方根值 w'_{rms} ; (b) 涡眼VC2和VC3: (b1) u_{avg} , (b2) w_{avg} , (b3) u'_{rms} , (b4) w'_{rms} .

5 关于湍流本构关系的讨论

众所周知, 现今普遍采用的雷诺平均方法中的湍流封闭模型和大涡模拟方法(Large Eddy Simulation, LES)中的亚格子模型均基于了Kolmogorov^[10]提出的涡黏假设的一般三维形式, 即传统湍流本构方程:

$$\overline{u'_i u'_j} = A \delta_{ij} + \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right),$$

其基本思想, 或湍流标量涡黏系数 ν_t 被引入的基本依

据, 是假设湍流的多尺度涡运动, 从大尺度到小尺度运动, 与分子运动具有可比性. 然而该本构关系自提出以来, 并未得到系统且有说服力的理论论证和实验计算支持, 可以说仍处于本构关系最初提出的假设(Hypothesis)阶段. 因此直接获取雷诺应力场和湍流多尺度运动特征, 成为验证和进一步发展湍流本构关系的焦点议题.

在此需要首先提及的是, 隐含在传统牛顿流体本构关系中的一个重要物理假定, 即标量分子黏性系数

图 10 (网络版彩图) 方形环管90°凸角域附近: (a) 二次流生成项(SFG)分布; (b) 正应力贡献(NSG); (c) 切应力贡献(SSG)
Figure 10 (Color online) (a) Secondary flow generation (SFG) distribution; (b) normal stress generation (NSG); (c) shear stress generation (SSG) in the vicinity of the 90° convex corner of the square annular duct.

图 11 (网络版彩图) 矩形环管90°管凸角附近: (a) 二次流生成项(SFG)分布; (b) 正应力贡献(NSG); (c) 切应力贡献(SSG)
Figure 11 (Color online) (a) Secondary flow generation (SFG) distribution; (b) normal stress generation (NSG); (c) shear stress generation (SSG) in the vicinity of the 90° convex corner of the rectangular annular duct.

μ 存在的前提是分子热运动满足各向同性假设, 这一点可从本文所提供的数学证明附录中清楚地看到, 见附录. 由此不难推断, 重新审视湍流多尺度、各向异性运动特征是直接检验传统湍流本构方程是否成立的关键, 即 v_T 的引入是否有效. 鉴于此推理, 本文首先在方、矩形管内有代表性点上, 如图12(a), (b)所示, 组1, 2, 3, 4, 提取充分发展湍流瞬态运动信息, $f(t, x, y, z) = (u, v, w)$. 对该信息沿充分发展 x 方向作傅里叶变换, 将速度信号分解为一系列从大尺度(对应于小波数)到小尺度(对应于大波数)的能量谱函数:

$$f(t, x, y, z) = a_0(t, y, z) + \sum_{n_x=1}^{\infty} [a_{n_x}(t, y, z) \cos n_x x + b_{n_x}(t, y, z) \sin n_x x],$$

由此得到瞬时湍流能量随波长的分布:

$$F(n_x \tau, n_x, y, z) = a_{n_x}^2 + b_{n_x}^2,$$

对前瞬时湍流能量谱函数取时间平均:

图 12 能量谱取样点分布. (a) 方形环管(组1, 2); (b) 矩形环管(组3, 4)

Figure 12 Schematic plots for the sampling points of the turbulent energy spectra in the square (group 1, 2) and rectangular (group 3, 4) annular ducts.

图 13 方、矩形环管湍流能量谱分布. (a) 组1点; (b) 组2点; (c) 组3点; (d) 组4点

Figure 13 Turbulent energy spectra at the sampling points of (a) group 1; (b) group 2; (c) group 3; (d) group 4 in the square and rectangular annular ducts.

$$\bar{F}(n_x, y, z) = \frac{1}{N_t} \sum_{n_t=1}^{N_t} F(n_t, \tau, n_x, y, z),$$

即可得到湍流空间运动特性的各向同、异性评判标准: 时平均湍流能量谱函数随波数的变化

$\bar{F}(n_x, y, z) = (E_{uu}, E_{vv}, E_{ww})$. 图13(a)–(d)分别给出了该4组、每组3点, 如图12(a)和(b)所示的湍流能量谱函数多尺度分布特征. 很明显, 对大尺度运动(小波数)而言, 湍流能量谱的共性特征是其较强的各向异性, 即

湍流在各方向上的能量明显不同. 因此湍流本构方程中 v_T 的引入, 对大尺度范围内的流动无法成立, 取而代之的应当是以下更加一般的、可描述各向异性运动的一般湍流本构关系:

$$\overline{u'_i u'_j} = \lambda_{ij} + v_{Tijk} \left(\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_m} + \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_k} \right).$$

对图13(a)–(d)的更进一步观察可见, 对流场内部点(组1, 2, 3中的第二点), 当流动尺度足够小时, 湍流能量谱则均趋于各向同性. 因此, 对该区域的大涡模拟而言, 亚格子模型可以延用标量涡黏系数的本构关系. 而对于近壁或角域而言, 从大到小尺度的各向异性特征要求本构关系亦必须基于张量涡黏系数 v_{Tijk} . 由此可看清重新审视和构造适用于各向异性湍流运动的本构关系的必要性.

对图6和7作进一步观察, 可看到湍动能($u'u'$, $v'v'$, $w'w'$)的分布形式和特征与切应力($u'v'$, $u'w'$, $v'w'$)截然不同. 湍动能全场为正, 当速度应变率为零时, 湍动能一般不为零, 但取最小值, 且该最小值在不同方向通常取不同值, 即在湍流最大尺度层面上(时平均意义上)的各向异性. 由此可见, 前一般湍流本构关系中引入 λ_{ij} 的用意是反映大尺度湍流动能的各向异性特征, 其基本形式为对角形式的各向异性张量, 即满足: $\lambda_{11} \neq \lambda_{22} \neq \lambda_{33} > 0$; $\lambda_{ij} = 0$, if $i \neq j$. 在此需要指出的是, 湍流动能恒正的事实表明该物理量似乎无法, 也不应该与速度应变率分量直接关联, 因此只能以 λ_{ij} 的形式来描述. 而湍流切应力的分布特征则是正、负相间, 速度零应变率对应于湍流零切应力, 因此传统的雷诺切应力与应变率的线性关联仍可延用, 但关联形式则应以张量湍流涡黏系数的形式进行. 更进一步的研究设想推理是: 根据直接数值模拟所得到的雷诺切应力($u'v'$, $u'w'$, $v'w'$), 如图6和7所示, 和相关的流体应变率, 可以准确地计算出RANS方程中与切应变相关的张量涡黏系数各分量, 而对湍动能项($u'u'$, $u'w'$, $v'w'$)则需要以源项形式或其他非涡黏模型形式来构建RANS模型, 关于这方面的工作进展将在后续文章中展开并详细讨论.

6 研究结论

本文给出了方、矩形环管内充分发展湍流的雷诺应力场. 通过对90°凹角域附近湍流平均流场和雷

诺应力场的计算与实验对比分析, 验证了方、矩形管直接数值模拟结果的合理性和可信度. 同时在流动对称条件下, 初步观察到了以平均二次流涡眼位置为相似参数的90°凹角域附近的流动相似性规律. 在此基础上, 进一步考察了90°凸角域附近湍流驱动二次流的形成机理, 得到了正应力和剪应力贡献的蝶状分布形式, 并对其叠加后的总体生成项进行了详细探讨, 得到了正应力和剪应力贡献是以区域选择性形式相间占优的结论. 根据湍流能量谱的分布特点, 对传统湍流本构关系进行了检验, 初步探讨并提出了构建适用于多尺度、各向异性运动特征的湍流本构关系的设想.

7 研究展望

本文作为《复杂几何构型湍流高端数字模拟技术》系统研究的重要一环, 为国家自然科学基金重大研究计划的广义壁湍流研究打下坚实基础, 所建立的一般方、矩形环管充分发展湍流数据库对工程湍流的研究具有普遍指导意义. 在此基础上, 对其中的湍流雷诺应力场和湍流能量谱进行了初步分析和实验验证. 分析结果表明, 凹角域附近的平均流(流向及二次流)和湍动能与实验及其他直接数值模拟结果基本吻合, 并且在对称流动构型条件下表现出以二次流涡眼位置为参数的相似性规律. 基于雷诺应力分布, 对凸角域附近湍流驱动的平均二次流机理进行探讨, 得到了湍流驱动的生成项结构.

一般方、矩形直管道充分发展湍流的能量谱反映了工程壁湍流的多尺度、各向异性运动基本特征. 在此基础上, 通过对牛顿流体本构关系中所隐含各向同性物理假设的严格数学证明, 阐明对Kolmogorov^[10]湍流本构关系进行反思, 以张量形式的湍流涡黏系数改写传统湍流本构方程的必要性. 本研究初步提出解决湍流各向异性问题的设想, 其具体技术途径是通过建立各种复杂几何构型的湍流数据库, 对相应湍流涡黏系数各元素依据DNS结果进行标定计算, 即对雷诺应力场与应变场的关联关系进行有物理根据的重新认识和构建. 由此使目前工业界普遍采用的非定常雷诺平均模型(Usteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes, URANS)和大涡模拟模型(LES)能够准确有效地应对各种以多尺度、各向异性为基本运动特征的复杂工程湍流问题.

致谢 本文研究工作的部分计算在国家超级计算天津中心的天河计算机上完成.

参考文献

- 1 Prandtl L. Über die Ausgebildete Turbulenz. In: Proceedings of 2nd International Congress for Applied Mechanics. Zurich, 1926. 62–74
- 2 von Karman T. Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz. In: Proceedings of 3rd International Congress Applied Mechanics. Stockholm: AB Sveriges Litografiska Tryckerier, 1930. 1: 85–93
- 3 Nikuradse J. Untersuchungen über turbulente Strömungen in nicht kreisförmigen Röhren. *Ing Arch*, 1930, 1: 306–332
- 4 Bradshaw P. Turbulent secondary flows. *Annu Rev Fluid Mech*, 1987, 19: 53–74
- 5 Gessner F B, Jones J B. On some aspects of fully-developed turbulent flow in rectangular channels. *J Fluid Mech*, 1965, 23: 689–713
- 6 Gerard R. Secondary flow in noncircular conduits. *J Hydraul Div*, 1978, 104: 755–773
- 7 Perkins H J. The formation of streamwise vorticity in turbulent flow. *J Fluid Mech*, 1970, 44: 721–740
- 8 Naimi M, Gessner F B. A calculation method for developing turbulent flow in rectangular ducts of arbitrary aspect ratio. *J Fluid Eng*, 1995, 117: 249–258
- 9 Speziale C G. On nonlinear $K\text{-}l$ and $K\text{-}\epsilon$ models of turbulence. *J Fluid Mech*, 1987, 178: 459–475
- 10 Kolmogorov A N. The equation of turbulent motion in an incompressible viscous fluid. *Doklady Akademii Nauksssr*, 1942, 1/2: 56–58
- 11 Kim J, Moin P, Moser R. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J Fluid Mech*, 1987, 177: 133–166
- 12 Nikitin N V. Direct numerical modeling of three-dimensional turbulent flows in pipes of circular cross section. *Fluid Dyn*, 1994, 29: 749–758
- 13 Gavrilakis S. Numerical simulation of low-Reynolds-number turbulent flow through a straight square duct. *J Fluid Mech*, 1992, 244: 101–129
- 14 Chung S Y, Rhee G H, Sung H J. Direct numerical simulation of turbulent concentric annular pipe flow. *Int J Heat Fluid Flow*, 2002, 23: 426–440
- 15 Nikitin N, Yakhot A. Direct numerical simulation of turbulent flow in elliptical ducts. *J Fluid Mech*, 1999, 532: 141–164
- 16 Nikitin N V. Direct numerical simulation of turbulent flows in eccentric pipes. *Comput Math Math Phys*, 2006, 46: 489–504
- 17 Xu H. Direct numerical simulation of turbulence in a square annular duct. *J Fluid Mech*, 2009, 621: 23–57
- 18 Xu H Y, Guo J H. Direct numerical simulation of turbulence in square and rectangular annular ducts: Part-I mean flow analyses, *Re-understanding fully-developed turbulent boundary layer in duct* (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2013, 43: 634–651 [徐弘一, 郭加宏. 方型和矩型环管湍流直接数值模拟分析: I. 平均流场, 对直管道充分发展湍流边界层的再认识. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2013, 43: 634–651]
- 19 Cheesewright R, McGrath G, Petty D G. LDA measurements of turbulent flow in a duct of square cross section at low Reynolds number. Aeronautical Engineering Department. Technical Report, ER 1011, Queen Mary Westfield College, University of London, 1990
- 20 Piquet J. Turbulent Flows-Models and Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1999
- 21 Elder J W. The flow past a flat plate of finite width. *J Fluid Mech*, 1960, 9: 133–153
- 22 Xu H. Detailed analysis of DNS data in square and rectangular annular ducts: Towards developing more generalized law-of-the-wall of wall-bounded turbulence. In: Proceedings of 10th International ERCOFAC Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurement. Marbella, 2014
- 23 Schmitt F G. Direct test of a nonlinear constitutive equation for simple turbulent shear flows using DNS data. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 2007, 12: 1251–1264

Reynolds stress and turbulence energy spectra analysis of *Re*-understanding the turbulence constitutive equation DNS data in square and rectangular annular ducts

XU HongYi^{1,2*}

¹ *Department of Aeronautics and Astronautics, Fudan University, Shanghai 200433, China;*

² *State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, International Research Center for Computational Mechanics, Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China*

Through systematic Direct Numerical Simulation (DNS) of the fully-developed turbulence inside a square annular and rectangular annular ducts, the current research established detailed turbulence statistics database, which included: (1) the mean flow field (mean streamwise velocity and turbulence-driven secondary flow or historically the secondary flow of Prandtl second kind); (2) the turbulent Reynolds stresses; and (3) the turbulence energy spectra. The current paper presented the characteristics of the complete Reynolds stress fields, including $u'u'$, $v'v'$, $w'w'$, $u'v'$, $u'w'$, $v'w'$, and provided a convincing validation of these results using the existing experimental measurements from Cheesright (1990) and the DNS data of Gavrilakis (1992). The DNS predicted Reynolds stress fields made it possible to conduct in-depth interrogation of the mechanisms of turbulence-driven secondary flow near the 90° convex corner. The current paper raised a fundamental issue of the isotropic assumption implicitly contained in the conventional constitutive equation of turbulence based on the analogy between the turbulence and molecular motions. Via in-depth observation of the characteristics of Reynolds stresses and turbulence energy spectra, the paper put forward the proposal to develop new constitutive equation of turbulence using the tensor form of eddy viscosity. The research is targeted to provide a capability to fully understand the anisotropic properties of turbulence in engineering practices and to further develop a high-fidelity RANS-based turbulence-closure model using more and more reliable DNS data.

wall turbulence, Reynolds stresses, turbulence energy spectrum, Prandtl secondary flow of second kind, direct numerical simulation, turbulence constitutive equation, anisotropic motion

PACS: 47.27.E-, 42.27.ek, 42.27.N-, 42.27.nb

doi: [10.1360/SSPMA2016-00389](https://doi.org/10.1360/SSPMA2016-00389)